

# Beiträge zur Theorie linearer Reserven

Autor(en): **Rufener, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer  
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires  
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966800>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Beiträge zur Theorie linearer Reserven

Von *E. Rufener*, Zürich

### 1. Linearer Reserveverlauf für die gemischte Versicherung mit festem Schlussalter bei kontinuierlicher Darstellung

Das Deckungskapital der gemischten Versicherung hat bekanntlich genau dann für jedes beliebige Schlussalter in Funktion der abgelaufenen Versicherungsdauer  $t$  linearen Verlauf, wenn die diskontierte Überlebensordnung  $f(x) = e^{-\delta x} l(x)$  eine Konstante ist. Falls linearer Verlauf nur für ein wohlbestimmtes Schlussalter  $s$  vorausgesetzt wird, kann aus der Kenntnis der partikulären «Lösung»  $f(x) = \text{konstant}$  eine einparametrische Schar von «diskontierten» SterbeGesetzen hergeleitet werden, welche für das nämliche Schlussalter zu einer linearen Reserve gehören [1]. Ein Verfahren zur direkten Bestimmung der Überlebensordnungen mit einem für dasselbe Schlussalter linearen Reserveverlauf wird nachfolgend beschrieben.

Da für die gemischte Versicherung (Schlussalter  $s$ )

$${}_tV_{x:s-x} = 1 - \frac{\bar{a}_{x+t:s-x-t}}{\bar{a}_{x:s-x}}, \quad (0 \leq t \leq s-x; 0 \leq x < s)$$

ist, hat bei linearem Reserveverlauf

$${}_tV_{x:s-x} = \frac{t}{s-x} \quad (0 \leq t \leq s-x; 0 \leq x < s, s > 0 \text{ fest}) \quad (1)$$

die «diskontierte» Überlebensordnung

$$f(x) = e^{-\delta x} l(x)$$

der Relation

$$f(x) \int_0^{s-x-t} f(x+t+\xi) d\xi = \left(1 - \frac{t}{s-x}\right) f(x+t) \int_0^{s-x} f(x+\xi) d\xi$$

zu genügen. Durch Ableiten nach  $t$  schliessen wir auf

$$-f(x) f(x+t) = \left[ \left(1 - \frac{t}{s-x}\right) f'(x+t) - \frac{f(x+t)}{s-x} \right] \int_0^{s-x} f(x+\xi) d\xi$$

und hieraus,  $t = 0$  gesetzt, auf die Integrodifferentialgleichung

$$\left[ f'(x) - \frac{f(x)}{s-x} \right] \int_0^{s-x} f(x+\xi) d\xi = -f^2(x), \quad (2)$$

welche  $f(x)$  bestimmt. (2) reduziert sich durch Ableiten und elementares Umformen auf die Differentialgleichung

$$f''(x) f(x) - f'^2(x) - \frac{1}{s-x} f'(x) f(x) = 0$$

oder

$$\frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{s-x} \frac{f'(x)}{f(x)} = 0,$$

welche mit Hilfe des Ansatzes

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \zeta(x)$$

integriert wird. Man erhält

$$\zeta(x) = -\frac{\lambda}{s-x}$$

und hieraus

$$\boxed{f(x) = k(s-x)^\lambda, \quad (\lambda \geq 0^1)} \quad (3)$$

<sup>1)</sup>  $f'(x) \leq 0, 0 \leq x \leq s$ , d.h.  $\lambda \geq 0$ .

Durch die lineare Reservefunktion (1) wird als «diskontierte» Überlebensordnung eine einparametrische Parabelschar mit Scheitel in  $(s, 0)$  bestimmt <sup>1)</sup>. Die Umkehrung, wonach die Funktionen (3) ein lineares Deckungskapital bestimmen, ist durch elementare Rechnung verifizierbar. Für Funktionen der Schar (3) ist nämlich

$$\bar{a}_{x:s-\bar{x}} = \int_0^{s-x} \frac{f(x+\xi)}{f(x)} d\xi = \int_0^{s-x} \left(1 - \frac{\xi}{s-x}\right)^\lambda d\xi = \frac{s-x}{\lambda+1},$$

wodurch die Behauptung evident wird.

**Satz 1.** *Notwendig und hinreichend dafür, dass die (kontinuierlich ermittelte) Reserve einer gemischten Versicherung mit festem Schlussalter  $s$  linear verläuft, ist die Darstellbarkeit*

– der diskontierten Zahlen durch die Parabel

$$f(x) = \begin{cases} k(s-x)^\lambda, & (\lambda \geq 0), \quad 0 \leq x \leq s \\ 0 & , \quad x \geq s \end{cases} \quad (3)$$

– der Überlebensordnung durch

$$l(x) = \begin{cases} k e^{\delta x} (s-x)^\lambda, & \left(\lambda \geq 0, \delta \leq \frac{\lambda}{s}\right), \quad 0 \leq x \leq s \\ 0 & , \quad x \geq s \end{cases} \quad (3')$$

In Figur 1a sind Funktionen der Schar

$$(3) \quad f(x) = k(s-x)^\lambda, \quad (\lambda \geq 0)$$

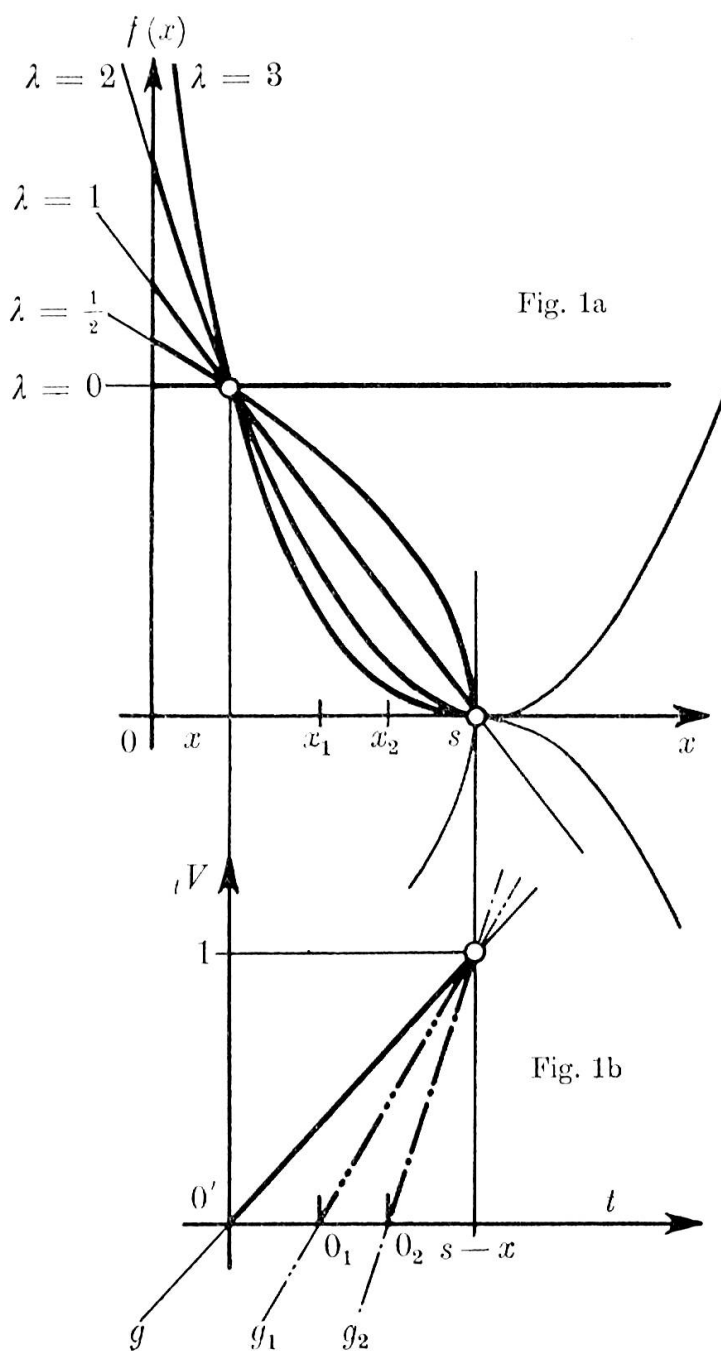
dargestellt. Die Normierungskonstanten  $k$  sind für die einzelnen Scharcurven derart gewählt, dass sich zu einem bestimmten Alter  $x$  dieselben Funktionswerte ergeben.  $f(x)$  fällt monoton für  $\lambda > 0$  und ist

in  $0 \leq x \leq s$   $\begin{cases} \text{strikte konvex}^2), & \text{falls } \lambda > 1 \\ \text{konkav,} & \text{falls } 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \cdot \frac{1}{f(x)}$  ist überdies

im Intervall  $0 \leq x \leq s$  logarithmisch konvex.

<sup>1)</sup> Zur praktischen Bestimmung des Exponenten  $\lambda$  vgl. [1] sowie die diesbezüglichen Ausführungen in [2].

<sup>2)</sup> Die zweimal differenzierbare Funktion  $f(x)$  wird im Intervall  $(x_1, x_2)$  als strikte konvex bezeichnet, wenn dort  $f''(x) > 0$ .



Figur 1b zeigt den durch die Funktionen (3) erzeugten Reserveverlauf. Den Abschlussaltern  $x$ ,  $x_1$  und  $x_2$  sind dabei die Reservegeraden  $g$ ,  $g_1$  und  $g_2$  zugeordnet.

Die Überlebensordnung

$$l(x) = k e^{\delta x} (s - x)^\lambda, \quad (\lambda \geq 0)$$

fällt im Intervall  $0 < x < s$  monoton, falls  $\lambda$  und Zinsintensität  $\delta$  der Relation

$$\delta \leq \frac{\lambda}{s}$$

genügen <sup>1)</sup>).

Da aus 
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{s-x} = \mu(x) + \delta$$

$$(x-s)(\mu + \delta) = \xi \eta = -\lambda, \quad \begin{cases} x-s = \xi \\ \mu + \delta = \eta \end{cases}$$

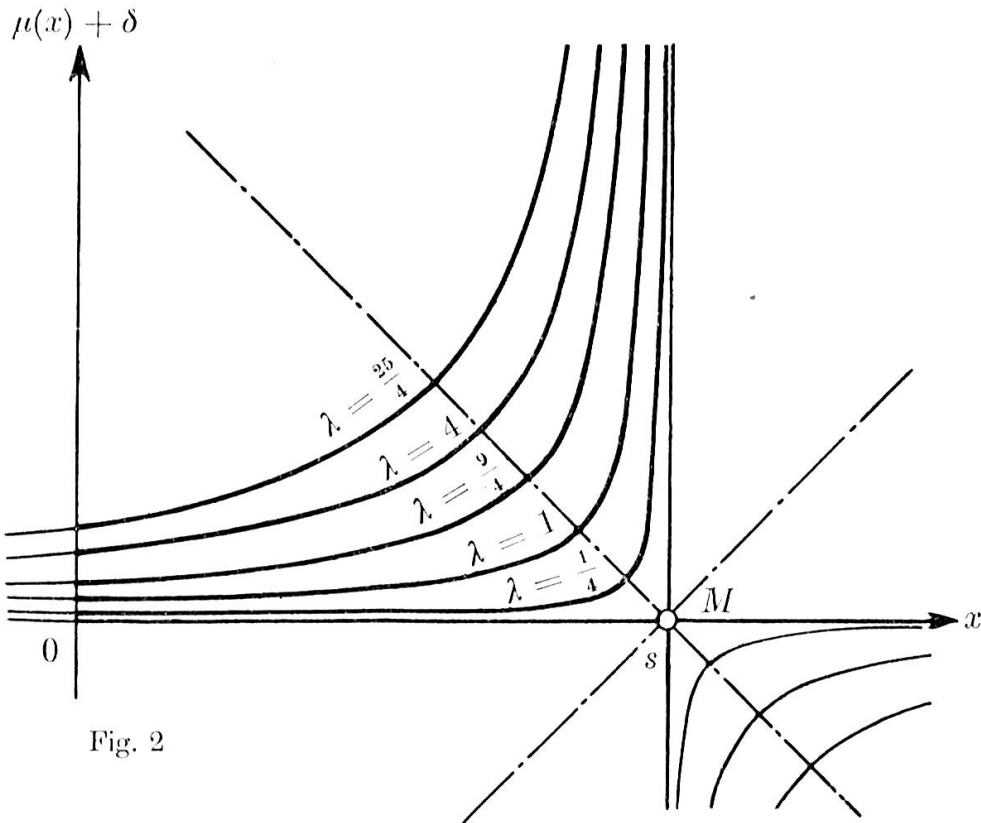


Fig. 2

<sup>1)</sup> Da  $l'(x) = k e^{\delta x} (s-x)^{\lambda-1} [\delta(s-x) - \lambda]$ , verschwindet die Ableitung in  $x_1 = s - \frac{\lambda}{\delta}$  und falls  $\lambda > 1$  auch in  $x_2 = s$ . Die an  $l(x)$  zu stellende Forderung eines monoton fallenden Verlaufes schliesst die Existenz eines Extremums im Innern des Intervalles  $0 < x < s$  aus, d. h. es ist entweder  $x_1 = s - \frac{\lambda}{\delta} \leq 0$ , mithin  $\delta > 0$  und  $\frac{\lambda}{\delta} \geq s$ , also  $\delta \leq \frac{\lambda}{s}$ , ( $\lambda > 0$ ) oder  $x_1 = s - \frac{\lambda}{\delta} \geq s$ , mithin  $\frac{\lambda}{\delta} \leq 0$ , also  $\delta < 0$ . Zu  $\lambda = 0$  gehört ein  $\delta < 0$ . Falls gleichzeitig  $\lambda = 0$  und  $\delta = 0$ , wird  $l(x) = \text{konstant}$ .

bestimmen die zu (3) gehörenden Sterbensintensitäten eine einparametrische Schar gleichseitiger Hyperbeln mit Mittelpunkt  $M(s, -\delta)$  und achsenparallelen Asymptoten (Fig. 2).  $\mu(x) = \frac{\lambda}{s-x} - \delta$  steigt in  $0 \leq x < s$  monoton und ist in diesem Intervall konvex (beliebig hoher Ordnung).

## 2. Linearer Reserveverlauf für die gemischte Versicherung mit festem Schlussalter bei diskontinuierlicher Darstellung

Bei der diskontinuierlichen Darstellungsweise gilt im Falle linearen Reserveverlaufes für die gemischte Versicherung mit festgehaltenem Schlussalter  $s$ , ( $s$  ganz)

$$1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:s-x-t}}{\ddot{a}_{x:s-x}} = \frac{t}{s-x}, \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq t \leq s-x; \\ 0 \leq x < s, \quad s > 0 \text{ fest} \end{array} \right). \quad (4)$$

Mit 
$$\ddot{a}_{x:s-x} = \sum_{\nu=0}^{s-x-1} \frac{f(x+\nu)}{f(x)}$$

lässt sich (4) in der Form

$$f(x) \sum_{\nu=0}^{s-x-t-1} f(x+t+\nu) = \left(1 - \frac{t}{s-x}\right) f(x+t) \sum_{\nu=0}^{s-x-1} f(x+\nu) \quad (5)$$

schreiben. Ersetzt man darin  $t$  durch  $t+1$  und subtrahiert beide Relationen (5) voneinander, so gewinnt man

$$\begin{aligned} -f(x)f(x+t) &= \left(1 - \frac{t}{s-x}\right) [f(x+t+1) - f(x+t)] \sum_{\nu=0}^{s-x-1} f(x+\nu) - \\ &\quad - \frac{f(x+t+1)}{s-x} \sum_{\nu=0}^{s-x-1} f(x+\nu) \end{aligned}$$

und für  $t = 0$

$$f^2(x) = \left[ f(x) - \frac{s-x-1}{s-x} f(x+1) \right] \sum_{\nu=0}^{s-x-1} f(x+\nu).$$

Durch Differenzenbildung erhält man hieraus nach einigen Umformungen für  $f(x)$  die nicht lineare Differenzgleichung

$$(s-x-1) [f(x+2)f(x) - f^2(x+1)] - f(x+2)f(x) + f(x+1)f(x) = 0, \quad (6)$$

welche vermöge des Ansatzes

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = g(x) \quad (7)$$

in eine lineare inhomogene für  $g(x)$ ,

$$g(x+1) - \frac{s-x-1}{s-x-2} g(x) = \frac{1}{s-x-2}, \quad (8)$$

und nach der Substitution

$$\varphi(x) = (s-x-1) g(x)$$

in die besonders einfache Form

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = A \varphi(x) = -1 \quad (9)$$

übergeht.

$$\varphi_1(x) = A - x$$

ist Partikularlösung von (9) und die beliebige periodische Funktion

$$\varphi_0(x) = \pi(x), \quad \pi(x+1) = \pi(x)$$

allgemeine Lösung der (9) zugeordneten homogenen Gleichung.

$$\varphi(x) = A - x + \pi(x)$$

ist demnach allgemeine Lösung von (9) und

$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{s-x-1} = \frac{A-x}{s-x-1} + \frac{\pi(x)}{s-x-1} = 1 + \frac{k + \pi(x)}{s-x-1} \quad (10)$$

( $A = s-1+k$  gesetzt) allgemeine Lösung von (8).



Über die Lösungsfunktion  $g(x)$  setzen wir im Hinblick auf ihre Bedeutung als diskontierte einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit neben stetiger Differenzierbarkeit monoton nicht wachsenden Verlauf voraus.  $\pi(x)$  ist in (10) mithin als Konstante zu wählen <sup>1)</sup>:

$$g(x) = \frac{\sigma - x - 1}{s - x - 1} = 1 - \frac{\lambda}{s - x - 1}, \quad (\sigma = s - \lambda, \lambda \geq 0^2). \quad (11)$$

<sup>1)</sup> Ist  $\pi(x)$  in (10) von einer Konstanten verschieden, so wird die Monotonie der Lösungsfunktion zerstört. Um dies einzusehen, untersuchen wir den Verlauf der auf das Koordinatensystem

$$O'(\xi, \eta), \quad \begin{cases} \xi = s - 1 - x \\ \eta = g(x) - 1 \end{cases}$$

bezogenen Lösungsfunktion

$$\eta(\xi) = \frac{k + \bar{\pi}(\xi)}{\xi}.$$

Die periodische Funktion  $\bar{\pi}(\xi)$  sei im Fundamentalintervall beschränkt,

$$|k + \bar{\pi}(\xi)| < M,$$

und stetig differenzierbar. Zu jedem Fundamentalintervall gehören daher mindestens eine Nullstelle der Ableitung  $\eta'(\xi)$ , sowie zwei Argumente  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , in denen  $\eta'(\xi)$  die Werte  $+\varepsilon$  und  $-\varepsilon$  annimmt.

Wählt man nun 
$$\xi > \frac{4M}{\varepsilon}, \quad (12)$$

dann folgt aus 
$$\eta'(\xi) = \frac{\bar{\pi}'(\xi)}{\xi} - \frac{k + \bar{\pi}(\xi)}{\xi^2}$$

$$\left| \eta'(\xi) - \frac{\bar{\pi}'(\xi)}{\xi} \right| < \frac{\varepsilon}{4\xi}$$

oder 
$$\frac{\bar{\pi}'(\xi)}{\xi} - \frac{\varepsilon}{4\xi} < \eta'(\xi) < \frac{\bar{\pi}'(\xi)}{\xi} + \frac{\varepsilon}{4\xi}.$$

Für zwei Argumente  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , welche Bedingung (12) erfüllen, ist mithin

$$\eta'(\xi_1) > \frac{3\varepsilon}{4\xi} > 0$$

und 
$$\eta'(\xi_2) < -\frac{3\varepsilon}{4\xi} < 0,$$

woraus auf den nicht monotonen Verlauf der Lösungsfunktion  $\eta(\xi)$  geschlossen wird.

<sup>2)</sup>  $\lambda \geq 0$  aus  $g'(x) \leq 0$ .

Das Bild der Funktion  $g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$  ist eine gleichseitige Hyperbel

$$\xi \eta = \lambda, \quad \begin{cases} \xi = x - s + 1 \\ \eta = g(x) - 1 \end{cases}$$

mit Mittelpunkt  $M(s-1, 1)$  und achsenparallelen Asymptoten (Fig. 3). Zur Veranschaulichung der einjährigen diskontierten Überlebenswahrscheinlichkeiten ist nur der über dem Intervall  $0 \leq x \leq \sigma - 1$  liegende Hyperbelbogen  $AB$  geeignet;  $\sigma$  ist Höchstalter der Überlebensordnung.

Unter Berücksichtigung von (7) und (11) erhält man für die diskontierte Überlebensordnung die homogene lineare Differenzgleichung erster Ordnung

$$f(x+1) = \left(1 - \frac{\lambda}{s-x-1}\right) f(x) = \frac{\sigma-x-1}{s-x-1} f(x), \quad (\sigma = s - \lambda) \quad (13)$$

mit der Lösung

$$f(x) = k \frac{\Gamma(s-\lambda)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(s-\lambda-x)} = k \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(\sigma-x)}, \quad ^1) \quad (14)$$

$$(\sigma = s - \lambda, \lambda \geq 0)$$

Satz 2. Verläuft die Reserve einer gemischten Versicherung mit festem Schlussalter  $s$  in  $t$  linear, dann ist

– die diskontierte Zahl  $D_x$  durch

$$f(x) = \begin{cases} k \frac{\Gamma(s-\lambda)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(s-\lambda-x)}, & (\lambda \geq 0), \quad 0 \leq x \leq s - \lambda = \sigma \\ 0, & x \geq s - \lambda = \sigma \end{cases} \quad (14)$$

$$^1) \quad f(x) = k \left(1 - \frac{\lambda}{s-x}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{s-x+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{s-1}\right), \quad \text{falls } x \text{ ganz}$$

$$f(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{s-\lambda}\right), \quad \text{falls } \lambda \text{ ganz}$$

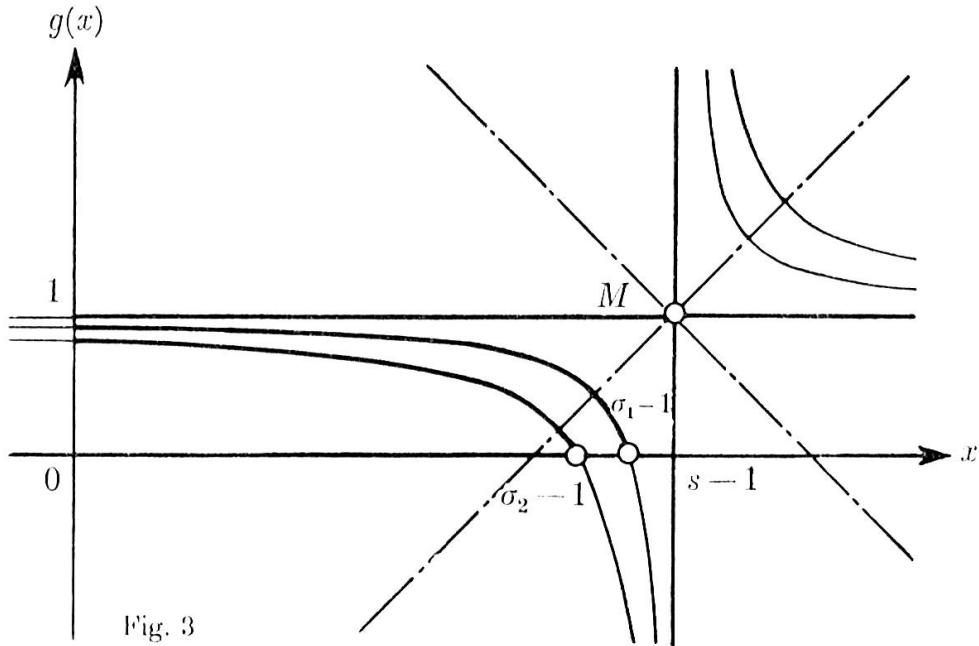


Fig. 3

– die Überlebensordnung durch

$$l(x) = \begin{cases} k e^{\delta x} \frac{\Gamma(s-\lambda)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(s-\lambda-x)}, & (\lambda \geq 0, \delta \leq \delta^{*1}), \quad 0 \leq x \leq s-\lambda = \sigma \\ 0, & x \geq s-\lambda = \sigma \end{cases} \quad (14')$$

gegeben. Dabei ist

<sup>1)</sup> Aus der Voraussetzung des monoton fallenden Verlaufes von  $l(x)$  im Intervall  $0 < x < s-\lambda$ , ( $\lambda > 0$ ),

$$l'(x) = e^{\delta x} [\delta l(x) + l'(x)] < 0,$$

folgt unter Berücksichtigung von (15)

$$l'(x) = l(x) [\delta + \psi(s-\lambda-x) - \psi(s-x)] < 0,$$

woraus auf  $\delta < \psi(s-x) - \psi(s-\lambda-x) = \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s-\lambda-x+v} - \frac{1}{s-x+v} \right)$

und wegen des in  $x$  monoton wachsenden Verlaufes der rechts stehenden Summe

$$\delta \leq \sum_{v=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s-\lambda+v} - \frac{1}{s+v} \right) = \delta^*$$

zu schliessen ist. Bei ganzzahligem  $\lambda$  ist insbesondere in Übereinstimmung mit (23)

$$\delta \leq \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \dots + \frac{1}{s-\lambda}.$$

$$\delta^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s-\lambda+\nu} - \frac{1}{s+\nu} \right).$$

Die Lösungsfunktion (14) ist im Intervall  $x < \sigma$  positiv;  $x = \sigma$  ist (kleinste) Nullstelle und spielt deshalb – wie bereits darauf hingewiesen – in unseren Betrachtungen die Rolle des Höchstalters der Überlebensordnung.

Aus 
$$f'(x) = f(x) \left\{ \psi(\sigma-x) - \psi(s-x) \right\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{s-x+\nu} - \frac{1}{\sigma-x+\nu} \right) < 0, \quad (x < \sigma) \quad 1)$$
 (15)

und 
$$f'(\sigma) = k \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(s-\sigma)}{\Gamma(s)} \lim_{x \rightarrow \sigma} \frac{\psi(\sigma-x)}{\Gamma(\sigma-x)} =$$

$$= -k \frac{\Gamma(\sigma) \Gamma(s-\sigma)}{\Gamma(s)} < 0 \quad 2)$$
 (15')

folgt, dass  $f(x)$  im Intervall  $x \leq \sigma$  monoton fällt.

1) Für die logarithmischen Ableitungen der Gammafunktion

$$\psi(a) = \frac{d}{da} \log \Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

und 
$$\psi'(a) = \left( \frac{d}{da} \right)^2 \log \Gamma(a)$$

gelten die aus dem Weierstrassschen Produkt hergeleiteten Reihendarstellungen

$$\psi(a) + C = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+a} \right),$$

$$\psi'(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+a)^2}.$$

2) Nach dem Ergänzungssatz

$$\Gamma(\xi) \Gamma(1-\xi) = \frac{\pi}{\sin \xi \pi}$$

ist 
$$\psi(\xi) - \psi(1-\xi) = -\pi \cotg \xi \pi,$$

mithin 
$$\frac{\psi(\xi)}{\Gamma(\xi)} = \Gamma(1-\xi) \left[ \psi(1-\xi) \frac{\sin \xi \pi}{\pi} - \cos \xi \pi \right]$$

und 
$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi(\xi)}{\Gamma(\xi)} = -1.$$

Aus 
$$F(x) = \log \frac{1}{f(x)}$$

schliessen wir auf

$$\begin{aligned} F''(x) &= \psi'(\sigma-x) - \psi'(s-x) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\sigma-x+\nu)^2} - \frac{1}{(s-x+\nu)^2} \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$(x < \sigma; \sigma = s - \lambda, \lambda \geq 0).$

Wegen 
$$F'(x) = \mu(x) + \delta, \quad F''(x) = \mu'(x)$$

wachsen die durch (14) bestimmten Sterbensintensitäten monoton mit dem erreichten Alter. (16) lehrt, dass  $\frac{1}{f(x)}$  logarithmisch konvex ist, eine Eigenschaft, welche die Einzigkeit von Lösung (14) nach sich zieht.

Satz 3.

$$(14) \quad f(x) = k \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma(s-x)}{\Gamma(\sigma-x)}, \quad (\sigma = s - \lambda, \lambda \geq 0)$$

ist einzige Lösung der Differenzgleichung

$$(13) \quad f(x+1) - \frac{\sigma-x-1}{s-x-1} f(x) = 0, \quad (\sigma = s - \lambda, \lambda \geq 0)$$

mit vorgegebenem Anfangswert  $f(0) = k$ , für welche  $\frac{1}{f(x)}$  in  $x < \sigma - 1$  logarithmisch konvex ist.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass

$$g(x) = \frac{\sigma-x-1}{s-x-1} > 0, \quad \text{für } x < \sigma - 1 \text{ (und } x > s - 1),$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g(x + \nu) = 1, \quad (\nu \text{ ganz}),$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \log \frac{g(x + \nu - 1)}{g(x + \nu)} = 0, (\nu \text{ ganz})$$

und dass

$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

der Differenzgleichung

$$h(x+1) - \frac{1}{g(x)} h(x) = 0 \quad (13')$$

genügt.

Es sei neben  $h(x)$  auch  $h^*(x)$  stetige und logarithmisch konvexe Lösung von (13'). Aus

$$\begin{aligned} \log h(x+1) &= \log h(x) - \log g(x) \\ \log h^*(x+1) &= \log h^*(x) - \log g(x) \end{aligned} \quad (17)$$

folgt durch Subtraktion die Periodizität der durch

$$\omega(x) = \log h^*(x) - \log h(x)$$

definierten stetigen Funktion,

$$\omega(x+1) = \omega(x).$$

Indem man die aus jeder der beiden Relationen (17) für die Argumente  $x$  und  $x-1$  erhaltenen Beziehungen voneinander subtrahiert, erhält man

$$\log h(x+1) + \log h(x-1) - 2 \log h(x) = \log \frac{g(x-1)}{g(x)},$$

$$\log h^*(x+1) + \log h^*(x-1) - 2 \log h^*(x) = \log \frac{g(x-1)}{g(x)}$$

und damit wegen der vorausgesetzten Konvexität

$$0 \leq \log h(x+\lambda) + \log h(x-\lambda) - 2 \log h(x) \leq \log \frac{g(x-1)}{g(x)},$$

$$0 \leq \log h^*(x+\lambda) + \log h^*(x-\lambda) - 2 \log h^*(x) \leq \log \frac{g(x-1)}{g(x)},$$

mithin

$$|\omega(x+\lambda) + \omega(x-\lambda) - 2\omega(x)| \leq 2 \left| \log \frac{g(x-1)}{g(x)} \right|, \quad (|\lambda| < 1).$$

Wegen der Periodizität von  $\omega(x)$  kann hieraus auf

$$|\omega(x+\lambda) + \omega(x-\lambda) - 2\omega(x)| \leq 2 \left| \log \frac{g(x+\nu-1)}{g(x+\nu)} \right|, \quad (\nu \text{ ganz})$$

und hieraus durch den Grenzübergang  $\nu \rightarrow \infty$  auf

$$\frac{1}{2} [\omega(x+\lambda) + \omega(x-\lambda)] = \omega(x)$$

und schliesslich, wenn  $x+\lambda$  durch  $x$ ,  $x-\lambda$  durch  $y$  ersetzt wird, auf

$$\frac{1}{2} [\omega(x) + \omega(y)] = \omega\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

geschlossen werden. Die Funktionswerte  $\omega$  zu Argumenten, die auf der Abszissenachse überall dicht liegen, bestimmen daher eine Gerade:  $\omega(x)$  ist, weil stetig, linear:

$$\omega(x) = Ax + B,$$

insbesondere wegen der Periodizität konstant,

$$\omega(x) = B,$$

so dass

$$\log h^*(x) = B + \log h(x),$$

$$h^*(x) = b h(x), \quad (b = e^B > 0)$$

und wegen der Anfangsbedingung

$$h^*(0) = h(0) = \frac{1}{k}$$

$$b = 1$$

wird.

### 3. Die Umkehrung von Satz 2 für ganzzahlige $\lambda$

Im Hinblick auf die Bedeutung von  $\sigma = s - \lambda$  als Höchstalter einer Überlebensordnung beschränken wir uns im folgenden auf ganzzahlige Werte von  $\lambda$ . Wir zeigen, dass die Darstellungsformeln (14) und (14') auch hinreichend sind für den linearen Verlauf des Deckungskapitals einer gemischten Versicherung.

Unter den Voraussetzungen

$$s - x = n > 0, \text{ ganz}$$

$$\sigma - x = n - \lambda > 0, \text{ ganz, (d. h. } 0 \leq \lambda < n, \text{ ganz)}$$

ist nach (14)

$$\frac{f(x+t)}{f(x)} = \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-t)}{\Gamma(n-\lambda-t)} = \frac{\binom{n-1-t}{\lambda}}{\binom{n-1}{\lambda}}$$

woraus sich für den temporären Leibrentenbarwert

$$\ddot{a}_{x:n}^* = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} f(x+t)}{\sum_{t=0}^{n-1} f(x)} = \frac{1}{\binom{n-1}{\lambda}} \sum_{t=0}^{n-1-\lambda} \binom{n-1-t}{\lambda} = \frac{\binom{n}{\lambda+1}}{\binom{n-1}{\lambda}} = \frac{n}{\lambda+1}$$

oder 
$$\ddot{a}_{x:s-x}^* = \frac{s-x}{\lambda+1}, \quad (18)$$

eine von der Rentendauer proportionale Abhängigkeit ergibt. Da

$$\ddot{a}_{x+t:s-x-t}^* = \frac{s-x-t}{\lambda+1}, \quad (18')$$

lässt sich durch formales Rechnen

$${}_tV_{x:s-x}^* = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:s-x-t}^*}{\ddot{a}_{x:s-x}^*} = \frac{t}{s-x}, \quad (19)$$

die Linearität des Reserveverlaufes nachweisen.



Falls  $\lambda < 0$  ist das Höchstalter  $\sigma$  des Sterbegesetzes, nach welchem die Barwerte  $\ddot{a}$  gerechnet sind, kleiner als das Schlussalter  $s$  der gemischten Versicherung. Für die im Intervall

$$\sigma - 1 < x + t \leq s$$

liegenden erreichten Alter verliert in (18') das Barwertsymbol seinen realen Sinn; es ist absurd, den verwendeten Begriff der Leibrente mit einer ausgestorbenen Gesamtheit in Verbindung zu bringen. Die Übereinstimmung der Reserven (19) und (4),

$${}_tV_{x:\overline{s-x}|}^* \equiv {}_tV_{x:\overline{s-x}|} \quad (\text{in } t)$$

ist mithin nur für  $0 \leq t \leq \sigma - 1 - x$

erfüllt. Da jedoch die in (18') auf der rechten Seite stehende Funktion keiner Altersbeschränkung unterliegt, ist in ihrem Verlauf eine «analytische» Fortsetzung der Barwertfunktion für Alter  $x + t > \sigma - 1$  zu sehen. Setzen wir  $\ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t}|}$  über das erreichte Alter  $x + t = \sigma - 1$  gemäss (18') fort, gilt (19), damit die Übereinstimmung der Reserven

$${}_tV_{x:\overline{s-x}|}^* \text{ und } {}_tV_{x:\overline{s-x}|} = \frac{t}{s-x} \quad (0 \leq t \leq s-x) \text{ uneingeschränkt bis zum}$$

Schlussalter  $s$  der gemischten Versicherung.

Wir illustrieren diese Erwägungen am Beispiel  $\lambda = 2$ . Die zu  $\lambda = 2$  gehörende diskontierte Überlebensordnung

$$f_2(x) = k \left( 1 - \frac{x}{s-1} \right) \left( 1 - \frac{x}{s-2} \right)$$

ist eine Parabel mit vertikaler Achse und den Nullstellen

$$x_1 = \sigma = s - 2, \quad x_2 = s - 1. \quad (\text{Fig. 4}).$$

Die Barwertfunktion

$$\ddot{a}_{x+t:\overline{s-x-t}|} = \frac{s-x-t}{3},$$

in Abhängigkeit vom erreichten Alter  $x + t$  eine fallende Gerade mit Nullpunkt in  $s$ , nimmt in  $x + t = s - 3$  den Wert 1 an, um in den dar-

auffolgenden Altern  $s-2$ ,  $s-1$  und  $s$  jegliche reale Bedeutung zu verlieren. Ordnen wir der für  $x+t = s-2$ ,  $s-1$  und  $s$  anschaulich nicht mehr interpretierbaren Barwertfunktion die Werte  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  und  $0$  zu, wird das nur bis zum erreichten Alter  $x+t = s-3$  definierte, in  $t$  lineare Deckungskapital bis zum Schlussalter  $s$  geradlinig auf den Endwert  $1$  fortgesetzt.

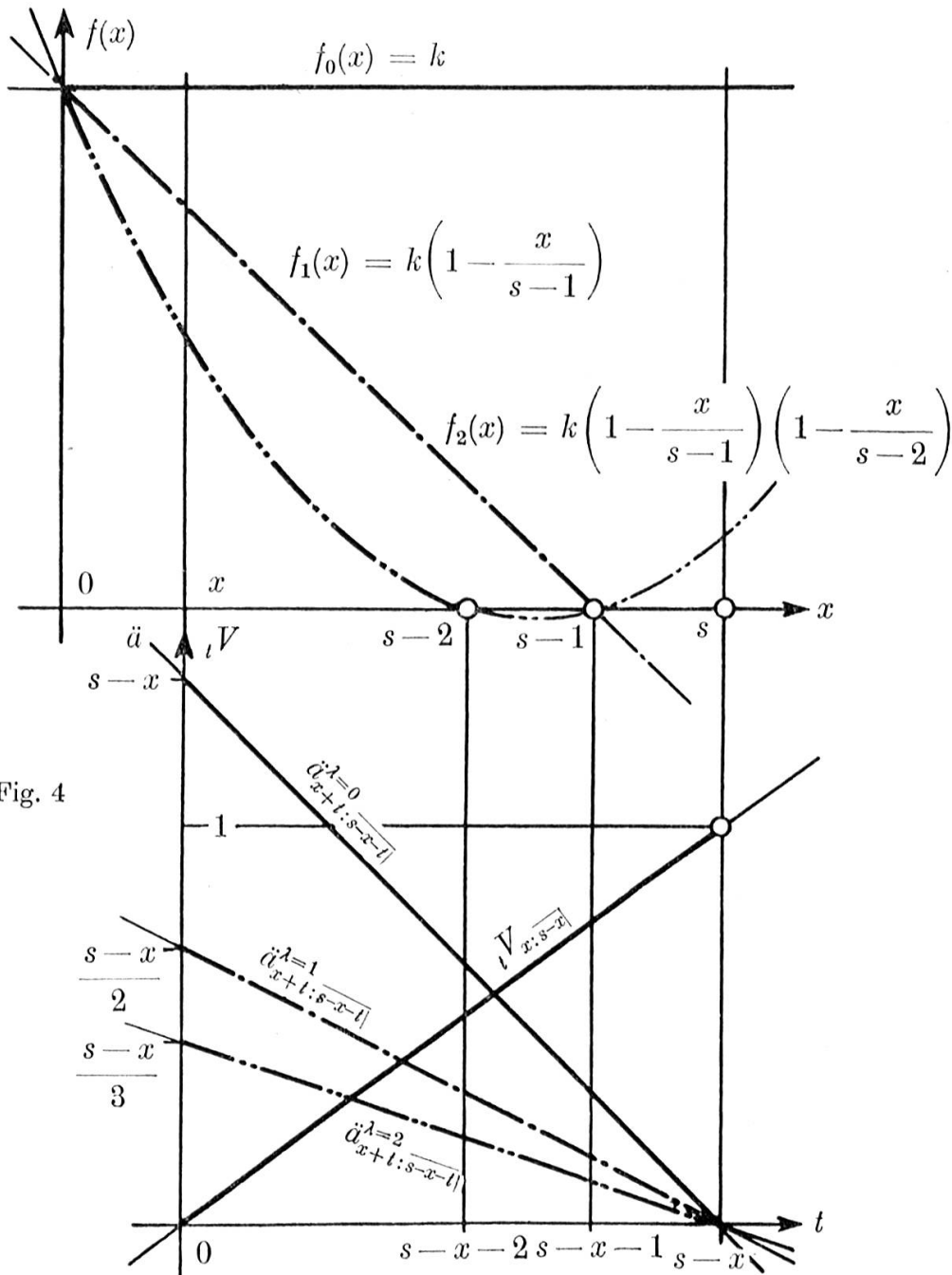


Fig. 4

Satz 4. Für das «diskontierte» Sterbegezet

$$f(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{s-\lambda}\right), \quad (\lambda \geq 0, \text{ ganz})$$

verläuft das Deckungskapital der gemischten Versicherung mit Schlussalter  $s$  im Intervall  $0 \leq t < s - \lambda - x$  linear:

$${}_tV_{x:s-x}^* = \frac{t}{s-x}, \quad (0 \leq t < s - \lambda - x).$$

Durch Fortsetzen des Barwertes der temporären Leibrente über das Schlussalter  $\sigma = s - \lambda$  der Überlebensordnung hinaus mittels

$$\ddot{a}_{x+t:s-x-t}^* = \frac{s-x-t}{\lambda+1}$$

wird auch das Deckungskapital bis zum Schlussalter  $s$  linear fortgesetzt.

#### 4. Der Verlauf der Überlebensordnungen bei ganzzahligen Höchstaltern

Ist  $\lambda$  positiv und ganz, vereinfacht sich (14) zu (20)

$$f(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{s-\lambda}\right), \quad (\lambda > 0),$$

einer Parabel der Ordnung  $\lambda$  mit den Nullstellen  $x_1 = s - \lambda = \sigma$ ,  $x_2 = s - \lambda + 1$ , ...,  $x_\lambda = s - 1$ . Da  $f'(x)$  eine Parabel der Ordnung  $\lambda - 1$  ist, liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von  $f(x)$  genau eine Nullstelle der Ableitung, also ein Extremum der Funktion. Fig. 5 zeigt den Funktionsverlauf für die Parameterwerte  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  und  $4$  <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup>	$f_0(x) = k$ $f_1(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right)$ $f_2(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right)$ $f_3(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \left(1 - \frac{x}{s-3}\right)$ $f_4(x) = k \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \left(1 - \frac{x}{s-3}\right) \left(1 - \frac{x}{s-4}\right)$	(Verlauf der diskontierten Zahlen in einem von Sterblichkeit und Zins freien System) (z. B. als Sterbegezet von Moivre im zinsfreien System interpretierbar)
---------------	--	---

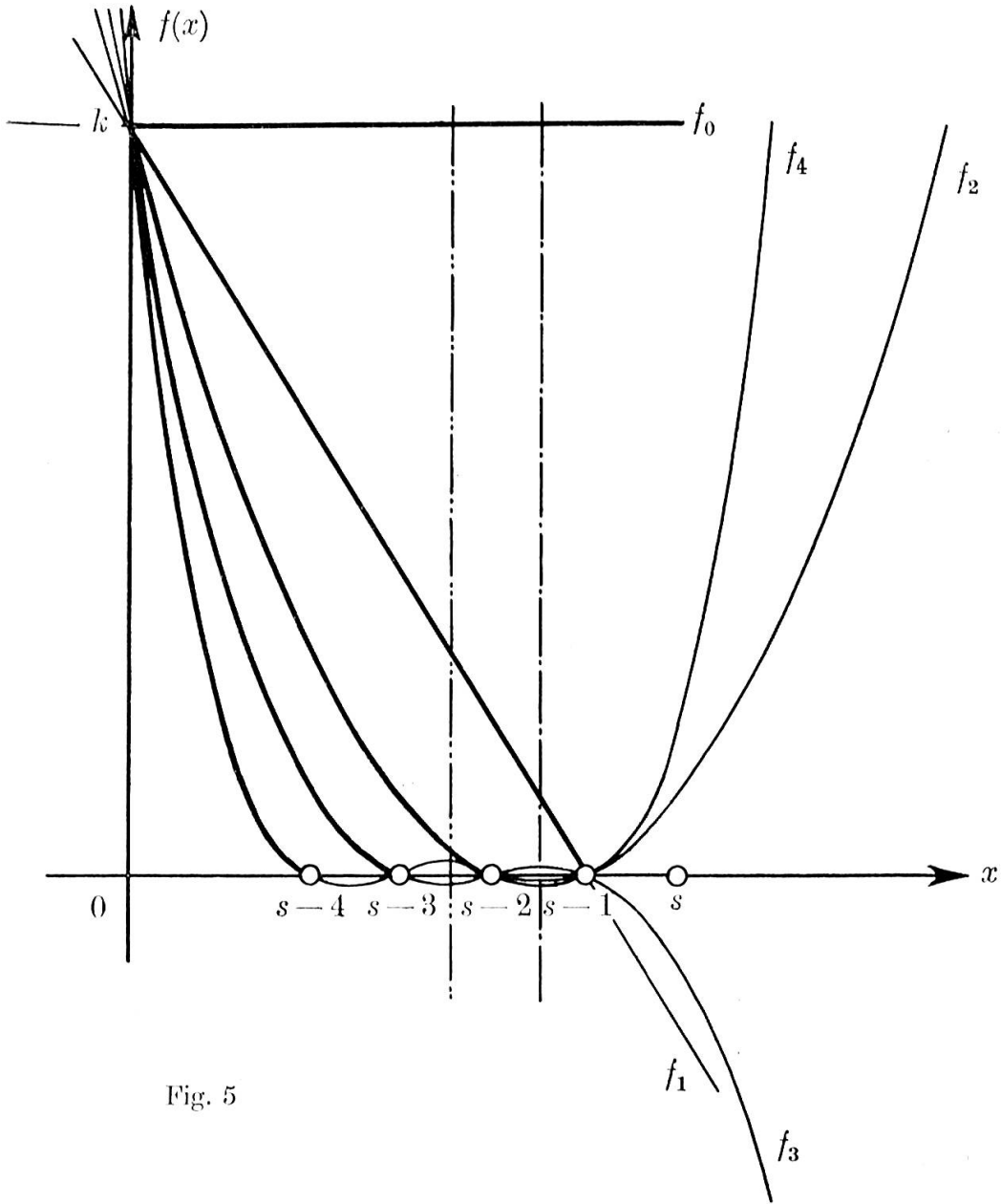


Fig. 5

Aus (20) oder (15) folgt

$$f'(x) = -f(x) \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{1}{s-x-\nu}, \quad (\lambda > 0)$$

und hieraus für die Richtungsgrößen der Tangenten an  $f(x)$  in den Endpunkten des Darstellungsintervalles

$$f'(0) = -k \left( \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \dots + \frac{1}{s-\lambda} \right), \quad (\lambda > 0),$$

$$f'(s-\lambda) = -k \frac{(\lambda-1)!}{(s-1)(s-2)\dots(s-\lambda)}, \quad (\lambda > 0).$$

Für die Summe der reziproken Wurzeln von  $f(x)$  werde die Bezeichnung  $\delta^*$  eingeführt,

$$\delta^* = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \dots + \frac{1}{s-\lambda}, \quad (\lambda > 0). \quad (21)$$

Die im Anfangspunkt  $(0, k)$  an die «diskontierte» Überlebensordnung konstruierte Tangente schneidet die  $x$ -Achse mithin im Abstände  $\frac{1}{\delta^*}$  vom Ursprung.

Da

$$f''(x) = f(x) \left\{ \sum_{\nu=1}^{\lambda} \sum_{\mu=1}^{\lambda} \frac{1}{(s-\nu-x)(s-\mu-x)} - \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{1}{(s-\nu-x)^2} \right\},$$

ist  $f(x)$  im Intervall  $0 \leq x < s - \lambda$ ,  $(\lambda > 0)$  konvex.

Um den Gesamtverlauf der «diskontierten» Sterbegesetze überblicken zu können, beziehen wir deren cartesische Darstellung auf das Koordinatensystem

$$O'(\xi, \eta), \begin{cases} \xi = x - \left[ s - \frac{1}{2}(\lambda + 1) \right] \\ \eta = \frac{1}{k} (s-1)(s-2)\dots(s-\lambda) f(x) \end{cases}, \quad (\lambda > 0)$$

und erhalten <sup>1)</sup>

$$\eta = \begin{cases} \left[ \xi^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right] \left[ \xi^2 - \left( \frac{3}{2} \right)^2 \right] \dots \left[ \xi^2 - \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 \right], & \lambda = 2p, p = 1, 2, 3, \dots \\ -\xi(\xi^2 - 1^2)(\xi^2 - 2^2) \dots (\xi^2 - p^2), & \lambda = 2p + 1, p = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

(22)

<sup>1)</sup>

$$\eta = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ -\xi, & \lambda = 1 \end{cases}$$

Bei geradem  $\lambda$  verläuft die «diskontierte» Überlebensordnung axial symmetrisch zur Vertikalen durch  $O'(s - \frac{1}{2} - p, o)$  ( $\eta$ -Achse), bei ungeradem  $\lambda$  jedoch zentrisch symmetrisch zu  $O'(s - 1 - p, o)$ .

$S\left(s - \frac{3}{2}, -\frac{k}{4(s-1)(s-2)}\right)$  ist Scheitel der Parabel  $f_2$ . Von  $f_4$  liegt

ein Maximum mit der Ordinate  $\frac{9k}{4(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}$  auf der

vertikalen Symmetrieachse durch  $O'(s - \frac{5}{2}, o)$ ; zu den Argumenten

$s - \frac{5}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}$  gehören die Minima  $-\frac{k}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)}$ .

Bei ungeradem  $\lambda$  ist  $O'$  Wendepunkt.  $f_3$  nimmt in  $x = s - 2 \mp \frac{1}{3}\sqrt{3}$

die extremalen Werte  $\mp \frac{2\sqrt{3}k}{9(s-1)(s-2)(s-3)}$  an.

Für die (20) zugeordnete Überlebensordnung (20')

$$f(x) = ke^{\delta x} \left(1 - \frac{x}{s-1}\right) \left(1 - \frac{x}{s-2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{s-\lambda}\right), \quad (\lambda > 0)$$

wird im Intervall  $0 < x < s - \lambda$  monotonen Fallen, d. h.

$$l'(x) = l(x) \left[ \delta - \left( \frac{1}{s-1-x} + \frac{1}{s-2-x} + \dots + \frac{1}{s-\lambda-x} \right) \right] < 0$$

vorausgesetzt.

$$\delta \leq \delta^* \tag{23}$$

mit

$$(21) \quad \delta^* = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \dots + \frac{1}{s-\lambda}, \quad (\lambda > 0)$$

ist notwendige Bedingung.

Da  $l'(0) = k(\delta - \delta^*)$ ,

hat das SterbeGesetz (20') zum Anfangspunkt  $(k, 0)$  eine Subtangente der Länge  $\frac{1}{\delta^* - \delta}$ .

Wir bezeichnen den kleinsten Wert von  $\lambda$ , für welchen bei gegebener Zinsintensität  $\delta$  Bedingung (23) noch erfüllt wird, mit  $\lambda^*$  und stellen dessen Werte für einige gebräuchliche Zinsfüsse und Schlussalter in der nachfolgenden Tabelle zusammen:

Zinsfuss %	$\delta$	Schlussalter $s$						
		40	50	60	70	80	90	100
2	0.019 803	1	1	2	2	2	2	2
2½	0.024 693	1	2	2	2	2	3	3
3	0.029 559	2	2	2	3	3	3	3
3½	0.034 401	2	2	3	3	3	4	4
4	0.039 221	2	2	3	3	4	4	4
4½	0.044 017	2	3	3	3	4	4	5

Da

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \mu(x) + \delta = \frac{1}{s-1-x} + \frac{1}{s-2-x} + \dots + \frac{1}{s-\lambda-x},$$

$(\lambda > 0),$

baut sich für SterbeGesetze (20) die Intensität  $\mu(x) + \delta$  durch Superposition von  $\lambda$  kongruenten gleichseitigen Hyperbeln

$$H_v \equiv y_v = \frac{1}{s-v-x}, \quad (v = 1, 2, \dots, \lambda)$$

auf.

Die Mittelpunkte dieser kongruenten Hyperbeln liegen auf der  $x$ -Achse äquidistant in  $s-1, s-2, \dots, s-\lambda$ ; die  $x$ -Achse ist gemeinsame Asymptote (Fig. 6).

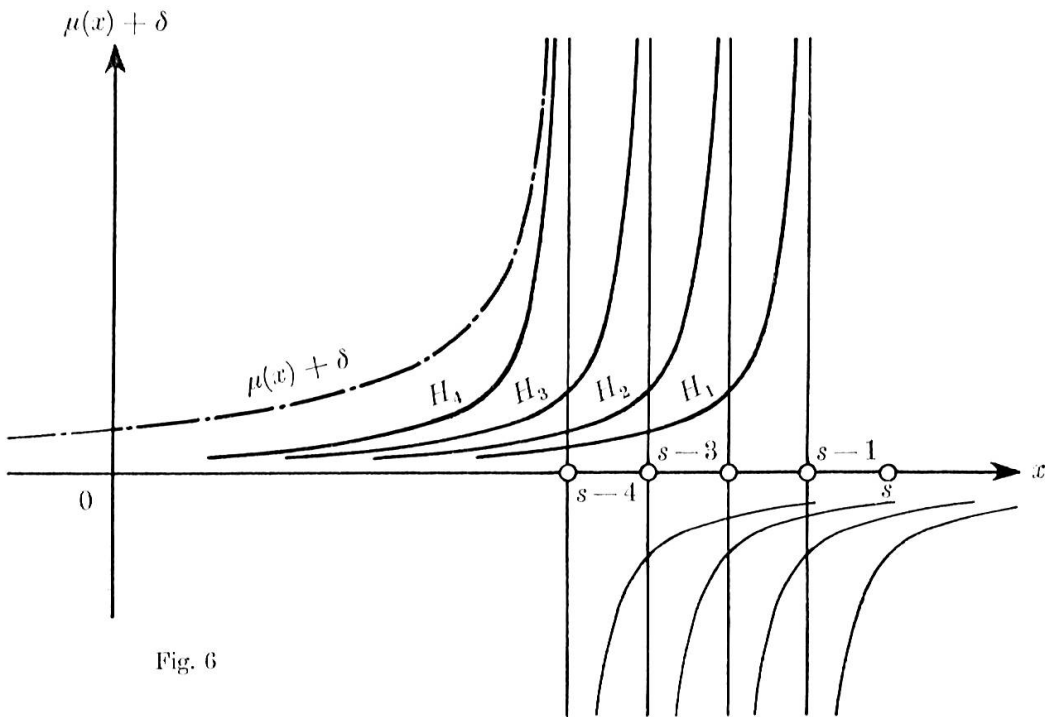


Fig. 6

### Literaturverzeichnis

- [1] *E. Ruffener*, «Sulla rappresentazione di una legge di sopravvivenza in base all'andamento delle riserve matematiche», *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, annata XX (1957).
- [2] *H. Christen*, «Das Zinsfussproblem bei der Leibrente», *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Band 25 (1930).



