Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 58 (1958)

Artikel: Zur Axiomatik der innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966804

Zur Axiomatik der innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie

Seinem verehrten Kollegen
Prof. Dr. Arthur Alder
in freundschaftlicher Gesinnung zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

von *H. Hadwiger*, Bern

1. Zielsetzung

Der wesentlichste Fortschritt, den die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Dezennien zu verzeichnen hat, besteht wohl darin, dass klar erkannt wurde, dass eine mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie eines streng gefassten axiomatischen Fundamentes bedarf und dass ein solches auch gegeben werden kann.

Es liegt in der Natur der Sache, dass diese neuzeitlichen Theorien bei der angestrebten grossen Allgemeinheit wohl die Fragen der exakten Begriffsbildungen und der zu wählenden Grundgesetze abklären und lehren, wie aus gegebenen Wahrscheinlichkeitswerten andere abgeleitet werden können, dabei aber zu unbestimmt bleiben müssen, als dass es möglich wäre, auf Grund der vorliegenden axiomatischen Fundierung die tatsächliche Ermittlung eines einzigen nichttrivialen Wahrscheinlichkeitswertes vorzunehmen.

Die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung kennt indessen zahllose Probleme, deren Lösung im konventionellen Sinn in der tatsächlichen Berechnung aller gefragten Wahrscheinlichkeitswerte besteht. Gerade diese Möglichkeiten, die zahlenmässigen Bewertungen der Chance zufallsartiger Ereignisse unabhängig vom Experiment oder des noch in der Zukunft liegenden Ablaufs vorausberechnen zu können, verliehen jedenfalls der Entwicklung der von *Jakob Bernoulli* (Ars conjectandi) begründeten Lehre in historischer Zeit die wertvollsten Impulse.

Es handelt sich hierbei um Probleme a priori, deren innermathematische Behandlung dadurch charakterisiert ist, dass zu den üblichen Grundrelationen gewisse willkürlich, aber sinnvoll gewählte Gleichsetzungen hinzutreten, die dann eine eindeutige Auflösung nach den gesuchten Wahrscheinlichkeitswerten ermöglichen.

Derartige Festsetzungen über bestehende Gleichmöglichkeiten, von denen man früher gelegentlich irrtümlicherweise glaubte, sie streng begründen zu müssen, sind durchaus zulässig. Sie bedingen eine zusätzliche Idealisierung des der zu lösenden Aufgabe zugrunde liegenden mathematischen Modells. Hierbei ist besonders zu beachten, dass sich diese Voraussetzungen aber lediglich auf das gedachte Modell beziehen und nicht auf Dinge und Erscheinungen der Wirklichkeit. Vgl. hierzu einige treffende Äusserungen bei *A. Alder* [1] (insb. S. 15).

Wie sind nun aber in den sich hierfür eignenden Fällen Festsetzungen dieser Art zu treffen?

Behandelt man ein innermathematisches Problem a priori etwa im Rahmen der heute in weiten Kreisen anerkannten, masstheoretisch fundierten Wahrscheinlichkeitslehre nach *A. Kolmogoroff* [2], so bestehen zwischen den vorzunehmenden Festsetzungen angemessener Gleichmöglichkeiten und den Axiomen, welche der Theorie zugrunde liegen, keinerlei Beziehungen. Dies bedeutet, dass die Willkür dieser Festsetzungen in jedem neuen individuellen Falle auch wieder neu in Erscheinung tritt.

Die Tatsache, dass in zahlreichen einfachen Fällen, vor allem in solchen vom endlichen Typ, plausible Annahmen gewissermassen auf der Hand liegen, ändert nichts daran, dass in schwierigeren Fällen, etwa bei Aufgaben vom abzählbar- oder überabzählbar-unendlichen Typ, eine gewisse Unsicherheit vorliegt. Es besteht daher ein Bedürfnis, bereits eine in den allgemeinen Grundlagen verankerte Wegleitung, ein in innermathematischen Fällen anwendbares Wahlprinzip zur Festsetzung gleichberechtigter Elementarereignisse zur Verfügung zu haben.

Damit ist das Ziel, das wir durch eine Axiomatik der innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie zu erreichen trachten, bereits angedeutet. Es soll versucht werden, die geläufige masstheoretische Grundlage von *Kolmogoroff* für die allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie so zu erweitern, dass geeignete innermathematische Probleme a priori in einer Art und Weise bearbeitet werden können, welche die Festsetzungen über gleichberechtigte Elementarereignisse nicht individuell willkürlich, sondern in einer in der Axiomatik generell vorgezeigten Form vorzunehmen erlaubt. In den passenden Fällen kann dann die tatsächliche Berechnung einzelner Wahrscheinlichkeitswerte in der üblichen Art durchgeführt werden, ohne die Grenzen des ausschliesslich durch die Axiome festgelegten Arbeitsfeldes zu überschreiten.

Der Gedanke, der zu diesem Ziel führen kann, ist nicht neu. Innerhalb der Problemgruppe der geometrischen Wahrscheinlichkeiten ist seine konsequente Verwertung längst üblich. Es handelt sich um den Einsatz eines Invarianzprinzips. Nachdem schon *M. W. Crofton* [3] im Jahre 1868 invariante Ansätze zur Ermittlung geometrischer Wahrscheinlichkeiten benutzte, war es besonders *G. Pólya* [4], der im Jahre 1917 diese anzuwendenden Integraldichten durch eine deutlich hervorgehobene Invarianzforderung in eindeutiger Weise charakterisierte und am Ende der zitierten Abhandlung (l. c. S. 328) der Hoffnung Ausdruck gab, «dass die vorangehende Bestimmung der Wahrscheinlichkeit auf Grund der Forderung der Unabhängigkeit von der Lage zur Aufklärung der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung beitragen wird».

In der von *W. Blaschke* und seiner Schule [5] begründeten Integralgeometrie, die aus der Lehre von den geometrischen Wahrscheinlichkeiten hervorgegangen ist, hat in der Tat das Invarianzprinzip eine fundamentale Bedeutung erlangt. Hierüber kann man sich beispielsweise bei *L. A. Santaló* [6] orientieren. Die integralgeometrischen Masse sind durch die Forderung, gegenüber der Bewegungsgruppe des betrachteten Raumes invariant zu sein, im wesentlichen eindeutig festgelegt.

Es gilt nun, diesen Gedanken in allgemeinster Form aufzugreifen und eine Invarianzforderung gegenüber einer geeigneten Gruppe in das axiomatische System einer innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie einzubauen. Für die Bearbeitung der Probleme a priori ergibt sich so eine wesentlich straffere Führung, indem die Gleichwertigkeit oder Äquivalenz der Elementarereignisse durch eine willkürlich, aber sinnvoll festgesetzte, im Ereignisraum wirkende Gruppe bestimmt wird.

In allen Fällen, in denen sich die Problemmodelle für die innermathematische Behandlung nicht eignen, so dass sich im Ereignisraum keine nichttriviale Gruppe in sinnvoller Weise auszeichnen lässt, kann man auf die identische Gruppe greifen. Die Invarianzforderung trivialisiert sich, und man hat wieder die invarianzlose Grundlage der allgemeinen Wahrscheinlichkeitstheorie. In diesem Sinne ist das axiomatische System von *Kolmogoroff* der invarianzlose Sonderfall eines umfassenderen invarianten Systems.

Es geht also darum, die Idee der Gruppe als fruchtbares gestaltendes und ordnendes Prinzip der mathematischen Wissenschaften auch für die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzbar zu machen.

2. Axiome; Wahrscheinlichkeitsfeld

Wir formulieren nun vier Axiome, die der innermathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie zugrunde gelegt werden sollen.

I. R sei eine Menge, genannt *Ereignisraum*. Ihre Elemente $x \in R$ heissen *Elementarereignisse*. $\mathfrak{K}$ sei eine additive *Mengenklasse* (evtl. Mengenkörper) von Elementarereignismengen $A \subset R$. $\mathfrak{K}$ enthalte auch die leere Menge 0. Es gilt also

$$\text{(a)}\quad A,B \in \mathfrak{K},\quad A \frown B = 0 \trianglerighteq A \smile B \in \mathfrak{K};$$

$$\text{(b)}\quad 0 \in \mathfrak{K}.$$

II. Eine ausgezeichnete nichtleere Teilmenge $E \subset R$ des Ereignisraumes sei die *Einheitsmenge*, die aus den in Betracht gezogenen Elementarereignissen bestehen soll; E kann auch mit R zusammenfallen.

III. Über $\mathfrak{K}$ sei die *Funktion* φ definiert, die jeder Ereignismenge $A \in \mathfrak{K}$ die reelle Zahl $\varphi(A)$ zuordnet, so dass die folgenden Forderungen erfüllt werden: (a) $\varphi(A) \leqq \varphi(B)\,[A \subset B]$; (b) $\varphi(E) \neq 0$; (c) $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \smile B)\,[A \frown B = 0]$. φ ist demnach *monoton, normierbar* und *additiv*. Offensichtlich gilt $\varphi(A) \geqq 0$ und $\varphi(0) = 0$; φ ist *definit*.

IV. R ist Wirkungsraum einer *Gruppe* G von Transformationen α, die den Ereignisraum auf sich abbilden. Geht die Menge $B \subset R$ durch eine Operation $\alpha \in G$ aus $A \subset R$ hervor, was wir auch durch $B = A^{\alpha}$ ausdrücken wollen, so heissen A und B *G-gleich*, symbolisch $A \sim B$. $\mathfrak{K}$ sei *G-frei* und φ sei *G-invariant*, so dass die folgenden Forderungen erfüllt werden:

$$\text{(a)}\quad A \in \mathfrak{K},\quad A \sim B \trianglerighteq B \in \mathfrak{K};$$

$$\text{(b)}\quad A,B \in \mathfrak{K},\quad A \sim B \trianglerighteq \varphi(A) = \varphi(B).$$

Es folgen die grundlegenden Definitionen:

Sind für einen Raum R, eine Mengenklasse $\mathfrak{K}$, eine Einheitsmenge E, eine Funktion φ und eine wirkende Gruppe G die Axiome I. bis IV. erfüllt, so bilden diese fünf Gegebenheiten ein G-invariantes *Wahrscheinlichkeitsfeld* $<R,E,G,\mathfrak{K},\varphi>$.

Ist $C \subset R$ eine Teilmenge des Ereignisraumes R und gilt $C \cap E \in \mathfrak{K}$, so ist die durch den Ansatz

$$W = W(C) = \frac{\varphi(C \cap E)}{\varphi(E)} \tag{1}$$

gebildete reelle Zahl W die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass ein G-zufällig ausgewähltes Elementarereignis $x \in R$, das in Betracht gezogen ist, also zu E gehört, auch in C enthalten ist.

Wir geben noch einen kurzen Kommentar zu den einzelnen Axiomen:

Zu Axiom I: Die Festlegung einer Mengenklasse $\mathfrak{K}$ solcher Elementarereignismengen, für welche Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden sollen, ist notwendig, weil sich andernfalls nicht in allen Fällen für beliebige Teilmengen von R Funktionen φ finden lassen, die den weiteren Forderungen genügen. In gewissen Räumen gibt es absolut unmessbare Mengen.

Die sonst übliche Forderung, dass $\mathfrak{K}$ ein Mengenkörper sei, ist hier abgeschwächt, indem nur die Additivität von $\mathfrak{K}$ verlangt wird. Dies geschieht im Hinblick auf besonders ausgezeichnete Inhaltssysteme, deren Definitionsfelder nicht Mengenkörper sind.

Zu Axiom II: Gegenüber der üblichen Fassung der masstheoretischen Grundlegung ist die Sachlage neu, dass die Menge E der in Betracht gezogenen Elementarereignisse, die der Gesamtheit der möglichen Fälle entspricht, in einen sie im allgemeinen umfassenden Ereignisraum R eingebettet wird. Diese Massnahme drängte sich vor allem auf, um einen Wirkungsraum einer Gruppe zu schaffen, welcher die Formulierung eines Invarianzaxioms erlaubt. Sie wirkt sich indessen auch auf die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vereinfachend aus, indem sie eine natürliche und mühelose Handhabung der sogenannten bedingten Wahrscheinlichkeiten in die Wege leitet.

Zu Axiom III: Die Funktion $\varphi(A)$ stellt eine Inhaltsmasszahl für die Punktmengen $A \in \mathfrak{K}$ dar; sie dient dazu, die «Anzahl» der günstigen und möglichen Fälle in geeigneter Weise zu erfassen, gleichgültig, ob es sich um Probleme vom endlichen, abzählbar-unendlichen oder kontinuierlichen Typus handelt.

Zu Axiom IV: Die Festlegung einer im Ereignisraum R wirkenden Gruppe G kann als Verallgemeinerung der Anwendung eines Symmetrieprinzips gelten. Die einmalige Wahl der Gruppe entscheidet simultan über alle Gleichwertigkeiten. Das in einem gewissen Sinne vollkommene Gesetz der Gruppe bietet eine gewisse Gewähr dafür, dass die durch sie induzierten Gleichwertigkeitsfestsetzungen sinnvoll sind; bei ungebundener Willkür ist dies nicht im gleichen Masse sicher. Das Gesetz der Gruppe kann ausserdem für die Lösungstheorie eines innermathematischen Problems eine vorteilhafte innere Geschlossenheit erwirken.

Selbstverständlich ist auch die Wahl der Gruppe willkürlich. Jedoch soll sie beim innermathematischen ideellen Modell das wiedergeben, was im aussermathematischen wirklichen Tatbestand wesentlich zur Wirkung kommt.

Die Mannigfaltigkeit der durch unsere Axiome festgelegten Wahrscheinlichkeitsfelder enthält insbesondere die Wahrscheinlichkeitsfelder im Sinne der Theorie von *Kolmogoroff* (ohne Stetigkeitsaxiom) als Sonderfälle. Diese ergeben sich durch die folgenden Spezialisierungen: 1. $\mathfrak{K}$ ist ein Mengenkörper; 2. Die Einheitsmenge E ist mit dem gesamten Ereignisraum R identisch; 3. Die Gruppe G ist die Identität, das heisst sie enthält nur die identische Transformation von R auf sich.

Überlegt man sich, was ursprünglich bei einer individuellen Problemlage bzw. bei einem gewählten Modell vorgegeben ist, so bemerkt man, dass es sich um den Ereignisraum R, die Einheitsmenge E der in Betracht gezogenen Elementarereignisse und schliesslich um die zur Wirkung kommende Gruppe G handelt. Diese drei Grundgegebenheiten bilden zusammen den *Kern* $<R,E,G>$ einer individuellen Theorie. Durch Adjunktion einer Mengenklasse $\mathfrak{K}$ und eines assoziierten Operators φ, kurz eines *Systems* $<\mathfrak{K},\varphi>$ zum Kern entsteht das *Wahrscheinlichkeitsfeld* $<R,E,G,\mathfrak{K},\varphi>$. Die Gesamtheit der Aussagen, die bei festem Kern über die in Frage kommenden Wahrscheinlichkeitsfelder gemacht werden können, bilden Gegenstand einer rein axiomatischen Theorie.

3. Unabhängigkeit; Multiplikationssatz

Es sollen zwei Ereignisräume R und R' nebeneinander betrachtet werden. Im allgemeinen wird es sich dabei um Elementarereignisse verschiedener Art handeln; selbstverständlich kann aber auch R mit R' identisch sein, so dass dieselbe Menge von Elementarereignissen zweimal gesetzt wird. Sowohl in R wie auch in R' sei je eine Einheitsmenge E bzw. E' ausgezeichnet, welche die in Betracht gezogenen Elementarereignisse umfasst. Die Gleichwertigkeit bei zufälliger Elementeauswahl aus R bzw. R' sei durch die beiden in R und R' wirkenden Gruppen G und G' geregelt. Damit sind die beiden Kerne $<R,E,G>$ und $<R',E',G'>$ gebildet; sie liegen den Theorien zugrunde, die unabhängig voneinander den beiden Ereignisklassen zugeordnet werden können.

Nun bilden wir ein neues Elementarereignis $z = (x,x')$ dadurch, dass wir (G-zufällig) ein erstes Element x aus R und anschliessend (G'-zufällig) ein zweites Element x' aus R' auswählen und sie zu einem geordneten Paar zusammenfügen.

So entsteht zunächst ein neuer Ereignisraum $R \times R'$, dessen Elemente die (geordneten) Paare (x,x') $[x \in R,\ x' \in R']$ sind. Es ist sinnvoll, in diesem Raum nur diejenigen Elementarereignisse (x,x') in Betracht zu ziehen, deren Komponenten x und x' gleichzeitig in R bzw. in R' in Betracht gezogen wurden, für die also $x \in E$, $x' \in E'$ gilt. In dem neuen, durch Paarbildung erzeugten Ereignisraum umfasst somit die Menge $E \times E'$ die in Betracht fallenden Ereignisse aus $R \times R'$. Zur Bildung eines Kerns ist noch erforderlich, die in $R \times R'$ wirkende Gruppe festzulegen.

Ist es nun der Interpretation der vorliegenden Modelle angemessen, als wirkende Gruppe das direkte Produkt $G \times G'$ der beiden Gruppen G und G' zu wählen, so soll dies der mathematische Ausdruck dafür sein, dass die Ereignisse x und x' der beiden Ereignisklassen R und R' *unabhängig* sind.

Damit ist für den Unabhängigkeitsbegriff, dessen mathematische Eingliederung in die Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie bekanntlich stets einige Mühe bereitet, wenigstens für die innermathematische Theorie eine Deutung erzielt, welche den unmittelbaren Anschluss an die Rechengesetze erlaubt.

Der Kern der durch Paarbildung erzeugten Theorie ist dann durch $(R \times R', E \times E', G \times G')$ gegeben, wobei das Zeichen $\times$ bei Raum und Menge das cartesische, bei der Gruppe das direkte Produkt bezeichnet.

Sind jetzt $<\mathfrak{K},\varphi>$ und $<\mathfrak{K}',\varphi'>$ zwei Systeme, welche den Kernen $<R,E,G>$ und $<R',E',G'>$ im Einklang mit den Axiomen zugeordnet werden können, so ist offensichtlich $<\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}', \varphi \times \varphi'>$ ein System, das zum Kern $<R \times R', E \times E', G \times G'>$ hinzugefügt werden kann und, wie man leicht bestätigt, die Axiome wieder erfüllt. Hierbei ist $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}'$ die Klasse derjenigen Mengen in $R \times R'$, welche durch die Mengenpaare $A \times A'$ $[A \in \mathfrak{K}, A' \in \mathfrak{K}']$ erzeugt werden; der Operator $\psi = \varphi \times \varphi'$ ist über $\mathfrak{K} \times \mathfrak{K}'$ durch den Ansatz $\psi(A \times A') = \varphi(A)\, \varphi'(A')$ definiert.

Eine unmittelbare Folgerung ist der *Multiplikationssatz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wonach für $C \subset R$ und $C' \subset R'$, also $C \times C' \subset R \times R'$, die Regel

$$W(C \times C') = W(C)\, W'(C') \tag{2}$$

gilt. Die Gültigkeit des Multiplikationssatzes ist in der hier skizzierten innermathematischen Theorie im wesentlichen eine Folgerung aus der postulierten Unabhängigkeit der beiden Ereignisklassen.

4. Ereignisfolgen; Grenzwertsatz

Es sei $<R,E,G,\mathfrak{K},\varphi>$ ein Wahrscheinlichkeitsfeld und $\{x_i\}$ bezeichne eine unendliche Folge von Elementarereignissen $x_i \in R$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Ist $A \subset R$ eine Elementarereignismenge, so bedeute $N_k(A)$ die Anzahl derjenigen Elemente des endlichen Abschnitts $x_1, x_2, \ldots, x_k$ der Folge $\{x_i\}$, die der Menge A angehören. Nun definieren wir:

Die Folge $\{x_i\}$ heisst in R *G-gleichverteilt*, wenn die beiden nachfolgenden Bedingungen erfüllt werden: Für jede Menge $A \in \mathfrak{K}$, für die $\varphi(A) > 0$ ausfällt, gilt

$$\text{(a)}\quad N_k(A) \to \infty \qquad (k \to \infty);$$

Für je zwei Mengen $A, B \in \mathfrak{K}$, bei welchen noch $\varphi(A) > 0$ vorausgesetzt wird, gilt

$$\text{(b)}\quad N_k(B) \,/\, N_k(A) \to \varphi(B) \,/\, \varphi(A) \qquad (k \to \infty).$$

Für eine Menge $C \subset R$, für die $C \cap E \in \mathfrak{K}$ gilt, bilden wir die für ausreichend grosse k definierten *relativen Häufigkeiten*

$$H_k(C) = N_k(C \cap E) \,/\, N_k(E) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

welche anzeigen, welcher Prozentsatz der ersten k Elementarereignisse der G-gleichverteilten Ereignisfolge $\{x_i\}$ der Menge $C \cap E$ der günstigen, in Betracht gezogenen Elemente angehört. Mit Rücksicht auf die Definition (1) lässt sich jetzt der *Grenzwertsatz* unmittelbar ablesen, nach welchem

$$H_k(C) \to W(C) \qquad (k \to \infty) \tag{4}$$

gilt.

Die Wahrscheinlichkeit erscheint so als Grenzwert der Folge der relativen Häufigkeiten, mit welchen die «günstigen» Ereignisse in den Abschnitten einer Folge «möglicher» Ereignisse auftreten. Damit ist ein Modell geschaffen, welches den bekannten Prozess der statistischen Ermittlung der Wahrscheinlichkeitswerte idealisiert. Die Existenz des Grenzwertes der relativen Häufigkeiten ist hier eine Folgerung der von uns getroffenen Voraussetzung, dass nämlich die Ereignisse der Folge im Ereignisraum G-gleichverteilt sein sollen. In der G-Gleichverteilung findet hier die vagere Vorstellung von der Regellosigkeit einer Ereignisfolge einen präzisen, mathematisch fassbaren Ausdruck, so dass das Grenzwerttheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie ein beweisbarer Satz wird.

Zum besseren Verständnis dieser Zusammenhänge sollen uns noch die folgenden Überlegungen dienlich sein:

Wir denken uns bei einem praktischen Problem, bei dem unsere Theorie angewendet werden soll, eine nicht abbrechende Folge von wirklich durchgeführten Versuchen, so dass das Ergebnis eines Versuches einem Elementarereignis des passenden mathematischen Modells, also eines G-invarianten Wahrscheinlichkeitsfeldes, entspricht. Der wahre Ablauf der Versuchsreihe ist durch den Zufall gesteuert, und gerade diese Zufälligkeit soll im Modell durch die im Ereignisraum R wirkende Gruppe G in sinnfälliger und in einer dem wahren Geschehen adäquaten Weise idealisiert sein. Ein einzelnes wirkliches Ergebnis eines Versuches stellt sich zufällig ein; dies bedeutet, in idealisierter Form beim Modell interpretiert, dass das entsprechende Elementarereignis G-zufällig aus R ausgewählt wird. Die im Modell erklärte Wirkung auf die unendliche Ereignisfolge ist die Forderung, dass die Ereignisse im Raum R G-gleichverteilt sein sollen.

Die G-Gleichverteilung stellt gewissermassen ein idealisiertes Modell für die regulierende Wirkung des phänomenologischen Zufalls auf den wahren Ablauf einer nicht abbrechend gedachten Versuchsreihe dar, und dadurch ist mathematisch fixiert, was intuitiv mühelos erfasst wird, aber auf exakte Weise nur schwer wiederzugeben ist.

5. Beispiele

Mit drei einfachen Beispielen wollen wir nachfolgend die Anwendung unserer axiomatischen Theorie kurz erläutern.

1. Das Kästchenproblem von Bertrand

Wir formulieren diese bekannte, von *J. Bertrand* im Jahre 1889 ([7], insb. S. 2) gestellte und gelegentlich unrichtig beantwortete Frage in gleichwertiger Weise, indem wir an Stelle des Kästchenmodells einen «idealen» Würfel verwenden, der in der konventionellen Weise mit den sechs Punktzahlen versehen ist. Wir fragen: Bei einem Wurf erscheine eine Punktzahl, die ein Teiler von 10 ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die antipodische Seitenfläche des Würfels einen Nichtteiler von 10 aufweist?

Wir konstruieren das Wahrscheinlichkeitsfeld:

Das mathematische Modell besteht zunächst aus einem geometrischen Würfel, der um seinen Mittelpunkt drehbar ist und der in jeder Position parallel zu einem festen orthogonalen Koordinatensystem liegen soll.

R = Menge der 24 möglichen Positionen des Würfels. Jede Position ist ein Elementarereignis.

E = Menge der 12 Positionen, bei welchen die «obere» Seitenfläche einen Teiler von 10, also eine der Ziffern 1, 2, 5 trägt. Es liegt im Sinne der Voraussetzung der Aufgabe, dass nur diese Positionen in Betracht gezogen werden.

G = Gruppe der 24 Drehungen des Würfels in sich um den Mittelpunkt. Durch die Wahl dieser Gruppe wird der erhobenen Forderung Rechnung getragen, dass der Würfel (und der Wurf) «ideal» sein sollen.

$\mathfrak{K}$ = Klasse der 2^{24} Teilmengen von R.

φ = Anzahl der Elemente. Es ist insbesondere $\varphi(E) = 12$. Die Verifikation der Axiome ist trivial.

Nun ist das Feld $< R, E, G, \mathfrak{K}, \varphi >$ hergestellt, und es ist die gestellte Aufgabe zu lösen, das heisst es ist die Menge C zu bestimmen. C besteht aus den 12 Positionen des Würfels, bei welchen die «untere» Seitenfläche einen Nichtteiler von 10, also eine der Ziffern 3, 4, 6 aufweist. E und C enthalten 4 gemeinsame Positionen, wobei die Ziffern 1 und 6 oben und unten erscheinen.

Mit $\varphi(C \frown E) = 4$ ergibt sich nach (1) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = W(C) = 1/3 ,$$

in Übereinstimmung mit der von *Bertrand* gegebenen Lösung.

2. *Die Tschebyscheffsche Kürzungsaufgabe*

Die Frage lautet: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei zufällig ausgewählte natürliche Zahlen einen nichttrivialen gemeinsamen Teiler haben, das heisst, dass der Bruch p/q kürzbar ist?

Vorbereitend betrachten wir in einer cartesischen Ebene die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten x,y, die das Einheitsgitter Γ bilden. Mit $T_k (k = 1, 2, \ldots)$ soll der Komplex der Gitterpunkte (x,y) bezeichnet werden, für die $-k \leq x,y \leq k$ gilt. Es sei A eine Menge von Gitterpunkten und $N(A \frown T_k)$ bezeichne die Anzahl der in T_k enthaltenen Punkte von A. Wird

$$D_k(A) = N(A \frown T_k) / 4k^2$$

gesetzt, so ist

$$D(A) = lim\, D_k(A) \qquad (k \to \infty)$$

die Dichte von A, falls der Grenzwert existiert.

Nun konstruieren wir wieder das Wahrscheinlichkeitsfeld; Mengen natürlicher Zahlenpaare interpretieren wir als Gitterpunktsmengen von Γ:

R = Menge aller Gitterpunkte von Γ. Jedes Paar ganzer Zahlen ist ein Elementarereignis.

E = Menge der im Innern des ersten Quadranten von Γ gelegenen Gitterpunkte; es werden also lediglich die natürlichen Zahlenpaare in Betracht gezogen.

G = Gruppe der Gittertranslationen, die also Γ in sich selbst verschieben.

$\mathfrak{K}$ = Klasse aller Gitterpunktsmengen, die im oben festgelegten Sinn eine Dichte aufweisen.

φ = Dichte. Es wird insbesondere $\varphi(E) = D(E) = 1/4$.

Die Verifikation der Axiome ist sehr einfach und kann dem Leser überlassen bleiben. Das Feld $< R,E,G,\mathfrak{K},\varphi >$ steht zur Verfügung.

Um die Lösung der gestellten Aufgabe in die Wege zu leiten, ist zunächst die Menge C festzulegen.

C = Menge aller von (0,0) verschiedenen Gitterpunkte (x,y), für welche die beiden ganzen Zahlen x und y einen grössten gemeinsamen Teiler > 1 aufweisen.

Bezeichnet Γ^r mit einem natürlichen r die Menge der von (0,0) verschiedenen Gitterpunkte (x,y), für die $x = n \cdot r$, $y = m \cdot r$ (n,m ganz), so hat Γ^r, wie man mühelos ausrechnet, die Dichte

$$D(\Gamma^r) = 1/r^2.$$

Sind $r_\nu (\nu = 1,2,\ldots,s)$ s paarweise teilerfremde natürliche Zahlen, so weist der gemeinsame Durchschnitt der ihnen entsprechenden Γ^r die Dichte

$$D(\Gamma^{r_1} \frown \ldots \frown \Gamma^{r_s}) = 1 / (r_1^2 \ldots r_s^2)$$

auf. Die oben eingeführte Menge C lässt sich als Vereinigungsmenge

$$C = U_1^\infty \Gamma^{p_\nu}$$

darstellen, erstreckt über alle Primzahlen; p_ν bezeichnet die ν-te Primzahl. Mit einfachen Abschätzungen ergibt sich, dass auch C eine Dichte aufweist, also zur Klasse $\mathfrak{K}$ gehört, und zwar gewinnt man mit wiederholter Verwendung des Additionstheorems

$$D_k(A \smile B) = D_k(A) + D_k(B) - D_k(A \frown B)$$

und anschliessendem Grenzübergang $k \to \infty$ zunächst die Beziehung

$$D(C) = \sum^1\left(\frac{1}{p_\nu}\right)^2 - \sum^2\left(\frac{1}{p_\nu p_\mu}\right)^2 + \sum^3\left(\frac{1}{p_\nu p_\mu p_\lambda}\right)^2 - \ldots\ldots,$$

wobei Σ^m eine Summation bedeutet, die sich über alle Kombinationen $\nu,\mu\ldots$ der Indizes $1,2,\ldots$ der Klasse m erstrecken soll.

Die rechts stehende Summe kann durch ein einfaches unendliches Produkt ausgedrückt werden, indem sich

$$D(C) = 1 - \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_\nu^2}\right),$$

oder

$$D(C) = 1 - \frac{6}{\pi^2}$$

ergibt. Schliesslich gilt noch

$$\varphi(C \cap E) = D(C \cap E) = (1/4)\, D(C).$$

Damit erhält man nach (1) für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$W = W(C) = 1 - \frac{6}{\pi^2} = 0{,}3920\ldots\ldots$$

3. *Die Bertrandsche Kreisaufgabe*

J. Bertrand formulierte im Jahre 1889 eine Aufgabe, für die er zugleich drei verschiedene Lösungen vorlegte, die auf drei Überlegungen begründet waren, die in gleicher Weise plausibel schienen, und schaffte so das nach ihm benannte, bekannte «Paradoxon» bei geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Wie später *R. Deltheil* [8] und viele andere auseinandersetzten, klärt sich die Sachlage dadurch auf, dass die verschiedenen Ansätze zur Lösung implizite Festsetzungen über Gleichwertigkeiten enthalten, die voneinander abweichen und nicht übereinstimmende Ergebnisse zeitigen. Wir geben der Frage die folgende Form: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade der Ebene, die einen Kreis vom Radius R schneidet, auch einen nur halb so grossen konzentrischen Kreis vom Radius $R/2$ trifft?

Wir vervollständigen die der Aufgabe zugrunde gelegte Voraussetzung durch den Hinweis, dass alle Geraden der Ebene, auch solche, die den grossen Kreis nicht treffen, gleichwertig sein sollen. Damit ist schon andeutungsweise vorweggenommen, dass die im unten entwickelten Modell gewählte Gruppe mit derjenigen der euklidischen Bewegungen, welche die Geraden transitiv vertauschen, identifiziert werden soll. Die erzielte Lösung entspricht also einem bewegungsinvarianten Ansatz. Die anderen, von *J. Bertrand* noch beigefügten Lösungen beruhen auf Ansätzen, die mit den Kreisen direkt korrelieren und diese Invarianzeigenschaft nicht aufweisen. Sie sind andern Gruppen verpflichtet.

Zunächst ist wieder das Wahrscheinlichkeitsfeld zu konstruieren:

Vorbereitend erörtern wir eine dienliche Abbildung der Geraden in eine Parameterebene. Es sei G eine Gerade in der (x,y)-Ebene und $x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$ sei ihre Hessesche Normalform. Die beiden Normalkoordinaten p und θ von G dienen uns dazu, der Geraden G einen Punkt $\tilde{G}$ in der (p,θ)-Ebene zuzuordnen. Ist $p = 0$, so liefert G zwei Punkte $\tilde{G}'$ und $\tilde{G}''$ mit θ und $\theta + \pi$; dies ist für unsere weitere Verwendung der Abbildung unerheblich. Einer Geradenmenge A entspricht dann eine Punktmenge $\tilde{A}$ im Halbstreifen $0 \leqq p < \infty$; $0 \leqq \theta < 2\pi$.

R = Menge aller Geraden der Ebene; ein Elementarereignis ist eine Gerade G.

E = Menge der Geraden G, die den grossen Kreis treffen; nur diese Geraden werden in Betracht gezogen.

G = Gruppe der ebenen Bewegungen.

$\mathfrak{K}$ = Klasse aller Geradenmengen A, deren Bilder $\tilde{A}$ in der Ebene der Normalkoordinaten im Jordanschen Sinne messbar sind.

φ = Jordanscher Inhalt, also $\varphi(A) = I(\tilde{A})$.

Lassen wir den Kreismittelpunkt mit dem Ursprung der Ebene zusammenfallen, so ist $\tilde{E}$ ein Rechteck $0 \leqq p \leqq R$; $0 \leqq \theta < 2\pi$; folglich ist $\varphi(E) = 2\pi R$.

Nun sind die Axiome zu prüfen. Alles ist ziemlich evident, bis auf die G-Invarianz von φ. Diese bestätigt sich leicht wie folgt: Ist

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + a$$

$$y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b$$

eine Bewegung, welche die Gerade G mit den Normalkoordinaten p und θ in die Bildgerade G' überführt, so sind die Normalkoordinaten von G' durch

$$\theta' = \theta + \alpha$$
$$p' = p - a\cos\alpha - b\sin\alpha$$

oder durch

$$\theta' = \theta + \alpha + \pi$$
$$p' = a\sin\alpha + b\cos\alpha - p$$

gegeben. Für die Funktionaldeterminante der durch die Bewegung in der Normalkoordinatenebene induzierten Abbildung ergibt sich

$$\frac{\partial(p',\theta')}{\partial(p,\theta)} = 1\,.$$

Die Abbildung ist demnach flächentreu; der Inhalt einer Jordan-messbaren Menge bleibt invariant.

Das Feld $<R,E,G,\mathfrak{K},\varphi>$ liegt nun vor. Für die Lösung der gestellten Aufgabe ist noch die Festlegung der Menge C erforderlich. C ist die Menge der Geraden, die den kleineren konzentrischen Kreis treffen. Das Bild $\tilde{C}$ ist das Rechteck $0 \leq p \leq R/2; 0 \leq \theta < 2\pi$; also ist $\varphi(C \cap E) = \varphi(C) = \pi R$. Nach Definition (1) resultiert

$$W = W(C) = 1/2\,.$$

LITERATUR

[1] *A. Alder:* Wahrscheinlichkeit und Wissenschaft, Rektoratsrede. Verlag Paul Haupt, Bern 1953.

[2] *A. Kolmogoroff:* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Band. J. Springer Verlag, Berlin 1933.

[3] *M. W. Crofton:* On the theory of local probability. Trans. Royal Soc. London *158*, 181–199 (1868).

[4] *G. Pólya:* Über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, *126*, 319–328 (1917).

[5] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Integralgeometrie, 3. Aufl. VEB Deutscher Verlag der Wiss. Berlin 1955.

[6] *L. A. Santaló:* Introduction to Integral Geometry. Act. Scient. et Ind. Nr. 1198. Hermann & Cie, Paris 1953.

[7] *J. Bertrand:* Calcul des probabilités, 2. Aufl. Gauthier-Villars Paris 1907.

[8] *R. Deltheil:* Probabilités géométriques (Traité du calcul des probabilités et de ses applications, tome II, fasc. II) Gauthier-Villars, Paris 1926.