Über den relativen Beharrungszustand einer Bevölkerung

Autor(en): **Thullen, Peter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966806

Über den relativen Beharrungszustand einer Bevölkerung

Von *Peter Thullen* in Genf

Einleitung

Falls in einer offenen Bevölkerung, deren zeitlicher Ablauf durch Ein- und Austritte bestimmt ist, die absolute Anzahl der zugehörigen Personen sowie deren Altersverteilung unverändert bleiben, so sagt man, die Bevölkerung befinde sich im «Beharrungszustand» oder sie sei «stationär». Derartige Zustände spielen in demographischen und versicherungsmathematischen Untersuchungen, insbesondere der Sozialversicherung, eine Rolle.

In vorliegender Arbeit soll von der Forderung der Konstanz der absoluten Anzahl der Personen abgesehen und allgemein Bevölkerungen untersucht werden, von denen nur die *Unveränderlichkeit der Altersstruktur,* d.h. der relativen Altersverteilung, vorausgesetzt wird. Wir werden eine solche Bevölkerung eine *relativ-stationäre* nennen oder auch sagen, sie befinde sich in einem *relativen Beharrungszustand* im Gegensatz zu dem anfangs erwähnten, den wir den *absoluten* Beharrungszustand nennen wollen.

Macht man bezüglich einer sich im relativen Beharrungszustand befindlichen Bevölkerung die zusätzliche Annahme, dass ihre *Vermehrungsrate konstant* sei – die Bevölkerung nimmt dann nach einem exponentiellen Gesetz zu bzw. ab –, so spricht man von einer *stabilen Bevölkerung.* Stabile Bevölkerungen sind bereits früher untersucht worden [1]. Einer der Ausgangspunkte ist ein Satz von *Lotka,* der folgendes besagt [2]:

---

[1]) *Linder A.*, Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung. Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, IV, 1938, S. 136–156. In dieser Arbeit wird auch auf die folgenden älteren Untersuchungen hingewiesen:

Sharpe F.R. and *Lotka A.J.*, A problem in age-distribution. Philosophical Magazine, 1911, S. 435–438.

Dublin L.I. and *Lotka A.J.*, On the true rate of natural increase. Journ. Amer. Stat. Assoc. 1925, S. 305–339.

«Bleiben in einer Bevölkerung die Sterbeziffern und die Fruchtbarkeitsziffern von einem bestimmten Zeitpunkt an unverändert, so wird diese Bevölkerung nach genügend langer Zeit in geometrischer Progression zu- oder abnehmen, wobei der Altersaufbau unverändert bleibt. Die Stärke der Zu- oder Abnahme und der Altersaufbau sind nur abhängig von der Fruchtbarkeit und der Sterblichkeit, nicht aber von der Beschaffenheit der Bevölkerung im Anfangszeitpunkt.»

Obwohl die vorliegende Arbeit von anderen Voraussetzungen und Überlegungen ausgeht, bilden ihre Ergebnisse eine Ergänzung und Erweiterung jener früheren Arbeiten. Die bisherigen Untersuchungen waren meist rein demographischer Art, wobei die Eintritte in die Bevölkerung auf die durch Geburt beschränkt blieben, dadurch aber andererseits in einem unmittelbaren dynamischen Zusammenhang (Fruchtbarkeit) mit der jeweils existierenden Bevölkerung standen. Da es uns hier vor allem um die Anwendung auf *versicherte* Gesamtheiten geht, werden Eintritte in jedem beliebigen Altersintervall zugelassen, ohne uns zunächst um die «Ursache» der Eintritte zu kümmern. Wie in jenen Arbeiten wird auch in dieser vorausgesetzt, dass die vorkommenden Verbleibenswahrscheinlichkeiten nur von den zugehörigen Altern, nicht aber von der Zeit als solcher abhängen.

Im ersten Abschnitt der Arbeit werden einige Grundformeln aufgestellt und zudem gezeigt, dass die Häufigkeitsfunktion einer offenen Bevölkerung und die Eintrittsfunktion einander ein-eindeutig zugeordnet sind. Im zweiten Abschnitt wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für stabile Bevölkerungen angegeben (Satz 1), die besagt, dass die zu einer stabilen Bevölkerung gehörige Eintrittsfunktion die gleiche Wachstumsrate wie jene und zugleich eine konstante Altersstruktur besitzt. Umgekehrt ist evident, dass eine Bevölkerung von einem gewissen Zeitpunkt an stabil sein muss, falls die Eintrittsfunktion diese beiden Eigenschaften hat. Für den Spezialfall des absoluten Beharrungszustandes erhält man einen Satz von *W. Saxer* [3]).

Siehe ausserdem:

Zwinggi E., Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung. Mitteil. Verein. schweiz. Versicherungsmath. Bd. 51, 1951, S. 178–180.

Eine ausführliche Literaturangabe über den gesamten Komplex der sogenannten «Erneuerungstheorie» findet sich in dem demnächst erscheinenden Band II von *W. Saxer*, Versicherungsmathematik.

[2]) Siehe *Linder A.*, loc. cit. S. 140.

[3]) *Saxer W.* [1], Zur Frage des Beharrungszustandes. Mitteil. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 27, 1932, S. 231–244.

Im dritten Abschnitt werden Bevölkerungen im relativen Beharrungszustand näher untersucht und nachgewiesen, dass diese unter gewissen Voraussetzungen notwendig auch *stabil* sind, d.h. eine konstante Vermehrungsrate besitzen. Dies ist z.B. immer dann der Fall, wenn die Altersstruktur der Eintritte unverändert bleibt (Satz 2) – hieraus werden in den beiden folgenden Abschnitten zwei interessante Folgerungen abgeleitet –, oder auch, wenn der Variationsbereich der Eintrittsalter kleiner als das Altersintervall der Gesamtbevölkerung ist (Satz 3). Die Bedingung von Satz 3 kann man in den meisten in der Praxis interessierenden Fällen als erfüllt voraussetzen. Sie ist natürlich im besonderen gegeben, wenn sich die Eintritte auf ein Alter x_0, z.B. $x_0 = 0$ (Geburt), beschränken, so dass also eine relativstationäre Bevölkerung, in welche die Eintritte nur durch Geburt erfolgen, stets auch stabil ist.

Die Wichtigkeit des Begriffes der stabilen Bevölkerung, insbesondere in der Sozialversicherung, wird durch den im vierten Abschnitt bewiesenen Satz 4 erhärtet, nach welchem unter den relativ-stationären Bevölkerungen die stabilen die einzigen sind, in welchen auch die relative Verteilung nach Verbleibensdauer (Versicherungszeit) jeweils für jedes gegebene Alter zeitlich konstant ist. Eine weitere, ebenfalls für die Sozialversicherung wichtige Tatsache ist die folgende (§ 5): $G^{(a)}$ sei eine offene Bevölkerung, welcher eine «Neben-Gesamtheit» $G^{(i)}$ so zugeordnet sei, dass die Eintritte in $G^{(i)}$ aus den Austritten aus $G^{(a)}$ bestehen, die einer bestimmten Ausscheideursache (z.B. Invalidität) entsprechen; $G^{(i)}$ kann auch eine Teilgesamtheit von $G^{(a)}$ sein und durch Übertritte aus einer andern Teilgesamtheit entstehen. Befinden sich dann sowohl $G^{(a)}$ wie auch $G^{(i)}$ im relativen Beharrungszustand, so müssen beide Gesamtheiten stabil sein (Satz 5).

Im letzten Abschnitt wird auf den Begriff der «natürlichen» und der «verallgemeinerten natürlichen» Bevölkerung [1]) und seine Verallgemeinerung zunächst auf kontinuierliche Gesamtheiten und dann auf relativ-stationäre Bevölkerungen eingegangen und hierbei insbesondere eine für stabile Bevölkerungen charakteristische Struktur nachgewiesen. Während der Begriff der «verallgemeinerten natürlichen» Bevölkerung mit dem der absolut stationären zusammenfällt, sind

---

[1]) Siehe *Saxer W.* [1], insbesondere aber *Saxer W.* [2], Versicherungsmathematik, Erster Teil (Kapitel X, «Erneuerungstheorie»); Springer 1955.

stabile Bevölkerungen als «verallgemeinerte geometrische» Gesamtheiten charakterisiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass die angegebenen Sätze nicht notwendig die unbegrenzte oder unbestimmt lange Dauer des relativen Beharrungszustandes voraussetzen, sondern dass es genügt, diesen für ein bestimmtes Zeitintervall $[t_0, t_1]$ anzunehmen, eine Tatsache, welche den Geltungsbereich der gewonnenen Aussagen wesentlich erweitert.

Unsere Überlegungen gelten natürlich nicht nur für «Bevölkerungen» im wörtlichen Sinne, sondern allgemein für Gesamtheiten von Elementen, in denen eine «Altersstruktur» definiert werden kann sowie die über Eintritte und Austritte gemachten Voraussetzungen gelten.

INHALT

§ 1 Bezeichnungen und Grundformeln

Wir wenden in vorliegender Arbeit die kontinuierliche Methode an. Die vorkommenden Funktionen werden, falls notwendig, stetig und im gegebenen Falle differentiierbar vorausgesetzt, auch wenn dies nicht jedesmal ausdrücklich angegeben ist.

Es seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

x_0 = niedrigstes vorkommendes Alter;

u = höchstes vorkommendes Alter; der triviale Fall $u = x_0$ sei ausgeschlossen. Wir nehmen an, dass das Alter u tatsächlich erreicht wird, d.h. dass das Altersintervall $[x_0, u]$ abgeschlossen ist. Jedoch können unsere Überlegungen auch leicht auf den Fall ausgedehnt werden, in dem u der obere Grenzwert der vorkommenden Alter ist, selbst aber innerhalb der gegebenen Bevölkerung nicht angenommen wird.

$L(x;t)$ = zum Zeitpunkt t gehörige «Häufigkeitsfunktion» der Altersverteilung der Bevölkerung ($x_0 \leqq x \leqq u$). $L(x;t)$ möge sich auf die absolute Anzahl der zur Zeit t der gegebenen Bevölkerung angehörenden Personen beziehen [1]). $M(x;t) =$
$= \int_{x_0}^{x} L(\xi;t)d\xi$ ist dann die zugehörige «Verteilungsfunktion», d.h. die Anzahl der im Zeitpunkte t zur Bevölkerung gehörigen Personen, deren Alter kleiner oder gleich x ist. Die Häufigkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion einer Bevölkerung sind einander eindeutig zugeordnet; im folgenden werden wir uns auf die Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ beschränken.

$N(\xi,\tau)$ = der dem Alter ξ und dem Zeitpunkt τ entsprechende Wert der «Eintrittsfunktion».

$p(\xi,m)$ = Wahrscheinlichkeit, dass eine zu einem bestimmten Zeitpunkt τ einer gegebenen Bevölkerung zugehörige Person vom Alter ξ ebenfalls noch im Alter $\xi + m$ (d. h. zum Zeitpunkt $\tau + m$) der Bevölkerung angehört. $p(\xi,m)$ möge nur vom Alter ξ und dem Alter $\xi + m$ (d. h. von ξ und der Zeitdifferenz m) abhängen, nicht aber von den Zeitpunkten τ und $\tau + m$ als solchen. *Es sei $p(\xi,m) > 0$, falls ξ und $\xi + m$ in $[x_0,u]$ liegen.*

Obwohl die Ausscheideursachen keineswegs auf den Tod beschränkt sind, seien die in der Bevölkerung Verbliebenen «Überlebende» genannt.

Bestand im Zeitpunkt t_0 eine Anfangsgeneration und ist die abgelaufene Zeitspanne $t - t_0 \leqq x - x_0$ (x = erreichtes Alter im Zeitpunkt t), so setzt sich $L(x;t)$ aus Überlebenden der Anfangsgeneration und der Neueintritte wie folgt zusammen:

(1) $$L(x;t) = L(x - t + t_0; t_0)\, p(x - t + t_0, t - t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} N(x - t + \tau, \tau)\, p(x - t + \tau, t - \tau)\, d\tau .$$

---

[1]) Wir benutzen hier der Einfachheit des Ausdrucks halber den Begriff «Häufigkeitsfunktion», obwohl die zugehörige Gesamtzahl nicht – wie meist vorausgesetzt – gleich «1» ist.

Ist $t - t_0 > x - x_0$, so besteht $L(x;t)$ nur noch aus Überlebenden der Neueintritte, und es gilt:

$$(2) \qquad L(x;t) = \int_{t-x+x_0}^{t} N(x-t+\tau,\tau)\, p(x-t+\tau, t-\tau)\, d\tau,$$

oder auch

$$(3) \qquad L(x;t) = \int_{x_0}^{x} N(\xi, \xi - x + t)\, p(\xi, x-\xi)\, d\xi.$$

Es ist evident, dass zu einer gegebenen Anfangsgeneration und einer in $[x_0,u]$, $[t_0,t_1]$ definierten Eintrittsfunktion $N(\xi,\tau)$ eine eindeutig bestimmte Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ gehört. Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt die *zu einer in* $[t_0,t_1]$ *gegebenen Häufigkeitsfunktion gehörige Eintrittsfunktion* $N(\xi,\tau)$ *ebenfalls eindeutig bestimmt ist.*

Zunächst ist klar, dass eine (1) analoge Darstellung auch dann gilt, wenn man statt von der Anfangsgeneration zum Zeitpunkt t_0 von einer beliebigen Zwischengeneration zum Zeitpunkt t, $(t_0 < t < t_1)$, ausgeht. Insbesondere muss für jedes $h > 0$ mit $t_0 < t < t+h < t_1$ und jedes x, mit $x_0 \leqq x \leqq u - h$ die Beziehung gelten:

$$(4) \qquad L(x+h;t+h) = L(x;t)\, p(x,h) + \int_{t}^{t+h} N(x-t+\tau,\tau)\, p(x-t+\tau, t+h-\tau)\, d\tau.$$

Gäbe es eine zweite Eintrittsfunktion $\overline{N}(\xi,\tau)$, welche dieselbe Häufigkeitsfunktion $L(x+h;t+h)$ erzeugt, so müsste:

$$\int_{t}^{t+h} \{N(x-t+\tau,\tau) - \overline{N}(x-t+\tau,\tau)\}\, p(x-t+\tau, t+h-\tau)\, d\tau = 0,$$

und daher nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung $(h \to 0)$:

$$N(x,t) - \overline{N}(x,t) = 0.$$

Da x und t innerhalb der gegebenen Grenzen beliebig gewählt werden können, folgt die Behauptung.

Der *relative Beharrungszustand* einer Bevölkerung ist durch eine von t unabhängige Altersstruktur charakterisiert. Um möglichst allgemeine Ergebnisse zu erzielen, wollen wir keineswegs immer voraussetzen, dass ein solcher Zustand während einer unbestimmt oder genügend langen Zeit bestehe, sondern meist seine Gültigkeit nur während mindestens einer Zeitspanne $[t_0, t_1]$ annehmen.

Befindet sich eine Bevölkerung, die durch die Funktion $L(x;t)$ in $[x_0, u]$, $[t_0, t_1]$ nach Alter und Zeit definiert ist, dort im relativen Beharrungszustand, so gibt es nach Definition eine nur von t abhängige Funktion φ mit $\varphi(t_0) = 1$, so dass

$$L(x;t) = \varphi(t)\, L(x;t_0)$$

und ganz allgemein für je zwei t, t^* aus $[t_0, t_1]$:

$$L(x;t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t^*)} L(x;t^*) \qquad (x_0 \leqq x \leqq u).$$

Statt des Zeitpunktes t_0 kann natürlich jeder andere zwischen t_0 und t_1 gelegene als Bezugspunkt der entsprechenden Funktion φ gewählt werden.

Ist die Bevölkerung stabil, so ist:

$$\varphi(t) = e^{\varrho(t-t_0)}$$

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)}\, L(x;t_0),$$

wobei $\varrho = \varphi'(t_0)$ die konstante Wachstumsrate bedeutet.

§ 2 Eine notwendige und hinreichende Bedingung für stabile Bevölkerungen

Satz 1. Eine Bevölkerung ist dann und nur dann stabil, falls die Eintrittsfunktion eine zeitlich unveränderliche Altersstruktur und zugleich eine konstante Wachstumsrate besitzt, welche gleich der Wachstumsrate ϱ der Bevölkerung ist.

Der Satz besagt genauer folgendes:

a) Ist

$$(5)\qquad N(\xi,\tau) = e^{\varrho(\tau-t_0)}\,N(\xi,t_0),$$
$$x_0 \leqq \xi \leqq u,\; t_0 \leqq \tau \leqq t_1,$$

so gilt für gegebenes x spätestens nach dem Zeitpunkt $t_0 + x - x_0$ ($L(x;t)$ enthält dann keine Überlebende der Anfangsgeneration):

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t^*)}\,L(x;t^*),\quad t_0 + x - x_0 < t \leqq t_1,$$

wobei t^* irgendein Bezugspunkt in $(t_0 + x - x_0, t_1)$ ist.

b) Ist umgekehrt:

$$(6)\qquad L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)}\,L(x;t_0),$$
$$x_0 \leqq x \leqq u,\; t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

so folgt auch die Gültigkeit von (5) *in* $[x_0,u]$ *und im vollen Zeitintervall* $[t_0,t_1]$.

Es sei darauf hingewiesen, dass Satz 1 im Spezialfall des absoluten Beharrungszustandes ($\varrho = 0$) einen von *W. Saxer* aufgestellten Satz enthält, nach welchem die Anzahl und die Struktur nach Alter der pro Jahresanfang Neueintretenden einer absolut-stationären Bevölkerung eindeutig bestimmt und konstant sind, und umgekehrt eine sich erneuernde Gesamtheit mit einem jährlichen Neuzugang von konstanter Anzahl und Altersstruktur notwendig absolut-stationär wird [1]).

Beweis. Besteht $L(x;t+h)$ nur aus Überlebenden von Neueintritten, so gilt:

$$L(x;t+h) = \int_{t+h-x+x_0}^{t+h} N(x-t-h+\tau,\tau)\,p(x-t-h+\tau,t+h-\tau)\,d\tau.$$

Durch Transformation der Integrationsvariabeln: $\tau = \bar{\tau} + h$, erhält man (indem man statt $\bar{\tau}$ wieder τ schreibt):

$$(7)\qquad L(x;t+h) = \int_{t-x+x_0}^{t} N(x-t+\tau,\tau+h)\,p(x-t+\tau,t-\tau)\,d\tau.$$

---

[1]) *W. Saxer* [1], S. 235.

Setzt man nun die Gültigkeit von (5) voraus, so ist für gegebenes x und $t > t_0 + x - x_0$ und jedes feste zulässige h (falls $h < 0$, soll $t + h > t_0 + x - x_0$):

$$L(x; t+h) = \int_{t-x+x_0}^{t} e^{\varrho h} N(x-t+\tau,\tau)\, p(x-t+\tau, t-\tau)\, d\tau,$$

oder

$$L(x; t+h) = e^{\varrho h} L(x; t).$$

Für $t = t^*, h = t - t^*$, ergibt sich dann

$$L(x; t) = e^{\varrho(t-t^*)} L(x; t^*),$$

womit die Aussage a) des Satzes bewiesen ist.

Es sei nunmehr die Gültigkeit von (6) vorausgesetzt.

Wir wählen irgendein t und ein $h > 0$, mit $t_0 < t < t + h < t_1$. Einerseits gilt nach Voraussetzung:

$$L(x; t+h) = e^{\varrho(t-t_0)} L(x; t_0 + h) = e^{\varrho(t-t_0)} \{ L(x-h; t_0)\, p(x-h, h) + \\ + \int_{t_0}^{t_0+h} N(x-t_0-h+\tau,\tau)\, p(x-t_0-h+\tau, t_0+h-\tau)\, d\tau \}.$$

Andererseits berechnet sich $L(x; t+h)$ direkt aus

$$L(x; t+h) = L(x-h; t)\, p(x-h, h) + \\ + \int_{t}^{t+h} N(x-t-h+\tau,\tau)\, p(x-t-h+\tau, t+h-\tau)\, d\tau.$$

Durch Transformation der Integrationsvariabeln: $\tau = t - t_0 + \bar{\tau}$ (indem man dann wieder $\tau = \bar{\tau}$ schreibt) wird das letzte Integral gleich:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} N(x-t_0-h+\tau, t-t_0+\tau)\, p(x-t_0-h+\tau, t_0+h-\tau)\, d\tau.$$

Da ferner $L(x-h; t) = e^{\varrho(t-t_0)} L(x-h; t_0)$, ergibt sich:

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \{ N(x-t_0-h+\tau, t-t_0+\tau) - \\ e^{\varrho(t-t_0)} N(x-t_0-h+\tau,\tau) \}\, p(x-t_0-h+\tau, t_0+h-\tau)\, d\tau = 0.$$

Nach Anwendung des Mittelwertsatzes erhält man ($h \to 0$):

$$N(x,t) = e^{\varrho(t-t_0)} N(x,t_0).$$

Da x und t in den gegebenen Intervallen beliebig gewählt werden können, ist die Behauptung bewiesen.

§ 3 Allgemeine Bedingungen, unter denen eine relativ-stationäre Bevölkerung stabil ist

In den beiden folgenden Sätzen soll gezeigt werden, dass eine relativ-stationäre Bevölkerung unter gewissen Voraussetzungen notwendig auch stabil ist.

Satz 2. Eine Bevölkerung mit der Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ befinde sich im Zeitintervall $[t_0,t_1]$ im relativen Beharrungszustand. Ist dann die Altersstruktur der durch die Funktion $N(\xi,\tau)$ bestimmten Neueintritte in $x_0 \leqq \xi \leqq u$, $t_0 \leqq \tau \leqq t_1$ konstant, so ist die gegebene Bevölkerung in $[t_0,t_1]$ stabil.

Die Behauptung besagt, dass die gegebene Bevölkerung in $[t_0,t_1]$ eine konstante Wachstumsrate ϱ hat, woraus nach Satz 1 unmittelbar folgt, dass auch die Wachstumsrate der Eintritte konstant und gleich ϱ ist.

Beweis. Wir wählen irgendein t^* mit $t_0 < t^* < t_1$ als Bezugspunkt. Beschränkt man x auf $x < x^* = x_0 + t^* - t_0$, so setzt sich $L(x;t^*)$ nur aus Überlebenden von Neueintritten zusammen; das gleiche gilt erst recht für jedes $L(x;t)$ mit $t > t^*$.

Nach der Voraussetzung gibt es zwei Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ mit $\varphi(t^*) = \psi(t^*) = 1$, so dass

$$L(x;t+h) = \frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} L(x;t)$$

und

$$N(\xi,\tau+h) = \frac{\psi(\tau+h)}{\psi(\tau)} N(\xi,\tau).$$

Nun ist einerseits ($x_0 \leqq x < x^*$):

$$L(x;t+h) = \frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \int\limits_{t-x+x_0}^{t} N(x-t+\tau,\tau)\, p(x-t+\tau,t-\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Andererseits gilt (siehe (7)):

$$L(x;t+h) = \int_{t-x+x_0}^{t} N(x-t+\tau,\tau+h)\,p(x-t+\tau,t-\tau)\,d\tau\,,$$

d. h.

$$(9)\qquad L(x;t+h) = \int_{t-x+x_0}^{t} \frac{\psi(\tau+h)}{\psi(\tau)} N(x-t+\tau,\tau)\,p(x-t+\tau,t-\tau)\,d\tau\,.$$

Aus der Differenz der beiden Integrale (8) und (9) schliessen wir (indem wir zugleich $T = t - x + x_0$ setzen):

$$(10)\quad \int_{T}^{t} \left\{ \varphi(t+h) - \varphi(t)\,\frac{\psi(\tau+h)}{\psi(\tau)} \right\} N(x_0 - T + \tau,\tau)\,p(x_0 - T + \tau, t-\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Wendet man den Mittelwertsatz der Integralrechnung an (man kann ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit $N(x_0,t) > 0$ annehmen) und lässt $t \to T$ gehen, so erhält man $\dfrac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} = \dfrac{\psi(t+h)}{\psi(t)}$ und für $t = t^*$

$$\varphi(t^*+h) = \psi(t^*+h)\,.$$

Differentiiert man (10) nach t und wendet auf das Ergebnis nochmals den Mittelwertsatz an, ergibt sich als Grenzwert ($t = T = t^*$):

$$\varphi'(t^*+h) = \varphi'(t^*)\,\varphi(t^*+h)$$

und daher:

$$\varphi(t^*+h) = \psi(t^*+h) = e^{\varrho h}\,, \qquad \varrho = \varphi'(t^*)\,.$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur für $x < x^* = x_0 + t^* - t_0$, $t^* + h < t_1$; da aber φ und ψ von x unabhängig sind, gilt sie ganz allgemein für alle x in $[x_0,u]$. Beachtet man ferner, dass t^* beliebig nahe an t_0 gewählt werden kann, und setzt man zugleich die Stetigkeit von φ und ψ auch in den Grenzpunkten voraus, erhält man schliesslich für $t^* = t_0$ und $h = t - t_0$:

$$\varphi(t) = \psi(t) = e^{\varrho(t-t_0)}\,, \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1\,,$$

w. z. b. w.

In den §§ 4 und 5 werden zwei interessante Folgerungen aus obigem Satze abgeleitet.

Satz 3. Eine Bevölkerung mit der Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ befinde sich im Zeitintervall $[t_0,t_1]$ im relativen Beharrungszustand. Enthält das zugehörige Altersintervall $[x_0,u]$ ein von t unabhängiges, sonst beliebig kleines Teilintervall I derart, dass für jedes t alle Eintrittsalter ausserhalb I liegen, so ist die gegebene Bevölkerung stabil.

Nach Satz 1 folgt wieder unmittelbar, dass auch die Eintrittsfunktion dieselbe Wachstumsrate wie die gegebene Bevölkerung und zudem eine konstante Altersstruktur besitzt.

Beweis. Unter der Voraussetzung des Satzes gibt es zu jedem festen t^*, $t_0 < t^* < t_1$, ein t^{**}, $t^* < t^{**} < t_1$, und ein ganz in I enthaltenes Intervall $[x_1,x_2]$, so dass $L(x+h;t+h)$ in $[x_1,x_2]$, $[t^*,t^{**}]$ nur aus Überlebenden von $L(x;t)$ besteht (h genügend klein), d.h.

$$L(x+h;t+h) = L(x;t)\,p(x,h). \tag{11}$$

Es muss ferner eine Funktion $\varphi(t), \varphi(t^*) = 1$, geben, so dass

$$L(x+h;t+h) = \varphi(t+h)\,L(x+h;t^*).$$

Aus (11) folgt, dass gleichzeitig:

$$\begin{aligned} L(x+h;t+h) = \varphi(t)\,L(x;t^*)\,p(x,h) &= \varphi(t)\,L(x+h;t^*+h) = \\ &= \varphi(t)\,\varphi(t^*+h)\,L(x+h;t^*). \end{aligned}$$

Es muss demnach gelten:

$$\varphi(t+h) = \varphi(t)\,\varphi(t^*+h).$$

Zieht man auf beiden Seiten $\varphi(t)$ ab und dividiert durch h (man beachte $\varphi(t^*) = 1$), so erhält man im Grenzübergang $\varphi'(t) = \varphi(t)\,\varphi'(t^*)$ und hieraus:

$$\varphi(t) = e^{\varrho(t-t^*)}, \qquad \varrho = \varphi'(t^*), \quad t^* \leqq t \leqq t^{**}.$$

Da t^* in (t_0,t_1) beliebig gewählt werden kann, folgt schliesslich unter der Voraussetzung der Stetigkeit der vorkommenden Funktionen in den Endpunkten ganz allgemein:

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)}\,L(x;t_0), \qquad x_0 \leqq x \leqq u, \quad t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

w.z.b.w.

Die Voraussetzung von Satz 3 ist z.B. stets dann erfüllt, wenn das höchste Eintrittsalter kleiner als das höchste Austrittsalter ist, eine Annahme, die man in den Berechnungen der Pensionsversicherung fast immer zu machen pflegt. Der am meisten interessierende Fall ist die Beschränkung der Eintritte auf die Geburten. *Demnach ist eine relativ-stationäre Bevölkerung, in welcher andere Eintritte als die durch Geburt vernachlässigt werden können und die Verbleibenswahrscheinlichkeiten zeitlich unverändert sind, notwendig stabil.* Zusammenfassend können wir sagen, dass im allgemeinen in den direkt interessierenden Fällen der relative Beharrungszustand auch die Stabilität der gegebenen Bevölkerung bedingt. Ist umgekehrt eine relativ-stationäre Bevölkerung in keinem Teilintervall von $[t_0,t_1]$ stabil, so müssen die Eintritte sich stets über das volle Altersintervall $[x_0,u]$ verteilen.

§ 4 Relativ-stationäre Bevölkerungen mit konstanter relativer Verteilung nach Verbleibensdauer

In vorliegendem Abschnitt setzen wir voraus, dass die gegebene relativ-stationäre Bevölkerung schon so lange als solche existiert, dass sie zu keinem von uns betrachteten Zeitpunkt noch Überlebende einer eventuellen Anfangsgeneration enthält.

Die Leistungen der Sozialversicherung hängen oft von der Versicherungsdauer ab. Wenn man daher bezüglich eines Sozialversicherungssystems vom Beharrungszustand spricht, wird meist auch die Gleichverteilung nach der Versicherungszeit für jedes Alter vorausgesetzt. Da nun im *absoluten Beharrungszustand* einer Bevölkerung die auf eine bestimmte Zeiteinheit bezogene Anzahl und die Altersverteilung der Eintritte konstant bleiben und daher – wie unmittelbar einzusehen ist – für jedes Alter auch die Unveränderlichkeit der Verteilung nach der Verbleibensdauer der Bevölkerung stets gewährleistet ist, braucht diese nicht ausdrücklich vorausgesetzt zu werden.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass das gleiche auch für stabile, und zwar *nur* für stabile Bevölkerungen gilt, wobei ja obiger Spezialfall des absoluten Beharrungszustandes mit einbegriffen ist.

Zunächst erkennt man, *dass in einer stabilen Bevölkerung die relative Verteilung nach Verbleibensdauer notwendig von der Zeit unabhängig ist.* In der Tat, es sei x das erreichte Alter, und m die Verbleibensdauer im Zeitpunkt t; dann stellt

$$A(x,m;t) = N(x-m,t-m)\,p(x-m,m)$$

die Häufigkeitsfunktion nach den *beiden* Veränderlichen x und m im Zeitpunkt t dar. Im Zeitpunkt $t+h$ gilt entsprechend:

$$A(x,m;t+h) = N(x-m,t+h-m)\,p(x-m,m)\,.$$

Ist die Bevölkerung stabil, so muss nach Satz 1:

$$N(x-m,t+h-m) = e^{\varrho h}\,N(x-m,t-m)$$

also auch:

$$A(x,m;t+h) = e^{\varrho h} A(x,m;t)\,.$$

Da der Wachstumsfaktor $e^{\varrho h}$ unabhängig von x und m ist, folgt unmittelbar die gewünschte Tatsache.

Wir beweisen nun die Umkehrung:

Satz 4. Ist in einer relativ-stationären Bevölkerung die relative Verteilung nach Verbleibensdauer jeweils für jedes vorgegebene Alter zeitlich konstant, so ist die Bevölkerung stabil.

Beweis. Es sei $L(x;t)$ die Häufigkeitsfunktion der gegebenen Bevölkerung nach dem Alter x zum Zeitpunkt t, $A(x,m;t)$ die Häufigkeitsfunktion nach den beiden Variabeln x und m, ferner $N(\xi,\tau)$ die Eintrittsfunktion. Nach Voraussetzung gibt es eine von x unabhängige Funktion φ, $\varphi(t_0) = 1$, so dass:

$$L(x;t+h) = \frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}\,L(x;t)\,,$$

und ferner bei zunächst *festgehaltenem* x eine Funktion ψ, $\psi(t_0) = 1$, so dass:

$$A(x,m;t+h) = \frac{\psi(t+h)}{\psi(t)}\,A(x,m;t)$$

und daher auch:

$$N(x-m,t+h-m) = \frac{\psi(t+h)}{\psi(t)}\,N(x-m,t-m)\,.$$

Integriert man bei festem x beide Seiten der vorletzten Gleichung über alle m, $0 \leqq m \leqq x - x_0$, erhält man

$$L(x;t+h) = \frac{\psi(t+h)}{\psi(t)} L(x;t),$$

woraus sich unmittelbar $\varphi = \psi$ und insbesondere die Unabhängigkeit der Funktion ψ von x ergibt. Dann aber ist auch $N(x-m, t+h-m) = \frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} N(x-m, t-m)$. Es folgt die Konstanz der Altersstruktur der Eintritte und schliesslich aus Satz 2 die Behauptung.

§ 5 Relativ-stationäre Bevölkerungen mit aus ihnen enstehenden Nebengesamtheiten

Es sei eine offene Bevölkerung $G^{(a)}$ gegeben. Mit ihr sei eine zweite Gesamtheit $G^{(i)}$ derart verbunden, dass die Eintritte in $G^{(i)}$ gleich den Austritten aus $G^{(a)}$ sind, die einer bestimmten, vom Tod verschiedenen Ausscheideursache (i) entsprechen, oder auch dass $G^{(i)}$ eine Teilgesamtheit von $G^{(a)}$ ist, die durch Übertritte aus einer andern Teilgesamtheit entsteht, welche von einer bestimmten Ursache (i) ausgelöst werden. Wir nennen $G^{(i)}$ eine $G^{(a)}$ zugeordnete Nebengesamtheit. Die Intensitäten des Ausscheidens oder der Übertritte nach der Ursache (i) mögen in $G^{(a)}$ nur vom erreichten Alter, und die Verbleibenswahrscheinlichkeiten in $G^{(i)}$ ebenfalls nur von den zugehörigen Altern abhängen.

Ein wichtiges Beispiel einer Nebengesamtheit bildet die aus einer gegebenen aktiven Bevölkerung erzeugte Gesamtheit der Invaliden.

Befindet sich $G^{(a)}$ im relativen Beharrungszustand, d.h. gibt es eine Funktion $\varphi(t)$, $\varphi(t_0) = 1$, so dass

$$L(x;t) = \varphi(t) L(x;t_0),$$

so besitzt notwendig auch die Eintrittsfunktion $N^{(i)}(x,t)$ der Gesamtheit $G^{(i)}$ eine konstante Altersstruktur, und zwar muss ebenfalls $N^{(i)}(x,t) = \varphi(t) N^{(i)}(x,t_0)$ sein.

Setzt man zusätzlich die Gesamtheit $G^{(i)}$ relativ-stationär voraus, so ist $G^{(i)}$ nach Satz 2 notwendig stabil. Insbesondere ist $\varphi(t) = e^{\varrho(t-t_0)}$, dann aber auch

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)}\, L(x;t_0)\,.$$

Wir haben also bewiesen:

Satz 5. Befinden sich sowohl die Grundbevölkerung $G^{(a)}$ wie auch die Nebengesamtheit $G^{(i)}$ im relativen Beharrungszustand, so sind beide Gesamtheiten stabil.

Wie man sich leicht überzeugt, lassen sich obige Überlegungen und Aussagen unter gewissen Bedingungen etwa auf eine Witwengesamtheit, die durch Tod aus einer gegebenen Grundgesamtheit erzeugt wird, oder auf ähnliche Nebengesamtheiten ausdehnen.

§ 6 Natürliche Gesamtheiten und ihre Verallgemeinerungen

Wir betrachten zunächst zu einem fest gegebenen Zeitpunkt eine *diskontinuierliche*, nach ganzzahligen Altern geordnete Bevölkerung:

$$L_{x_0+k}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, u - x_0\,.$$

$\{l_{x_0+k}\}$ sei eine den gegebenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten zugehörige Ausscheideordnung. Nach *W. Saxer* [1]) wird die Bevölkerung eine *natürliche* genannt, falls sie die gleiche Altersstruktur wie die Ausscheideordnung l_{x_0+k} besitzt, d.h. falls es eine Konstante c_0 gibt, so dass

$$L_{x_0+k} = c_0\, l_{x_0+k}\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, u - x_0\,.$$

Handelt es sich nunmehr um eine *offene* Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand – wobei wir annehmen, dass die Abgänge zu Ende des Jahres stattfinden und sofort durch Neuzugänge ersetzt werden –, so ist die Zahl der jährlichen Zugänge konstant und gleich $L_{x_0} = c_0\, l_{x_0}$. Insbesondere beschränken sich die Eintritte auf das Alter x_0.

---

[1]) *Saxer W.* [1], S. 236; insbesondere aber *Saxer W.* [2]. Der erste Teil dieses Abschnittes, soweit er sich auf diskontinuierliche Gesamtheiten bezieht, folgt mit einigen Erweiterungen der Darstellung von *W. Saxer*.

Eine Erweiterung dieses Begriffes ist die *verallgemeinerte natürliche Bevölkerung*, worunter das «Überlagerungsergebnis von endlich vielen natürlichen Gesamtheiten mit der gleichen Altersstruktur, aber mit verschiedenen Anfangsaltern und verschiedenen Gewichten» verstanden wird [1]).

Die Eigenschaft, eine verallgemeinerte natürliche Bevölkerung zu sein, ist charakteristisch für eine Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand.

Eine diskontinuierliche verallgemeinerte natürliche Gesamtheit lässt sich wie folgt darstellen:

$$(12) \qquad L_x = l_x \sum_{\xi=x_0}^{x} c_\xi, \qquad c_\xi \geqq 0; \; x = x_0, \ldots, u,$$

wobei wir c_ξ als «Gewicht» der dem Alter ξ als Anfangsalter zugeordneten natürlichen Teilgesamtheit ansehen können. Betrachtet man eine *offene* verallgemeinerte natürliche Bevölkerung – oder, was dasselbe bedeutet, eine Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand –, so ist der jährliche Neuzugang für jedes Eintrittsalter ξ konstant und gleich $\lambda_\xi = c_\xi l_\xi$.

Um obigen Begriff auch auf Gesamtheiten mit kontinuierlicher Häufigkeits- und Eintrittsfunktion ausdehnen zu können, schreiben wir (12) in der allgemeineren Form:

$$(12a) \qquad L_x = l_x g(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq u,$$

wobei $g(x)$ eine nicht negative, nirgends abnehmende Funktion ist.

Ist L_x nur für ganzzahlige x definiert und $g(x)$ eine diskontinuierliche «Treppenfunktion», so erhält man wieder (12). Wir wollen zeigen, dass *falls $g(x)$ differentiierbar ist und $g(x_0) = 0$, die Gleichung* (12a) *die Struktur einer durch eine kontinuierliche Häufigkeitsfunktion und eine ebensolche Eintrittsfunktion bestimmte Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand charakteriisert* [2]).

Zunächst sei eine offene Bevölkerung im absoluten Beharrungszustand mit der kontinuierlichen Häufigkeitsfunktion $L(x;t) = L(x)$, $x_0 \leqq x \leqq u$, und der kontinuierlichen Eintrittsfunktion $N(\xi,\tau) = N(\xi)$

---

[1]) *Saxer W.* [2], S. 196.

[2]) In *W. Saxer* [1], S. 233/234 (Satz 1) findet sich der Beweis dieser Tatsache in einer etwas andern Form für diskontinuierliche Gesamtheiten.

gegeben. Es gilt (wir setzen keine Überlebende einer eventuellen Anfangsgeneration voraus):

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} N(\xi)\, p(\xi, x-\xi)\, d\xi .$$

Ist dann l_x die *kontinuierliche* Ausscheideordnung, so wird:

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} N(\xi) \frac{l_x}{l_\xi}\, d\xi = l_x \int_{x_0}^{x} \frac{N(\xi)}{l_\xi}\, d\xi = l_x g(x) ,$$

wobei $g(x)$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Umgekehrt sei eine Funktion

$$L(x) = l_x g(x) , \qquad x_0 \leqq x \leqq u ,$$

gegeben, wobei $g(x)$ eine nicht negative, differentiierbare und nirgends abnehmende Funktion sei und $g(x_0) = 0$. Wir werden zeigen, dass sich hierzu eindeutig eine Eintrittsfunktion $N(\xi, \tau) = N(\xi)$ bestimmen lässt, so dass $L(x) = L(x;t)$ als Häufigkeitsfunktion eine absolut stationäre Gesamtheit definiert.

In der Tat genügt es,

$$N(\xi) = g'(\xi)\, l_\xi \geqq 0$$

zu setzen, und es wird:

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} l_x g'(\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} N(\xi) \frac{l_x}{l_\xi}\, d\xi$$

$$= \int_{x_0}^{x} N(\xi)\, p(\xi, x-\xi)\, d\xi .$$

Da zu jeder zeitlich konstanten Eintrittsfunktion eine absolut stationäre Bevölkerung gehört, wird eine solche durch diese Gleichung definiert. Ferner ist nach § 1 die Eintrittsfunktion $N(\xi)$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen jetzt den Begriff der verallgemeinerten natürlichen Gesamtheit auch auf Bevölkerungen im *relativen Beharrungszustand* ausdehnen und werden dabei zu *einer die Struktur einer stabilen Bevölkerung eindeutig charakterisierenden Darstellung gelangen.*

Es sei demnach eine Bevölkerung im relativen Beharrungszustand mit der Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ gegeben ($x_0 \leqq x \leqq u$). Sind die Eintritte zunächst auf das eine Alter x_0 beschränkt, so ist nach Satz 3 die Bevölkerung stabil, d.h. sie besitzt eine konstante Wachstumsrate ϱ, und es gilt:

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)} L(x;t_0) = e^{\varrho(t-t_0)} l_x e^{-\varrho x} c_0 e^{\varrho x_0}.$$

Bevölkerungen dieser Struktur werden auch «*geometrische*» genannt [1]). Hierbei ist $e^{\varrho(t-t_0)}$ der vom Alter x unabhängige Wachstumskoeffizient der Bevölkerung, und $l_x e^{-\varrho x}$ charakterisiert die zeitlich konstante Altersstruktur von ebenfalls «geometrischem» Typus.

Wir wollen in Analogie zur verallgemeinerten natürlichen Bevölkerung eine *verallgemeinerte geometrische Bevölkerung* als eine solche definieren, deren Häufigkeitsfunktion durch eine Gleichung des folgenden Typus gegeben ist:

$$(13) \qquad L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)} l_x e^{-\varrho x} g(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq u,$$

wobei $g(x)$ eine nicht negative, nirgends abnehmende Funktion sei. Wir setzen ferner voraus, entweder dass $L(x;t)$ nur für ganzzahlige x definiert und $g(x)$ eine diskontinuierliche «Treppenfunktion» sei –, dann erhalten wir eine diskontinuierliche verallgemeinerte geometrische Gesamtheit – oder aber dass $L(x;t)$ kontinuierlich und $g(x)$ eine differentiierbare Funktion sei mit $g(x_0) = 0$. (Für $\varrho = 0$ erhält man eine verallgemeinerte natürliche Gesamtheit.)

Wir können uns im folgenden auf den kontinuierlichen Fall beschränken.

Zunächst ist evident, dass eine stabile Bevölkerung eine Häufigkeitsfunktion dieser Art besitzt. In der Tat, falls $N(\xi,\tau)$ die Eintrittsfunktion einer solchen Bevölkerung bedeutet und diese keine Überlebende der Anfangsgeneration mehr enthält, so gilt (man beachte Satz 1):

---

1) *Saxer W.* [2], S.209.

$$L(x;t) = e^{\varrho(t-t_0)} L(x;t_0) = e^{\varrho(t-t_0)} \int_{x_0}^{x} N(\xi,\xi - x + t_0)\, p(\xi,x-\xi)\, d\xi$$

$$= e^{\varrho(t-t_0)} \int_{x_0}^{x} N(\xi,t_0)\, e^{\varrho(\xi-x)} \frac{l_x}{l_\xi}\, d\xi$$

$$= e^{\varrho(t-t_0)}\, l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x),$$

wobei

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{N(\xi,t_0)}{l_\xi} e^{\varrho\xi}\, d\xi$$

die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Es sei umgekehrt eine Häufigkeitsfunktion vom Typus (13) gegeben. Es soll bewiesen werden, dass sie tatsächlich eine offene Bevölkerung (mit nur von den betreffenden Altern abhängigen Verbleibenswahrscheinlichkeiten) definiert, welche dann notwendig stabil ist. Es genügt zu zeigen, dass es eine die gegebene Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ erzeugende Eintrittsfunktion gibt. Hierzu wählen wir, was stets möglich ist:

$$N(\xi,\tau) = l_\xi\, g'(\xi)\, e^{-\varrho\xi} e^{\varrho(\tau-t_0)} \geqq 0 .$$

Es wird:

$$\int_{x_0}^{x} N(\xi,\xi - x + t)\, p(\xi,x-\xi)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} g'(\xi)\, e^{-\varrho\xi} e^{\varrho(\xi-x+t-t_0)}\, l_x\, d\xi$$

$$= e^{\varrho(t-t_0)}\, l_x\, e^{-\varrho x}\, g(x).$$

$N(\xi,\tau)$ erzeugt demnach $L(x;t)$ und ist nach § 1 die einzige $L(x;t)$ zugeordnete Eintrittsfunktion.

Wir haben also bewiesen: *Eine stabile Bevölkerung besitzt eine Häufigkeitsfunktion vom Typus* (13), *und umgekehrt gehört zu einer solchen Häufigkeitsfunktion stets eine eindeutig sie erzeugende Eintrittsfunktion, d.h. jede Häufigkeitsfunktion vom Typus* (13) *definiert eine stabile Bevölkerung.*

Das angewandte Verfahren zeigt zugleich, dass keineswegs zu einer beliebig vorgegebenen Häufigkeitsfunktion $L(x;t)$ auch wirklich eine offene Bevölkerung gehört, deren Ablauf durch Neueintritte und durch nur von den zugehörigen Altern abhängige Verbleibenswahrscheinlichkeiten bestimmt ist.