Ein Beitrag zum Stieltjesschen Integralbegriff

Autor(en): **Hüsser, Rudolf / Nef, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966805

Ein Beitrag zum Stieltjesschen Integralbegriff

Von *Rudolf Hüsser* und *Walter Nef*, Bern

Unserem verehrten Lehrer und Kollegen
Prof. Dr. Arthur Alder
zu seinem 60. Geburtstag freundlichst gewidmet

1. Einleitung

Die wachsende Bedeutung, die dem Stieltjesschen Integralbegriff zuteil wird, beruht u. a. auf der Tatsache, dass mit seiner Hilfe in vielen Fällen dem mathematischen Gehalt nach verwandte, aber formal verschiedene Tatbestände einer einheitlichen formelmässigen Darstellung zugänglich gemacht werden können.

In der theoretischen Wahrscheinlichkeitsrechnung mit ihren Anwendungen in der mathematischen Statistik, der Versicherungsmathematik, in der Atomphysik, Chemie, Biologie, usw., hat sich der Stieltjessche Integralbegriff als besonders fruchtbar und erfolgreich erwiesen, weil damit eine und dieselbe formelmässige Darstellung einer Gesetzmässigkeit sowohl für diskrete wie auch für kontinuierliche Wertebereiche der unabhängigen Veränderlichen erreicht wird. Diese Verallgemeinerung, wie auch die Einführung einer unter gewissen Bedingungen frei wählbaren Belegungs- oder Gewichtsfunktion erforderte entsprechend erweiterte Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Im Zusammenhang mit der Arbeit von R. Hüsser [3] [1]) soll im folgenden ein solcher Existenzsatz für Stieltjes-Integrale über mehrdimensionalen Bereichen hergeleitet werden.

2. Definition des Riemann-Stieltjes Integrals

Voraussetzungen

1. B sei ein Bereich im n-dimensionalen euklidischen Raum R_n.
2. $\mathfrak{M}$ sei ein System von Punktmengen mit folgenden Eigenschaften:

---

[1]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

a) $\mathfrak{M}$ bilde einen Mengenkörper [1]),

b) zu einem beliebigen Punkt $x \in B$ und gegebener, reeller Zahl $D > 0$ existiere eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige Umgebung $U(x)$ mit dem Durchmesser $\delta[U(x)] < D$ [2]).

Mit Hilfe des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes ist dann leicht einzusehen, dass endlich viele, paarweise disjunkte Punktmengen $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{M}$ existieren, die eine Überdeckung $\mathfrak{Z}$ von B bilden und deren Durchmesser $\delta[X_\mu] < D$ sind.

3. $F(X)$ sei eine auf $\mathfrak{M}$ definierte, reelle und additive Funktion von beschränkter Schwankung ([3], S. 58).

Ferner existiere zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine reelle Zahl $D_1 > 0$, sodass folgende «Randbedingung» erfüllt ist: [3])

Hat jede der (beliebigen) Mengen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ $(r \geqq m)$ einen Durchmesser $\delta[Z_\varrho] < D_1$ und einen gemeinsamen Punkt sowohl mit B als auch mit der Komplementärmenge $C(B)$, sind schliesslich die Mengen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r \in \mathfrak{M}$ paarweise disjunkt und ist $Y_\varrho \subset Z_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$, dann wird

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \left| F(Y_\varrho) \right| < \varepsilon' . \quad ^{4)} \tag{1}$$

4. $\varphi(x)$ sei eine stetige Funktion des Punktes $x \in B$.

In jeder der Mengen X_μ einer endlichen, disjunkten Überdeckung von B wählen wir nun einen beliebigen Punkt $x_\mu \in (X_\mu \cap B)$ und bilden die Summe

$$S = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu)\, F(X_\mu) . \tag{2}$$

Dann gilt folgende

---

[1]) Für weitere Erläuterungen und Definitionen sei auf die Abhandlung [3], Seiten 56–58, verwiesen.

[2]) Dies bedeutet offenbar, dass $\mathfrak{M}$ zu jedem $x \in B$ eine Umgebungsbasis enthält.

[3]) Obenstehende «Randbedingung» erübrigt sich, wenn der Bereich B selber zum Mengenkörper $\mathfrak{M}$ gehört (vgl. Seite 172).

[4]) Diese «Randbedingung» wurde zur Vereinfachung des Beweises etwas anders formuliert als in [3]. Es ist jedoch leicht einzusehen, dass die obenstehende Fassung aus derjenigen in der zitierten Arbeit folgt. Der hier bewiesene Satz ist also allgemeiner als jener in [3].

Definition und Behauptung

Der Grenzwert $\lim\limits_{D\to 0} \sum\limits_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(X_\mu) = \int\limits_B \varphi(x)\, dF$ (3)

wird Stieltjes Integral von $\varphi(x)$ bezüglich F über B genannt, existiert und ist von der Art der Überdeckung des Bereiches B durch die m disjunkten Punktmengen X_μ, wie auch von der Wahl der Punkte $x_\mu \in (X_\mu \cap B)$ unabhängig.

3. Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis

Wir führen den Beweis in zwei Stufen durch und sprechen mit Hilfe der Summe

$$S^* = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \varphi(x_{\mu,\nu}) F(X_{\mu,\nu}), \quad \text{mit } x_{\mu,\nu} \in (X_{\mu,\nu} \cap B),$$

die zur verfeinerten Überdeckung $\mathfrak{Z}^*$ [1]) von B gehört, vorerst einen *Hilfssatz* aus.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine reelle Zahl $D_2 > 0$, sodass $|S - S^*| < \varepsilon$ wird, wenn das Feinheitsmass [2]) $\delta[\mathfrak{Z}] < D_2$ und $\mathfrak{Z}^*$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ ist.

Beweis: $$S - S^* = \sum_{\mu=1}^{m} \left| \varphi(x_\mu) F(X_\mu) - \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \varphi(x_{\mu,\nu}) F(X_{\mu,\nu}) \right| =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \left| \varphi(x_\mu) F(X_\mu) - \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \varphi(x_{\mu,\nu}) F(X_{\mu,\nu}) + \varphi(x_\mu) F(Y_\mu) \right\} \right| +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(Y_\mu). \text{ [3])}$$

$$S - S^* = K + L. \tag{4}$$

[1]) Eine Überdeckung $\mathfrak{Z}^*$ heisst feiner als $\mathfrak{Z}$, wenn jede Menge $X_{\mu,\nu} \in \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{Z}^*$ Teilmenge einer Menge X_μ von $\mathfrak{Z}$ ist ($\mu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots, n_\mu$).

[2]) Als Feinheitsmass $\delta[\mathfrak{Z}]$ einer Überdeckung $\mathfrak{Z}$ von B definieren wir das Maximum aller Durchmesser der Überdeckungsmengen X_μ:

$$\delta[\mathfrak{Z}] = \max_{\mu = 1, 2, \ldots, m} \delta[X_\mu]$$

[3]) Die Mengen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \in \mathfrak{M}$ sind dadurch definiert, dass sie zu B disjunkt sind und die Beziehungen

$$X_\mu = \left(\bigcup_{\nu=1}^{n_\mu} X_{\mu,\nu} \right) \cup Y_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllen.

Abschätzung von K

$$K = \sum_{\mu=1}^{m} \left| \varphi(x_\mu) F(X_\mu) - \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \varphi(x_{\mu,\nu}) F(X_{\mu,\nu}) + \varphi(x_\mu) F(Y_\mu) \right\} \right| . \tag{5}$$

Wegen der in Abschnitt 2 vorausgesetzten Additivität von F auf $\mathfrak{M}$ folgt aus der Relation in Fussnote [3]) auf Seite 169:

$$F(X) = F\left[\left(\bigcup_{\nu=1}^{n_\mu} X_{\mu,\nu} \right) \cup Y_\mu \right] = \sum_{\nu=1}^{n_\mu} F(X_{\mu,\nu}) + F(Y_\mu) .$$

Wir ersetzen $F(X_\mu)$ in (5) durch diesen Ausdruck und erhalten

$$K = \sum_{\mu=1}^{m} \left| \varphi(x_\mu) \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\mu} F(X_{\mu,\nu}) + F(Y_\mu) \right\} - \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_\mu} \varphi(x_{\mu,\nu}) F(X_{\mu,\nu}) + \varphi(x_\mu) F(Y_\mu) \right\} \right| =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} [\varphi(x_\mu) - \varphi(x_{\mu,\nu})] F(X_{\mu,\nu}) .$$

Nach Voraussetzung 4 (Abschnitt 2) ist $\varphi(x)$ auf B stetig. Da der Bereich B abgeschlossen ist, folgt die gleichmässige Stetigkeit von $\varphi(x)$ auf B; d. h. zu jedem $\varepsilon' > 0$ existiert eine reelle Zahl $D_3 > 0$, sodass $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon'$ wird, wenn nur der Abstand $d(x_1, x_2) < D_3$ ist.

Wählen wir die Feinheit der Überdeckung $\mathfrak{Z}$ so, dass $\delta[\mathfrak{Z}] < D_3$ ist, dann gilt also $|\varphi(x_\mu) - \varphi(x_{\mu,\nu})| < \varepsilon'$, für alle $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = 1, 2, \ldots, n_\mu$. Somit ist

$$|K| \leqq \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} |\varphi(x_\mu) - \varphi(x_{\mu,\nu})| \, |F(X_{\mu,\nu})| < \varepsilon' \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n_\mu} |F(X_{\mu,\nu})| ,$$

und wegen der Voraussetzung, dass $F(X)$ von beschränkter Schwankung ist, gilt

$$|K| < \varepsilon' M , \quad \text{falls } \delta[\mathfrak{Z}] < D_3 . \tag{6}$$

Abschätzung von L

$$L = \sum_{\mu=1}^{m} \varphi(x_\mu) F(Y_\mu) .$$

Wieder stützen wir uns auf die Voraussetzung, $\varphi(x)$ sei im abgeschlossenen Bereich B stetig. Demnach besitzt $\varphi(x)$ auf B ein (endliches) Maximum $|\varphi(x)| \leqq N$. Die Abschätzung lautet deshalb

$$|L| \leqq \sum_{\mu=1}^{m} |\varphi(x_\mu)| \, |F(Y_\mu)| \leqq N \sum_{\mu=1}^{m} |F(Y_\mu)| ,$$

und mit Berücksichtigung der «Randbedingung» (1) folgt

$$|L| < \varepsilon' N, \text{ falls } \delta[\mathfrak{Z}] < D_1.\,^{1)} \tag{7}$$

Durch Zusammenfassung von (6) und (7) ergibt sich nach (4)

$$|S - S^*| \leqq |K| + |L| < \varepsilon'(M + N);$$

wählt man nun $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M+N}$ und $D_2 = \text{Min}\,(D_1, D_3)$, so wird also $|S - S^*| < \varepsilon$, falls $\delta[\mathfrak{Z}] < D_2$ ist, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

In dieser ersten Stufe haben wir die erforderlichen Hilfsmittel in passender Form bereitgestellt und treten nun an den eigentlichen

Beweis der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage

Es bleibt zu beweisen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine reelle Zahl $D > 0$, sodass $|S_1 - S_2| < \varepsilon$ ist, falls die Feinheitsmasse der beiden Überdeckungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ den Bedingungen $\delta[\mathfrak{Z}_1] < D$ und $\delta[\mathfrak{Z}_2] < D$ genügen. Dabei bedeuten S_1 und S_2 die gemäss (2) gebildeten Summen zu den Überdeckungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$.

Nach dem Hilfssatz existiert eine reelle Zahl $D_2 > 0$, sodass aus $\delta[\mathfrak{Z}_1] < D_2$ und $\delta[\mathfrak{Z}_2] < D_2$ folgt

$$|S_1 - S^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |S_2 - S^*| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wenn S^* die zu einer gemeinsamen Verfeinerung $\mathfrak{Z}^*$ von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ gehörige Summe ist. Eine solche gemeinsame Verfeinerung gibt es stets; beispielsweise als Überdeckung mit den Durchschnittsmengen der Überdeckungen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$. Es ist also

$$|S_1 - S_2| \leqq |S_1 - S^*| + |S_2 - S^*| < \varepsilon,$$

falls nur $\delta[\mathfrak{Z}_1]$, $\delta[\mathfrak{Z}_2] < D_2$ sind.

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit des Grenzwertes (3) nachgewiesen.

---

[1]) Für die Werte von μ, für welche $X_\mu \subset B$ ist, ist ja $Y_\mu = 0$, also auch $F(Y_\mu) = 0$.

Anmerkung: Der vorstehende Beweis lässt sich bedeutend vereinfachen, wenn der Bereich B selber zum Mengenkörper $\mathfrak{M}$ gehört. Ersetzt man nämlich in einer Überdeckung $\mathfrak{Z}$ jede Menge X_μ durch $X_\mu \cap B = X'_\mu$, so ist wieder $X'_\mu \in \mathfrak{M}$ und man erhält eine modifizierte Überdeckung $\mathfrak{Z}'$ mit der Eigenschaft

$$B = \bigcup_{\mu=1}^{m} X'_\mu \,.$$

Bei einer Verfeinerung von $\mathfrak{Z}'$ treten jetzt die Mengen Y_μ nicht mehr auf, da die X'_μ nicht über B hinausragen. Der Beweis des Hilfssatzes reduziert sich auf die Abschätzung von K, und in der Voraussetzung 3 auf Seite 168 kann die «Randbedingung» weggelassen werden.

4. Anwendungsbeispiele

Zur Veranschaulichung des in der Einleitung dargelegten Sachverhaltes wollen wir auf folgendes Beispiel aus der Versicherungsmathematik näher eintreten.

Es seien sowohl l_{x+t} (= Anzahl der Überlebenden des Alters $x+t$) wie auch $v(t)$ (= verallgemeinerte, d.h. von der Zeit t abhängige Abzinsungsfunktion) als zwei stetige Funktionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen t vorausgesetzt. Dann ist auch $\varphi(t) = l_{x+t}\, v(t)$ stetig in t.

Im vorliegenden, eindimensionalen Fall entartet der Bereich B in das abgeschlossene und beschränkte Intervall $0 \leqq t \leqq \omega - x + 1$, mit ω = Schlussalter, d.h. $l_x = 0$, $(x \geqq \omega + 1)$.

Wir überdecken B mit den m von 0 bis $\omega - x + 1$ angeordneten, links offenen, rechts abgeschlossenen, paarweise disjunkten Intervallen I_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, (I_1 ist links auch abgeschlossen), und wählen als Mengenkörper $\mathfrak{M}$ denjenigen, der von allen beschränkten Intervallen erzeugt wird.

Die Überdeckungsintervalle $I_\mu \in \mathfrak{M}$ lassen sich durch die entsprechenden Randpunkte $t_{\mu-1}$ und t_μ charakterisieren

$$I_1 = [t_0 = 0, t_1]; \quad I_\mu =]t_{\mu-1}, t_\mu], \quad \mu = 2, 3, \ldots, m.$$

Neben der Funktion $F(I_\mu)$ definieren wir nun die Funktion der reellen Variablen t

$$F^*(t) = F[t_0 = 0, t], \qquad (0 \leqq t \leqq \omega - x + 1).$$

Mit Hilfe der vorausgesetzten Additivität von F wird

$$F(I_\mu) = F[0, t_\mu] - F[0, t_{\mu-1}] = F^*(t_\mu) - F^*(t_{\mu-1}) = \Delta F^*(t_\mu),$$

wobei unter $F^*(t)$ ein mit der Zeit t sich verändernder Geldbetrag zu verstehen ist. Weil sich F und F^* gegenseitig eindeutig bestimmen, ersetzen wir – wie üblich – F durchwegs durch F^* und lassen den Stern bei F^* der Einfachheit halber sogleich wieder weg. Mit

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_B \varphi(t)\, dF(I_\mu) = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega - x + 1} l_{x+t}\, v(t)\, dF(t) \tag{8}$$

definieren wir nun einen allgemeinen Leibrentenbarwert mit einer praktisch beliebigen (stetigen) Abzinsungsfunktion $v(t)$ und einem noch unbestimmten Zahlungsmodus [$F'(t)$ bedeutet nämlich den an die Überlebenden zwischen den Altern $x + t$ und $x + t + dt$ zu entrichtenden Geldbetrag]. Im gewöhnlichen Fall, wo der Zinsfuss nicht mit der Zeit variiert, ist $v(t)$ gleich dem Abzinsungsfaktor v^t.

Die allgemeine Darstellung des Leibrentenbarwertes (8) umfasst beispielsweise nachstehende Spezialisierungen.

1. $F(t)$ sei eine stetige Funktion der Zeit t, z.B.

a) $F(t) = t$. Dann ist $dF(t) = 1\, dt$ und aus (8) wird

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega - x + 1} l_{x+t}\, v^t\, dt = \bar{a}_x.$$

($\bar{a}_x$ = Barwert der festen, an eine Person vom Alter x lebenslänglich kontinuierlich zahlbaren Leibrente 1).

b) $F(t) = \dfrac{t^2}{2}$. In diesem Fall ist der zur Auszahlung gelangende Geldbetrag $F'(t) = t$ kontinuierlich wachsend und man erhält aus (8)

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \int_0^{\omega - x + 1} t\, l_{x+t}\, v^t\, dt = (I\bar{a})_x.$$

($(I\bar{a})_x$ = Barwert der pro Zeiteinheit um den Betrag 1 steigenden, an eine Person vom Alter x lebenslänglich kontinuierlich zahlbaren Leibrente).

Wenn also dF existiert und selbst wieder stetig ist, stellt $\tilde{a}_x$ einen mit der Zeit sich verändernden, lebenslänglich kontinuierlich zahlbaren Leibrentenbarwert dar für die Zahlung $F'(t)$ im Zeitpunkt t.

2. Die unabhängige Veränderliche t sei nur der $m = \omega - x + 1$ diskreten Werte $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, \omega - x + 1$, fähig und $F(t)$ eine Treppenfunktion mit den Sprungstellen $t = t_i$. Es gilt dann

$$F(t) = F(t_i)\,, \text{ für alle } t_i \leqq t < t_{i+1}\,,$$

und wegen $\quad \Delta F(t) = F(t_\mu) - F(t_{\mu-1})$

$$\Delta F(t) \begin{cases} = F(t_i) - F(t_{i-1})\,, & t_{i-1} \leqq t_{\mu-1} < t_i \leqq t_\mu < t_{i+1}\,; \\ = 0 & ,\ t_{i-1} \leqq t_{\mu-1} \leqq t_\mu < t_i\,. \end{cases}$$

Aus (8) erhalten wir nun unter Berücksichtigung des Grenzwertes (3)

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \lim_{D \to 0} \sum_{i=1}^{\omega-x+1} l_{x+t_i} v^{t_i} \Delta F(t_i) = \frac{1}{l_x} \sum_{i=1}^{\omega-x+1} l_{x+t_i} v^{t_i} \Delta F(t_i)\,. \tag{9}$$

a) Wir setzen $t_i = t = 0, 1, \ldots, \omega - x + 1$ und $F(t_i) = t_i$. Dann ist $\Delta F(t_i) = 1$ und aus (9) folgt

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x+1} l_{x+t} v^t = \ddot{a}_x\,.$$

($\ddot{a}_x$ = Barwert der festen, sofort beginnenden, an eine Person vom Alter x lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente 1).

b) Wieder sei $t_i = t = 0, 1, \ldots, \omega - x + 1$. $F(t)$ wählen wir so, dass $\Delta F(t_i) = t_i + 1 = t + 1$ wird; d.h. $F(t_i) = \sum_{\nu=0}^{i} (t_{i-\nu} + 1)$. Aus (9) wird jetzt

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x+1} (t+1)\, l_{x+t} v^t = (I\ddot{a})_x\,.$$

$\big((I\ddot{a})_x$ = Barwert der sofort beginnenden, jährlich um den Betrag 1 steigenden, an eine Person vom Alter x lebenslänglich, jährlich vorschüssig zahlbaren Leibrente$\big)$.

c) Setzt man schliesslich $t_i = \frac{t}{m} = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m(\omega - x + 1)}{m}$

und $F(t_i) = t_i$, dann ist $\Delta F(t_i) = t_i - t_{i-1} = \frac{1}{m}$ und (9) wird zu

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{m}\frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{m(\omega-x+1)} l_{x+\frac{t}{m}}\, v^{\frac{t}{m}} = {}^{(m)}\ddot{a}_x .$$

$\Big({}^{(m)}\ddot{a}_x$ = Barwert der festen, sofort beginnenden, an eine Person vom Alter x lebenslänglich, in m unterjährigen Raten von je $\frac{1}{m}$ vorschüssig zahlbaren Leibrente 1$\Big)$.

Für weitere Anwendungsbeispiele sei auf die Arbeiten von *S. Breuer* [1], *B. Haller* [2], *M. Jacob* [4], *A. Loewy* [5], *H. Schärf* [6] und *J. F. Steffensen* [7] verwiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *Breuer, S.:* Die Verwertung des Stieltjesschen Integralbegriffs zur Darstellung von Renten- und Bausparformeln. Das Versicherungsarchiv. 2, 1932. Nr. 8, Seiten 1–15.

[2] *Haller, B.:* Verteilungsfunktionen und ihre Auszeichnung durch Funktionalgleichungen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1945.

[3] *Hüsser, R.:* Orthogonale Polynome mehrerer Veränderlichen und ihre Anwendung in der ein- und zweidimensionalen Ausgleichungsrechnung. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1957. Bd. 57, Seiten 55–128.

[4] *Jacob, M.:* Sugli integrali di Stieltjes e sulla loro applicazione nella matematica attuariale. Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari. 1932. Vol. III, p. 160 – 181.

[5] *Loewy, A.:* Der Stieltjessche Integralbegriff und seine Verwertung in der Versicherungsmathematik. Blätter für Versicherungsmathematik. 1933. Bd. 2, Seiten 3–18, 74–82, 207–216.

[6] *Schärf, H.:* Über links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1943. Bd. 43, S. 127–179.

[7] *Steffensen, J. F.:* On Stieltjes'Integral and its Applications to Actuarial Questions. Journal of the Institute of Actuaries. 1932. Vol. LXIII, p. 443–483.