

Das Grenzverhalten statistischer Prüfverteilungen

Autor(en): **Wegmüller, Walter**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966803>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Das Grenzverhalten statistischer Prüfverteilungen

Von *Walter Wegmüller*, Bern

Meinem lieben Kollegen

Prof. Dr. Arthur Alder

in Freundschaft und Dankbarkeit zum 60. Geburtstag gewidmet

Mit der mächtigen Entfaltung der mathematischen Statistik sind moderne statistische Methoden und Prüfverfahren zu wirksamen Hilfsmitteln des wissenschaftlichen Forschens und technischen Schaffens geworden. Heute kann insbesondere die statistische Praxis der bedeutsamen Prüfverteilungen, wie der Normalverteilung, der χ^2 -Verteilung, der t -Verteilung und der F -Verteilung nicht mehr entbehren, wenn es gilt, Masszahlen auf ihre Signifikanz hin zu prüfen oder aus Vergleichen schlüssige Folgerungen zu ziehen.

Grundlegendes über die erwähnten statistischen Prüfverteilungen vermitteln alle neuzeitlichen Lehrbücher. Wer sich speziell für eine systematische und vergleichende Bearbeitung der mathematischen Grundlagen interessiert, der sei auf die Untersuchungen von K. G. Lüönd [6] ¹⁾ verwiesen.

Aufschlussreich sind die wechselseitigen Bindungen und Beziehungen, die zwischen den einzelnen Prüfverteilungen bestehen. So können deren Häufigkeitsfunktionen nach einem einheitlichen analytischen Prinzip gefolgert werden, nämlich aus der Vereinigung von zwei oder mehreren unabhängigen Variablen mit bekanntem Verteilungsgesetz. Beachtenswert ist, dass sich bei Vorgabe der Normalverteilung die übrigen Häufigkeitsfunktionen sukzessive ergeben.

Für die innere Bindung der Prüfverteilungen sprechen sodann gewisse Grenzübergänge, die es im folgenden klarzustellen gilt. Hieraus ergeben sich nützliche Beziehungen hinsichtlich des Verhaltens der für

¹⁾ Zahlen in [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

die Handhabung von Prüfverfahren (Tests) so bedeutsamen Sicherheitsgrenzen. Einem Postulat der Praxis nach einfacher numerischer Auswertung folgend, werden schliesslich Zusammenhänge aufgedeckt mit den Tabellenwerken von K. Pearson, speziell mit den normierten unvollständigen Beta- und Gamma-Funktionen [10, 11].

Der Übersicht halber bediene ich mich einer systematischen, für alle Prüfverteilungen konsequent eingehaltenen Darstellung.

1 Normalverteilung (*Gauss-Laplace*)

11 Häufigkeitsfunktion

In der allgemeinsten Form lautet die Häufigkeitsfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Für theoretische Untersuchungen wie auch für die Anwendung ist eine von dem Durchschnitt μ und der Streuung σ^2 parameterfreie Darstellung vorteilhaft. Vermittels der Transformation auf die standardisierte Variable

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

gewinnt man

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty. \quad (1)$$

Für diese *Standardform* mit dem Durchschnitt null und der Streuung eins liegen verschiedene Funktionswerte tabelliert vor [7, 9, 12].

12 Verteilungsfunktion

Die der Häufigkeitsfunktion eindeutig zugeordnete Verteilungsfunktion ist definiert durch

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \quad (2)$$

Mehrere Tafeln, welchen unterschiedliche Ansätze zugrunde liegen, stehen für die numerische Auswertung von $F(z)$ zur Verfügung. Nützlich ist es, sich der Bindung zu den von *Pearson* [11] tabellierten Werten der normierten unvollständigen Gamma-Funktion $I(u,p)$ zu erinnern.

Im Falle $z > 0$ – es genügt diese Fallunterscheidung, denn für negative z -Werte gilt die Relation $F(-z) = 1 - F(z)$ – lässt sich $F(z)$ mühelos auf

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\frac{z^2}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}} v^{-\frac{1}{2}} dv}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{\sqrt{2}}} v^{-\frac{1}{2}} dv}$$

oder

$$F(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} I(u, p), \quad \text{mit } u = \frac{z^2}{\sqrt{2}} \quad \text{und } p = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

transformieren.

13 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Für statistische Prüfverfahren (Tests) bildet die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(z) = P\{|s| > z\} = 2 \int_z^{\infty} f(s) ds \quad (4)$$

das theoretische Fundament. Wahrscheinlichkeit P und Schranke z sind wechselseitig gebunden.

$P(z)$

$z(P)$

z	$P(z)$
0	1,0000
1	0,3173
2	0,0455
3	0,0027

P	$z(P)$
1,0000	0,0000
0,0500	1,9600
0,0100	2,5758
0,0010	3,2905

Um statistische Merkmalsgrößen auf ihre Signifikanz hin zu prüfen, bedient man sich einer auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen beruhenden Schlussweise. Die zur Sicherheitsschwelle gehörige Wahrscheinlichkeit P wird von vornherein festgelegt – gebräuchlich sind $P = 0,05, 0,01$ oder $0,001$ – und das betreffende Zufallsintervall hernach ermittelt.

Analytisch kann das Aufsuchen der Sicherheitsgrenze $z(P)$, d. h. die Inversion

$$P = 2 \int_{z(P)}^{\infty} f(s) ds$$

auf verschiedene Arten erfolgen [5]. Numerisch bedient man sich mit Vorteil der Bindung zur unvollständigen Gamma-Funktion

$$P = 2(1 - F(z)) = 1 - I(u, -\frac{1}{2}), \quad \text{mit } u = \frac{z^2}{\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Vorerst wird für die Bestimmungsgleichung

$$I(u, -\frac{1}{2}) = 1 - P$$

das Argument $u(P)$ durch inverse Interpolation aufgesucht, um alsdann die Sicherheitsgrenze nach

$$z(P) = \sqrt{\sqrt{2} u(P)}$$

zu bestimmen.

14 Charakteristische Funktion

Aus der Definitionsgleichung für die charakteristische Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

folgt unmittelbar nach quadratischer Ergänzung des Exponenten

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (6)$$

Bekanntlich bildet die charakteristische Funktion ein wirksames Hilfsmittel für die Theorie der Prüfverteilungen. Summarisch sei an den Rückschluss auf die Häufigkeitsfunktion, an die Erzeugung der Momente, an die Bestimmung des resultierenden Verteilungsgesetzes einer Summe von mehreren unabhängigen Veränderlichen sowie an die Abklärung von Grenzvorgängen erinnert.

2 χ^2 -Verteilung (*Pearson*)

21 Häufigkeitsfunktion

Die χ^2 -Verteilung gibt darüber Aufschluss, welche Gesetzmässigkeit die Summe der Quadrate

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2$$

von n unabhängigen, normalverteilten Variablen z_k mit dem Durchschnitt null und der Streuung eins befolgt [8]

$$g(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}, \quad 0 \leq \chi^2 < \infty. \quad (7)$$

Der Parameter n gibt die Zahl der Freiheitsgrade an. Für $n \leq 2$ nimmt die Verteilung monoton ab, während sie für $n > 2$ schiefen Verlauf aufweist mit einem in $\chi^2 = n - 2$ gelegenen Maximum. Mit wachsendem n lässt sich bald einmal eine gewisse Bindung zur Glockenkurve der Normalverteilung erkennen; die Vermutung liegt nahe, $g(\chi^2)$ gehe in der Grenzlage in die Normalverteilung über.

22 Verteilungsfunktion

Nach Definition lautet die Verteilungsfunktion

$$G(\chi^2) = \int_0^{\chi^2} g(s^2) ds^2. \quad (8)$$

Bedeutungsvoll ist der Zusammenhang mit der normierten, unvollständigen Gamma-Funktion

$$G(\chi^2) = \frac{\int_0^{\frac{\chi^2}{\sqrt{2n}}} e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}v} v^{\frac{n}{2}-1} dv}{\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}v} v^{\frac{n}{2}-1} dv}$$

oder
$$G(\chi^2) = I(u, p), \quad \text{mit } u = \frac{\chi^2}{\sqrt{2n}} \quad \text{und } p = \frac{n}{2} - 1. \quad (9)$$

Damit besteht eine für numerische Auswertungen äusserst wertvolle Beziehung, die sich durch leichte Handhabung und gute Genauigkeit auszeichnet.

23 Wahrscheinlichkeitsfunktion

In der für die statistische Schlussweise typischen Gestalt ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion definiert als

$$P(\chi^2) = P\{s^2 > \chi^2\} = \int_{\chi^2}^{\infty} g(s^2) ds^2 \quad (10)$$

oder bei Überführung auf die unvollständige Gamma-Funktion

$$P(\chi^2) = 1 - I(u, p), \quad \text{mit } u = \frac{\chi^2}{2n} \quad \text{und } p = \frac{n}{2} - 1. \quad (11)$$

Die zur Sicherheitsschwelle P gehörige Sicherheitsgrenze $\chi^2(P; n)$ ist eine von der Wahrscheinlichkeit P und der Zahl der Freiheitsgrade n abhängige Grösse.

$$\chi^2(P; n)$$

n	P		
	0,05	0,01	0,001
10	18,307	23,209	29,588
30	43,773	50,892	59,703
50	67,505	76,154	86,685
100	124,342	135,807	149,487

Dabei leisten die Auflösung von (11) nach dem Argument $u(P; n)$ vermöge der Bestimmungsgleichung

$$I\left(u, \frac{n}{2} - 1\right) = 1 - P$$

und die nachherige Substitution

$$\chi^2(P; n) = \sqrt{2n} u(P; n)$$

gute Dienste.

24 Charakteristische Funktion

Aus

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\chi^2}{2}(1-2it)} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

gewinnt man für die charakteristische Funktion vermöge der Transformation

$$u = \frac{\chi^2}{2}(1-2it)$$

die Beziehung

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}. \quad (12)$$

25 Grenzverhalten

Die bereits früher ausgesprochene Vermutung, es bestehe ein Zusammenhang zwischen der χ^2 -Verteilung und der Normalverteilung, soll jetzt durch das asymptotische Verhalten von $g(\chi^2)$ abgeklärt werden. Letzteres untersuchen wir anhand der auf die standardisierte Variable ¹⁾

$$z = \frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}$$

transformierten Häufigkeitsfunktion, die nunmehr an Stelle von (7) die Gestalt annimmt

$$g(z) = \frac{m^{m^2}}{\Gamma(m^2)} e^{-m(z+m)} (z+m)^{m^2-1}, \quad (13)$$

$$\text{mit } 0 \leq z < \infty \text{ und } m = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Wir ziehen die ihr zugeordnete Verteilungsfunktion

$$F_m(z) = \int_0^z g(s) ds$$

¹⁾ n ist der Durchschnitt und $2n$ die Streuung der χ^2 -Verteilung.

sowie die zugehörige charakteristische Funktion ¹⁾

$$\varphi_m(t) = e^{-imt} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-m^2} \quad (14)$$

in Betracht; mit dem Index m wird jeweils die Abhängigkeit von der Zahl der Freiheitsgrade n auf Grund der Beziehung $m = \sqrt{\frac{n}{2}}$ zum Ausdruck gebracht. Zur Abklärung des Grenzverhaltens stützen wir uns auf den fundamentalen Konvergenzsatz:

Die Folge der Verteilungsfunktionen $\{F_m(z)\}$ konvergiert dann und nur dann gegen eine Grenz-Verteilungsfunktion $F(z)$, falls die zugehörige Folge der charakteristischen Funktionen $\{\varphi_m(t)\}$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion $\varphi(t)$ konvergiert; dabei ist $\varphi(t)$ die charakteristische Funktion der Grenz-Verteilungsfunktion $F(z)$.

Auf unsere Problemlage übertragen, lautet die Aussage:

Die Konvergenz der χ^2 -Verteilung gegen die Normalverteilung findet dann statt, falls die Folge der charakteristischen Funktionen

$$\varphi_m(t) = e^{-imt} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-m^2}$$

gleichmässig gegen die Grenzfunktion

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

konvergiert, die nach (6) die charakteristische Funktion der Normalverteilung in der Standardform darstellt.

Die gleichmässige Konvergenz ist gesichert, falls zu jedem noch so klein vorgeschriebenen positiven ε hinreichend grosse m existieren, so dass für alle t

$$\Delta = |\varphi_m(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

¹⁾ Die auf die standardisierte Variable $z = \frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}}$ transformierte charakteristische Funktion $\varphi_z(t)$ ergibt sich aus (12) vermöge der Relation

$$\begin{aligned} \varphi_z(t) &= e^{-in\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)} \varphi_{\chi^2}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = e^{-i\sqrt{\frac{n}{2}}t} \left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= e^{-imt} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-m^2}, \quad \text{mit } m = \sqrt{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Eine Erweiterung von Δ ergibt

$$(t) - \varphi(t) = e^{-imt} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - \left(1 + \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}},$$

oder passend zusammengefasst

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) - \varphi(t) &= \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \\ &\quad \cdot \left[e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{imt}{2}} \left(1 + \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Führen wir die Abkürzungen

$$\Delta_1 = \left| \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|,$$

$$\Delta_2 = \left| e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \left[e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{imt}{2}} \left(1 + \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \right] \right|$$

ein, so wird

$$|\varphi_m(t) - \varphi(t)| \leq \Delta_1 + \Delta_2. \quad (15)$$

Der rechtsseitige Ausdruck hat jetzt mit wachsendem m beliebig klein zu werden, eine Beziehung, die wir für beide Bestandteile Δ_1 und Δ_2 getrennt nachweisen.

Abschätzung von Δ_1

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ lassen sich stets ein T_1 und M_1 so finden, dass

$$e^{-\frac{T_1^2}{2}} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{T_1^2}{M_1^2}\right)^{-\frac{M_1^2}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}$$

ausfallen. Zunächst folgt für $t \geq T_1$ und $m > M_1$

$$\Delta_1 = \left| \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} + e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \left(1 + \frac{T_1^2}{M_1^2}\right)^{-\frac{M_1^2}{2}} + e^{-\frac{T_1^2}{2}}$$

und der vorgegebenen Begrenzungen wegen

$$\Delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } t \geq T_1 \text{ und } m > M_1. \quad (16)$$

Im Bereich $t < T_1$ ist ferner für m stets eine Schranke $m > M_2 > T_1$ angebbar, welche der Ungleichung

$$\frac{T_1^4}{2(M_2^2 - T_1^2)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

genügt. Wird auf Δ_1 der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \xi = x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

in der speziellen Form

$$|x_2^\alpha - x_1^\alpha| \leq |\alpha| |x_2 - x_1| \text{Max. } |\xi|^{\alpha-1}$$

angewendet, so gilt

$$\begin{aligned} \Delta_1 \leq \left| \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{t^2}{m^2} \left(-\frac{m^2}{2}\right)} \right| &\leq \left| \frac{m^2}{2} \right| \left| \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right) - e^{\frac{t^2}{m^2}} \right| |\xi|^{-\left(\frac{m^2}{2} + 1\right)}; \\ \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right) &< \xi < e^{\frac{t^2}{m^2}}, \quad |\xi| > 1. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck formen wir passend um. Unter Berücksichtigung von

$$\left| \frac{1}{\xi} \right|^{\left(\frac{m^2}{2} + 1\right)} < 1$$

und

$$(1 + x) < e^x < \frac{1}{1 - x}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

gelangen wir zur verstärkten Ungleichung

$$\Delta_1 \leq \frac{m^2}{2} \left| \frac{1}{1 - \frac{t^2}{m^2}} - \left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right) \right| = \frac{t^4}{2(m^2 - t^2)} \leq \frac{T_1^4}{2(M_2^2 - T_1^2)};$$

oder zufolge der festgesetzten Abgrenzung zu

$$\Delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } t < T_1 \text{ und } m > M_2. \quad (17)$$

Abschätzung von Δ_2

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir jetzt ein T_2 und M_3 derart, dass

$$e^{T_2^3} > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^4 \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{T_2^2}{M_3^2}\right)^{M_3^2} > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^4.$$

Für $t \geq T_2$ und $m > M_3$ gilt zunächst

$$\Delta_2 = \frac{1}{\left|1 - \frac{it}{m}\right|^{m^2}} e^{-\frac{imt}{2}} \left| e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{imt}{2}} \left(1 + \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \right|.$$

Vermittels der Beziehungen

$$\left| e^{-\frac{imt}{2}} \right| = 1, \quad \frac{1}{\left|1 + \frac{it}{m}\right|^{m^2}} < 1$$

und

$$\left| e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{imt}{2}} \left(1 + \frac{it}{m}\right)^{-\frac{m^2}{2}} \right| < 2$$

erhalten wir für Δ_2 die Abschätzung

$$\Delta_2 < \frac{2}{\left|1 - \frac{it}{m}\right|^{m^2}} = \frac{2}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{t^2}{m^2}\right)^{m^2}}} \leq \frac{2}{\sqrt[4]{\left(1 + \frac{T_2^2}{M_3^2}\right)^{M_3^2}}},$$

$$\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } t \geq T_2 \text{ und } m > M_3. \quad (18)$$

Im weitem ist für m im Bereich $t < T_2$ stets eine Schranke $m > M_4 > T_2$ auffindbar, welche die Abgrenzung

$$\frac{T_2^3}{2M_4} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gestattet. Da die aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung resultierende Abschätzung auch für komplexwertige Funktionen Gültigkeit hat, kann Δ_2 unter Berücksichtigung schon gewonnener Beziehungen schrittweise wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left| e^{-\frac{imt}{2}} \right| \left| 1 - \frac{it}{m} \right|^{-\frac{m^2}{2}} \left| e^{-\frac{imt}{2}} \left(1 - \frac{it}{m} \right)^{-\frac{m^2}{2}} - e^{\frac{imt}{2}} \left(1 + \frac{it}{m} \right)^{-\frac{m^2}{2}} \right| \\ &\leq \left| \left(e^{\frac{it}{m}} \left(1 - \frac{it}{m} \right) \right)^{-\frac{m^2}{2}} - \left(e^{-\frac{it}{m}} \left(1 + \frac{it}{m} \right) \right)^{-\frac{m^2}{2}} \right| \\ &\leq \left| \frac{m^2}{2} \right| \left| e^{\frac{it}{m}} \left(1 - \frac{it}{m} \right) - e^{-\frac{it}{m}} \left(1 + \frac{it}{m} \right) \right| = m^2 \left| \sin \frac{t}{m} - \frac{t}{m} \cos \frac{t}{m} \right|. \end{aligned}$$

Beachten wir noch, dass

$$\left| \sin \frac{t}{m} \right| < \frac{|t|}{m}$$

und

$$1 - \cos \frac{t}{m} = 2 \sin^2 \frac{t}{2m} < \frac{t^2}{2m^2},$$

so nimmt Δ_2 die Gestalt an

$$\Delta_2 \leq \frac{|t|^3}{2m} \leq \frac{T_2^3}{2M_4},$$

$$\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für } t < T_2 \text{ und } m > M_4. \quad (19)$$

Zusammenfassend folgt aus (16), (17), (18), und (19) der Nachweis der gesuchten gleichmässigen Konvergenz, indem für alle t eine Schranke $M = \text{Max.}(M_1, M_2, M_3, M_4)$ existiert, so dass

$$|\varphi_m(t) - \varphi(t)| \leq \Delta_1 + \Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{für alle } m > M. \quad (20)$$

Die Folge der charakteristischen Funktionen $\varphi_m(t) = e^{-imt} \left(1 - \frac{it}{m} \right)^{-m^2}$

konvergiert gleichmässig gegen die Grenzfunktion $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, womit nach dem Konvergenzsatz auch der Grenzübergang der χ^2 -Verteilung in die Normalverteilung gesichert ist.

Die statistische Praxis ist daran interessiert, die soeben gewonnene Erkenntnis über das Grenzverhalten nutzbringend zu verwerten. Ist es möglich, Näherungsverfahren zu entwickeln, die es gestatten, für die χ^2 -Verteilung die zu einer Sicherheitsschwelle gehörende Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2)$ oder die einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit zugeordnete Sicherheitsgrenze $\chi^2(P; n)$ aus den entsprechenden Ansätzen

der Normalverteilung mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen? Tatsächlich sind konvergenzerzwingende Transformationen bekannt, so dass die transformierten Häufigkeitsfunktionen rascher durch die Normalverteilung approximiert werden dürfen, als dies bei $g(\chi^2)$ zutrifft. Nach *R.A.Fisher* [2] ist $\sqrt{2\chi^2}$ angenähert normal verteilt mit dem Durchschnitt $\sqrt{2n-1}$ und der Streuung 1, während nach *E.Wilson* und *M.Hilferty* [15] die transformierte Variable $\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{n}}$ angenähert normal verteilt ist mit dem Durchschnitt $\left(1 - \frac{2}{9n}\right)$ und der Streuung $\frac{2}{9n}$. Theoretisch wird diese Aussage aus dem Verhalten von Schiefe und Exzess [14] gefolgert.

Zusammenfassend gilt: die standardisierte Variable

$$z \sim \frac{\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}} \quad \text{nach Fisher}$$

$$z \sim \left[\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{n}} - \left(1 - \frac{2}{9n}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9n}}} \quad \text{nach Wilson/Hilferty} \quad (21)$$

ist angenähert normal verteilt mit dem Durchschnitt null und der Streuung eins.

Zu vorgegebenem χ^2 bestimmt sich nach (21) die normal verteilte Grösse z , und die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2)$ kann durch $\frac{1}{2}P(z)$ approximiert werden. Umgekehrt darf zu einer Wahrscheinlichkeit P die zugehörige normal verteilte Sicherheitsgrenze $z(2P)$ als bekannt vorausgesetzt werden, so dass jetzt die gesuchte Sicherheitsgrenze $\chi^2(P;n)$ aus

$$\chi^2(P;n) \sim \frac{1}{2} \left[z(2P) + \sqrt{2n-1} \right]^2 \quad \text{nach Fisher}$$

$$\chi^2(P;n) \sim n \left[z(2P) \sqrt{\frac{2}{9n}} + \left(1 - \frac{2}{9n}\right) \right]^3 \quad \text{nach Wilson/Hilferty} \quad (22)$$

berechenbar ist.

Über die Güte der Approximation orientieren nachstehende Zahlenwerte.

Approximation von $\chi^2(P;n)$

n	Genauer Ansatz χ^2	Ansatz <i>Fisher</i> χ_F^2	Ansatz <i>Wilson/ Hilferty</i> χ_W^2	Abweichung	
				$\chi^2 - \chi_F^2$	$\chi^2 - \chi_W^2$
$P = 0,05$					
20	31,410	31,125	31,402	0,285	0,008
60	79,082	78,796	79,079	0,286	0,003
100	124,342	124,056	124,339	0,286	0,003
$P = 0,01$					
20	37,566	36,734	37,591	0,832	— 0,025
60	88,379	87,583	88,397	0,796	— 0,018
100	135,807	135,023	135,820	0,784	— 0,013
$P = 0,001$					
20	45,328	43,573	45,440	1,755	— 0,112
60	99,615	97,985	99,681	1,630	— 0,066
100	149,487	147,868	149,504	1,619	— 0,017

Die Approximation nach *Wilson/Hilferty* zeigt eine auffallend gute Übereinstimmung mit den genauen Werten und erweist sich, verglichen mit dem Ansatz *Fisher*, als wirksamer.

3 t -Verteilung («*Student*»)

31 Häufigkeitsfunktion

Sind z eine standardisierte normal verteilte Variable und χ^2 eine von ihr stochastisch unabhängige Variable, die χ^2 -verteilt ist mit n Freiheitsgraden, so befolgt

$$t = \frac{z}{\chi} \sqrt{n}$$

die t -Verteilung [4]

$$h(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (23)$$

Der ganzzahlige Parameter n kennzeichnet die Zahl der Freiheitsgrade. Die Häufigkeitsfunktion $h(t)$ ist symmetrisch, nimmt glockenförmige

Gestalt an und weist in $t = \pm \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ Wendepunkte auf. Sie verläuft

im allgemeinen flacher als die Normalverteilung; mit zunehmender Zahl der Freiheitsgrade ist jedoch die Tendenz zur Normalität unverkennbar.

32 Verteilungsfunktion

Definitionsgemäss gilt

$$H(t) = \int_{-\infty}^t h(s) ds = 1 - \int_t^{\infty} h(s) ds. \quad (24)$$

Wegen der Beziehung $H(-t) = 1 - H(t)$ genügt es, den Fall $t > 0$ weiter zu verfolgen.

Für die Praxis ist die Bindung zur unvollständigen Beta-Funktion bedeutungsvoll. Die Substitution $v = \left(1 + \frac{s^2}{n}\right)^{-1}$ führt $H(t)$ über in

$$H(t) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-1}} v^{\frac{n}{2}-1} (1-v)^{-\frac{1}{2}} dv$$

oder

$$H(t) = 1 - \frac{1}{2} I_u\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{mit } u = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}}. \quad (25)$$

$I_u\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ stellt die nach *Pearson* tabellierte normierte unvollständige Beta-Funktion dar [10].

33 Wahrscheinlichkeitsfunktion

In Anlehnung an die früheren Betrachtungen definieren wir als Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(t) = P\{|s| > t\} = 2 \int_t^{\infty} h(s) ds \quad (26)$$

oder in Verbindung mit $H(t)$ bzw. $I_u\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$P(t) = 2(1 - H(t)) = I_u\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{mit } u = \frac{1}{1 + \frac{t^2}{n}}. \quad (27)$$

Diese Beziehung eignet sich gut für das Aufsuchen der Sicherheitsgrenzen $t(P; n)$ bei Vorgabe von P .

$t(P; n)$

n	P		
	0,05	0,01	0,001
10	2,228	3,169	4,587
30	2,042	2,750	3,646
50	2,008	2,678	3,496
100	1,984	2,626	3,390
∞	1,960	2,576	3,291

Aus der Bestimmungsgleichung

$$I_u\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = P$$

sucht man zunächst das Argument $u(P; n)$ auf, sodann erfolgt der Rückschluss auf $t(P; n)$ gemäss

$$t(P; n) = \sqrt{\frac{1 - u(P; n)}{u(P; n)}} n.$$

34 Charakteristische Funktion

Der Symmetrieeigenschaft $h(s) = h(-s)$ wegen fällt die charakteristische Funktion

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} h(s) ds$$

reell aus

$$\varphi(t) = \frac{2}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \int_0^{\infty} \frac{\cos ts}{\left(1 + \frac{s^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} ds.$$

Lüönd [6] gelang es, $\varphi(t)$ auf die modifizierte Besselsche Funktion $K_n(t)$, auf die sogenannte Hankelsche Funktion, überzuführen

$$\varphi(t) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{|t| \sqrt{n}}{2}\right)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(|t| \sqrt{n}). \quad (28)$$

Für die numerische Auswertung sind tabellierte Funktionswerte von $K_n(t)$ in *Bickley* [1] vorzufinden.

35 Grenzverhalten

Es wäre mühsam, die bereits angedeutete Konvergenz der t -Verteilung gegen die Normalverteilung aus dem Grenzverhalten der charakteristischen Funktion folgern zu wollen, analog dem Konvergenzkriterium für die χ^2 -Verteilung. Einfacher kann der Grenzübergang direkt anhand der Häufigkeitsfunktion

$$dH(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

vollzogen werden.

Wegen

$$B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad \text{da } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

und bei Approximation der Gamma-Funktion durch die Stirlingsche Formel

$$\Gamma(m) \sim \sqrt{2\pi} (m-1)^{m-\frac{1}{2}} e^{-(m-1)}$$

folgt unmittelbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ferner strebt $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ dem Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

zu, so dass schliesslich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} dH(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = dF(t). \quad (29)$$

Für die Praxis mag es erneut vorteilhaft sein, dieses Grenzverhalten zu verwerten. Existiert eine Näherungsbeziehung, die die Sicherheitsgrenze $t(P;n)$ durch jene der standardisierten Normalverteilung $z(P)$ auszudrücken gestattet? *A. M. Peiser* [13] vermittelt folgende Lösung

$$t(P;n) \sim z(P) + \frac{v_1[z(P)]}{n} + \frac{v_2[z(P)]}{n^2} + \dots \quad (30)$$

$$\text{mit } v_1[z(P)] = \frac{1}{4}[z^3(P) + z(P)],$$

$$v_2[z(P)] = \frac{1}{96}[5z^5(P) + 16z^3(P) + 3z(P)].$$

Über die Güte der Approximation orientiert nachstehende Übersicht.

Approximation von $t(P;n)$

n	Genauer Ansatz t	Ansatz <i>Peiser</i>		Abweichung	
		zweigliedrig t_{P_2}	dreigliedrig t_{P_3}	$t - t_{P_2}$	$t - t_{P_3}$
$P = 0,05$					
20	2,086	2,079	2,086	0,007	—
60	2,000	2,000	2,000	—	—
100	1,984	1,984	1,984	—	—
$P = 0,01$					
20	2,845	2,822	2,844	0,023	0,001
60	2,660	2,658	2,660	0,002	—
100	2,626	2,625	2,626	0,001	—
$P = 0,001$					
20	3,850	3,777	3,842	0,073	0,008
60	3,460	3,453	3,460	0,007	—
100	3,390	3,388	3,390	0,002	—

4 F -Verteilung (*Fisher*)

4.1 Häufigkeitsfunktion

Sind χ_1^2 und χ_2^2 zwei voneinander stochastisch unabhängige Veränderliche, die einzeln χ^2 -verteilt sind mit n_1 bzw. n_2 Freiheitsgraden, so unterliegt der Quotient

$$F = \frac{\chi_1^2}{n_1} : \frac{\chi_2^2}{n_2}$$

der von *Fisher* [3] begründeten F -Verteilung

$$k(F) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{F^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n_1}{n_2} F\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, \quad 0 \leq F < \infty. \quad (31)$$

Der beiden ganzzahligen Parameter $n_1 \geq 1$ und $n_2 \geq 1$ wegen, welche die Zahl der Freiheitsgrade verkörpern, weist $k(F)$ einen vielgestaltigen Verlauf auf. $k(F)$ ist für $n_1 \leq 2$ monoton fallend und für $n_1 > 2$ asymmetrisch verteilt mit einem in $F = \frac{n_2(n_1 - 2)}{n_1(n_2 + 2)}$ gelegenen Maximum. Als natürliche Grenzlage besteht eine Bindung zur χ^2 -Verteilung.

42 Verteilungsfunktion

Für die Verteilungsfunktion

$$K(F) = \int_0^F k(s) ds = 1 - \int_F^\infty k(s) ds \quad (32)$$

deckt die Substitution $v = \left(1 + \frac{n_1}{n_2} s\right)^{-1}$ den Zusammenhang auf mit der normierten unvollständigen Beta-Funktion:

$$\text{für } n_2 \geq n_1 \quad K(F) = 1 - I_u\left(\frac{n_2}{2}, \frac{n_1}{2}\right), \quad \text{mit } u = \frac{1}{1 + \frac{n_1}{n_2} F}; \quad (33)$$

$$\text{für } n_2 < n_1 \quad K(F) = I_{1-u}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right), \quad \text{mit } 1-u = \frac{\frac{n_1}{n_2} F}{1 + \frac{n_1}{n_2} F}. \quad (34)$$

43 Wahrscheinlichkeitsfunktion

Als Wahrscheinlichkeitsfunktion definieren wir

$$P(F) = P\{s > F\} = \int_F^\infty k(s) ds, \quad (35)$$

oder in Verbindung mit $K(F)$ bzw. $I_u\left(\frac{n_2}{2}, \frac{n_1}{2}\right)$

$$P(F) = 1 - K(F) = I_u\left(\frac{n_2}{2}, \frac{n_1}{2}\right), \quad \text{für } n_2 \geq n_1; \quad (36)$$

$$P(F) = 1 - I_{1-u}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right), \quad \text{für } n_2 < n_1.$$

Wiederum gestattet die Inversion von (36), d.h. das Aufsuchen von $u(P; n_1, n_2)$, die zur F -Verteilung gehörigen Sicherheitspunkte $F(P; n_1, n_2)$ auf zweckmässige Art mittels des Ansatzes

$$F(P; n_1, n_2) = \frac{n_2}{n_1} \frac{1 - u(P; n_1, n_2)}{u(P; n_1, n_2)} \quad \text{zu bestimmen.}$$

44 Charakteristische Funktion

Die Weiterentwicklung der Definitionsgleichung

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{itF} k(F) dF$$

führt auf eine Darstellung durch Prymsche Funktionen mit komplexen Argumenten [6]

$$\varphi(t) = \frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \binom{\frac{n_1}{2} - 1}{\lambda} \psi\left(-it \frac{n_2}{n_1}, \frac{n_2}{2} + \lambda\right). \quad (37)$$

45 Grenzverhalten

Mit der speziellen Wahl $n_1 = n$ und $n_2 \rightarrow \infty$ vollzieht sich der Grenzübergang von $k(F)$ in $g(\chi^2)$, eine Behauptung, die sich direkt auf Grund der Häufigkeitsfunktion nachweisen lässt.

$$dK(F) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{1}{\frac{n_2}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\left(\frac{nF}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\left(1 + \frac{n}{n_2}F\right)^{\frac{n+n_2}{2}}} d\left(\frac{nF}{2}\right).$$

Zunächst gilt die Umformung

$$\begin{aligned} \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{1}{\frac{n_2}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left(\frac{n_2}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{2}{n_2}\right) \left(1 + \frac{2 \cdot 2}{n_2}\right) \dots \left(1 + \frac{2\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{n_2}\right), \end{aligned}$$

so dass

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Im weitem strebt

$$\left(1 + \frac{n}{n_2} F\right)^{-\frac{n+n_2}{2}} = \left(1 + \frac{n}{n_2} F\right)^{-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{\frac{nF}{2}}{\frac{n_2}{2}}\right)^{-\frac{n_2}{2}}$$

dem Grenzwert

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n_2} F\right)^{-\frac{n+n_2}{2}} = e^{-\frac{nF}{2}}$$

zu. Demnach folgt

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} dK(F) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{nF}{2}} \left(\frac{nF}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} d\left(\frac{nF}{2}\right)$$

oder mit der Substitution $nF = \chi^2$

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} dK\left(\frac{\chi^2}{n}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right) = dG(\chi^2). \quad (38)$$

Bezüglich der Sicherheitsgrenzen gilt also insbesondere die Bindung

$$nF(P; n, \infty) \sim \chi^2(P; n), \quad (39)$$

wie man leicht numerisch überprüft.

n	P	$nF(P; n, \infty)$	$\chi^2(P; n)$
1	0,05	3,841	3,841
	0,01	6,635	6,635
	0,001	10,826	10,827
24	0,05	36,408	36,415
	0,01	42,984	42,980
	0,001	51,168	51,179

Abschliessend sei noch auf den Spezialfall $n_1 = 1$ und $n_2 = n$ hingewiesen, der die Brücke zur t -Verteilung schlägt:

$$dK(F) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \sqrt{n}} \frac{F^{-\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{F}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} dF$$

oder mit der Substitution $F = t^2$

$$dK(t^2) = 2 \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \sqrt{n}} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = 2dH(t). \quad (40)$$

Speziell sind die Sicherheitsgrenzen gemäss der Beziehung

$$F(P; 1, n) \sim t^2(P; n) \quad (41)$$

gekoppelt, deren Richtigkeit numerisch nachgewiesen werden kann.

n	P	$F(P; 1, n)$	$t^2(P; n)$
10	0,05	4,965	4,964
	0,01	10,044	10,043
	0,001	21,039	21,041
25	0,05	4,242	4,244
	0,01	7,770	7,767
	0,001	13,875	13,876

Literaturverzeichnis

- [1] *Bickley, G.*: Math. Gazette. Vol. 23–25, 1939/1941. Philosophical Magazine. Vol. 7, 1943.
- [2] *Fisher, R.A.*: Statistical Methods for Research Workers. Oliver and Boyd, London, 1941.
- [3] *Fisher, R.A.*: Contributions to Mathematical Statistics. New York, 1950.
- [4] *Gosset, W.S.* («Student»): The probable error of a mean. Biometrika. Vol. 6, 1908.
- [5] *Lehmann, A.*: Über die Inversion des Gausschen Wahrscheinlichkeitsintegrals. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. H. 38, 1939.
- [6] *Lüönd, K.G.*: Die Prüfverteilungen in der mathematischen Statistik. Dissertation. Universität Bern. 1954.
- [7] *National Bureau of Standards*: Tables of Probability Functions. Vol. I and II, 1941 and 1948.
- [8] *Pearson, K.*: On the criterion that a given system of deviations from the probable, in the case of a correlated system of variables, is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. Philosophical Magazine. Vol. 1, 1900.
- [9] *Pearson, K.*: Tables for Statisticians and Biometricians. Part I. Third Edition, 1930.
- [10] *Pearson, K.*: Tables of the Incomplete Beta-Function. University Press, Cambridge, 1934.
- [11] *Pearson, K.*: Tables of the Incomplete Gamma-Function. University Press, Cambridge. Re-issue, 1946.
- [12] *Pearson, E.S.* and *Hartley, H.O.*: Biometrika Tables for Statisticians. Vol. I, 1954.
- [13] *Peiser, A.M.*: Asymptotic Formulas for significance levels of certain distributions. Annals of Mathematical Statistics. Vol. 12, 1932.
- [14] *Wegmüller, W.*: Begründung und Anwendung theoretischer Prüfverfahren in der Ausgleichsrechnung. Habilitationsschrift. Bern, 1948.
- [15] *Wilson, E.* and *Hilferty, M.*: The Distribution of Chi-Square. Proceedings of the National Academy of Sciences. Vol. 17, 1931.