

# Bemerkungen und Anwendungen zur Theorie von Cantelli

Autor(en): **Frauenfelder, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966799>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Bemerkungen und Anwendungen zur Theorie von Cantelli

Von *W. Frauenfelder*, Zürich

Der als «Theorie von Cantelli» in die Literatur eingegangene Fundamentalsatz der Cantellischen Kapital-Ansammlungstheorie wird in enger Anlehnung an die Originalarbeiten «Genesi e costruzione delle tavole di mutualità» (Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza; Roma 1914) und «Sulle leggi di mutualità e sulle equazioni delle riserve matematiche» (Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari; Roma 1938) kurz dargestellt und hierauf diskutiert. Anschliessend sind einige Beispiele von möglichen Anwendungen zusammengestellt.

### 1. Die Grundlagen der Theorie von Cantelli [1], [2] <sup>1)</sup>

Wir gehen aus von der kontinuierlichen Abfallsordnung eines geschlossenen Kollektivs in der Form

$$l_{x+t} = l_x - \int_0^t \sum_{k=1}^m \mu_{x+t}^{(k)} \cdot l_{x+t} \cdot dt$$

oder

$$l_{x+t} = l_x \cdot e^{-\int_0^t \sum_{k=1}^m \mu_{x+t}^{(k)} \cdot dt} \quad (1)$$

Dabei bedeutet  $l_x$  den Ausgangsbestand gleichaltriger Elemente und  $\mu_{x+t}^{(k)}$  deren Ausscheide-Intensität aus der  $k$ . Ursache ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) in der Zeitspanne  $dt$ .

---

<sup>1)</sup> Ziffern in [ ] beziehen sich auf den Literaturnachweis (Seite 88).

Die im Kollektiv verbleibenden Elemente entrichten in der Zeitspanne  $dt$  den Beitrag  ${}_tP_x$ ; den aus dem Kollektiv austretenden Elementen wird die Leistung  $A_{x+t}^{(k)} \cdot {}_tV_x$  zugeordnet, wobei  ${}_tV_x$  das Netto-Deckungskapital dieser Versicherungsform bedeutet.

Die Berechnung des Deckungskapitals als Differenz der aufgezinsten Summe sämtlicher Einnahmen und Ausgaben ergibt eine Volterrasche Integralgleichung 2. Art von der Form

$$l_{x+t} \cdot {}_tV_x = \int_0^t l_{x+u} \cdot {}_uP_x \cdot e^{\delta(t-u)} \cdot du - \int_0^t l_{x+u} \cdot \sum_{k=1}^m \mu_{x+u}^{(k)} \cdot A_{x+u}^{(k)} \cdot {}_uV_x \cdot e^{\delta(t-u)} \cdot du. \quad (2)$$

Die zu Gleichung (2) zugeordnete Differentialgleichung – aus Differentiation nach  $t$  bestimmt – lautet

$$\frac{d}{dt} (l_t V_t) = l_t P_t - l_t V_t \cdot \mu_t A_t, \quad (3)$$

wobei 
$$\mu_t = \sum_{k=0}^m \mu_{x+t}^{(k)} \text{ und } \mu_t A_t = \sum_{k=0}^m \mu_{x+t}^{(k)} \cdot A_{x+t}^{(k)}$$

mit 
$$\mu_t^{(0)} = \vartheta \text{ und } A_t^{(0)} = 0.$$

Die Lösungsfunktion von (3) und damit auch von (2) erhalten wir aus Integration nach  $l_t V_t$ , Division durch  $l_t$  unter Berücksichtigung von (1) und Nullsetzen der Integrations-Konstanten  $V_0$  mit

$$V_t = \int_0^t P_u \cdot e^{\int_t^u (\mu_u A_u - \mu_u) du} \cdot du. \quad (4)$$

Lösung (4) lässt sich in der Integralgleichung (2) nach Division mit  $l_t$  und Anwendung der Formel von Dirichlet direkt verifizieren.

## 2. Die Aussage der Theorie von Cantelli

Die Deckungskapital-Funktion  $V_t$  hat gemäss Formel (4) die Eigenschaft, dass Ausscheide-Intensitäten und Leistungs-Faktoren nur in der Verbindung

$$\mu A - \mu$$

aufzutreten (die Indices werden künftig nicht mehr angefügt, ebenso gilt immer  $\mu^{(0)} = \delta$ ,  $A^{(0)} = 0$ ). Diesen Ausdruck nennt Cantelli die

Mutualitäts-(Intensitäts-)Funktion.

Sie ist für eine gegebene Versicherungsform eindeutig und gibt Anlass zum Fundamentalsatz der Kapital-Ansammlungstheorie:

Zwei Versicherungsformen mit gleicher Prämie und mit Ausscheide-Intensitäten  $\mu$  bzw.  $\bar{\mu}$  und Leistungen  $Q$  bzw.  $\bar{Q}$  haben bei gleicher Mutualitäts-Funktion gleichen Deckungskapital-Verlauf.

Durch die Umformung des Fundamentalsatzes mit

$$\begin{aligned} \bar{\mu} \bar{A} &= \mu A - \mu + \bar{\mu}, \quad \eta = \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu}, \quad Q = AV \\ \bar{Q} &= \bar{A}V = \frac{1}{\mu} (\mu A - \mu + \bar{\mu}) \cdot V = Q + \eta(Q - V) \end{aligned} \quad (5)$$

ergibt sich die gleichbedeutende Formulierung [3]:

Werden Leistungen  $\bar{Q} = Q + \eta(Q - V)$  mit zugeordneten Ausscheide-Intensitäten  $\bar{\mu}$  ersetzt durch Leistungen  $Q$  mit zugeordneten Ausscheide-Intensitäten  $\mu = (1 + \eta)\bar{\mu}$ , so resultiert bei gleicher Prämie gleiches Deckungskapital.

Aus den Ansätzen

$$\bar{A} = 0 \quad \text{und damit} \quad \bar{\mu} \bar{A} = \mu A - \mu + \bar{\mu} = 0$$

entsteht eine weitere, spezielle Formulierung [4]:

Werden Leistungen  $Q = A \cdot V$  mit zugeordneter Ausscheide-Intensität  $\mu$  ersetzt durch Leistungen  $\bar{Q} = 0$  mit zugeordneter Ausscheide-Intensität  $\bar{\mu} = (1 - A)\mu$ , dann ergibt sich bei gleicher Prämie gleiches Deckungskapital.

### 3. Der Inhalt der Theorie von Cantelli

Der Inhalt der Theorie von Cantelli lässt sich am besten aus einer ersten Anwendung des Fundamentalsatzes veranschaulichen [1], [2], [3], [5]:

*Erweiterungssatz:*

Eine gegebene Versicherungsform kann durch Ausscheide-Intensitäten  $\mu^{(m+1)}$  mit zugeordneten Leistungsfaktoren  $A^{(m+1)} = 1$  erweitert werden, ohne dass sich dadurch – bei gleicher Prämie – der Deckungskapitalverlauf ändern würde.

Diese Aussage ist eine unmittelbare Folge des Begriffs des Deckungskapitals und lässt sich aus der Invarianz der Mutualitätsfunktion herleiten

$$\sum_{k=0}^m \mu^{(k)} A^{(k)} - \mu^{(k)} = \sum_{k=0}^{m+1} \mu^{(k)} A^{(k)} - \mu^{(k)}$$

für  $\mu^{(m+1)} \not\equiv \mu^{(1 \leq k \leq m)}$  und  $A^{(m+1)} = 1$ .

Es zeigt sich nun, dass der Fundamentalsatz und der Erweiterungssatz das gleiche aussagen, da der Fundamentalsatz ohne weiteres als Anwendung des Erweiterungssatzes dargestellt werden kann:

Nehmen wir an, bei einer bestimmten Versicherungsform würden die Ausscheide-Intensitäten  $\mu$  um den Wert  $\nu = \bar{\mu} - \mu$  vergrössert (die Betrachtungen sind bei positivem oder negativem Wert für  $\nu$  gültig). Gemäss dem ursprünglichen Modell ist für die mit der Intensität  $\mu$  Austretenden der Betrag  $Q$  als Leistung vorgesehen. Den mit der Intensität  $\nu = \bar{\mu} - \mu$  zusätzlich Austretenden können wir gemäss Erweiterungssatz das vorhandene Deckungskapital  $V$  mitgeben, so dass im gesamten

$$\mu Q + \nu V$$

oder im Durchschnitt für jeden Austretenden der Betrag

$$\frac{\mu Q + \nu V}{\mu + \nu}$$

ausbezahlt werden kann. Damit erhalten wir bei Variation der Rechnungsgrundlagen ein System von Bedingungsgleichungen, das bei gleichem Deckungskapitalverlauf gleiche Prämie und umgekehrt gewährleistet:

$$\bar{\mu} \text{ vorgegeben: } \bar{Q}^{(k)} = \frac{\mu^{(k)} Q^{(k)} + (\bar{\mu}^{(k)} - \mu^{(k)}) V}{\bar{\mu}^{(k)}}$$

$$\bar{Q} \text{ vorgegeben: } \bar{\mu}^{(k)} = \mu^{(k)} \frac{Q^{(k)} - V}{\bar{Q}^{(k)} - V}.$$

Diese Betrachtungen sind formelmässig identisch mit Formulierung (5) des Fundamentalsatzes. Sie zeigen, dass der Erweiterungssatz weniger eine Anwendung der Theorie von Cantelli als die Theorie von Cantelli eine Anwendung des Erweiterungssatzes darstellt. Im übrigen

ist für die Formulierung des Erweiterungssatzes ein Rückgriff auf die Mutualitätsfunktion und damit auf die Integralgleichung (4) nicht notwendig; sie lässt sich bequem und übersichtlich aus der identischen Umformung der «gewöhnlichen» Differentialgleichung des Deckungskapitals ableiten:

$$\begin{aligned} V' &= P - \mu Q + \mu V \\ &= P - \mu Q - \nu V + (\mu + \nu) V \\ &= P - \bar{\mu} \frac{\mu Q + \nu V}{\bar{\mu}} + \bar{\mu} V. \end{aligned} \quad (6)$$

#### 4. Bemerkungen zum Ansatz $Q_t = A_t V_t$

Beim Studium der Theorie von Cantelli fällt der ungewohnte Ansatz für die Leistungsfunktion  $Q_t = A_t V_t$  auf. Dieser Ansatz führt zur Definition der Mutualitätsfunktion, welche ihrerseits zur «Theorie von Cantelli» Anlass gibt.

Es wurde jedoch im vorangehenden Abschnitt gezeigt, dass der Erweiterungssatz ohne Schwierigkeiten auch aus der Differentialgleichung (6) abgeleitet werden kann, d. h. dass der Ansatz  $Q_t = A_t V_t$  keinen bestimmenden Einfluss auf das Ergebnis der Untersuchungen hat.

Grundsätzlich ist zum Ansatz  $Q_t = A_t V_t$  folgendes zu bemerken:

Eine Versicherungsform ist durch die Werte  $\mu_t$  und  $Q_t$  bestimmt ( $Q_t \neq A_t V_t$ ), woraus mit Hilfe des Äquivalenzprinzips die Grösse  $P_t$  berechnet wird.

Das Äquivalenzprinzip – als Ausdruck des gerechten Spiels – fordert auf Grundlage der Werte  $\mu_t$  Gleichheit zwischen den Leistungen  $Q_t$  des Versicherers und den Gegenleistungen  $P_t$  des Versicherten, oder in Formeln ausgedrückt

$$0 = \int_0^n (P_u - \mu_u Q_u) \cdot e^{-\int_n^u \mu_u du} \cdot du. \quad (7)$$

Aus dieser Gleichung wird nachträglich als technisch notwendige Rücklage während des Zeitintervalls  $0 \leq t \leq n$  das Deckungskapital

$$V_t = \int_0^t (P_u - \mu_u Q_u) \cdot e^{-\int_t^u \mu_u du} \cdot du \quad (8)$$

definiert, wobei gemäss Voraussetzung  $V_n = 0$ .

Im Gegensatz zu diesem Vorgehen wird bei Cantelli das Deckungskapital nicht sekundär im Anschluss an die Äquivalenzgleichung, sondern gleich primär in Verkoppelung mit den Leistungen  $Q_t$  des Versicherten eingeführt. Die Definition als Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben (2) ergibt dann als Lösungskurve Formel (4).

Die beiden Differentialgleichungen (3) bzw. (6) sind gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung; ihre Lösungskurven (4) bzw. (8) bilden je eine wohldefinierte, einfach unendliche Schar von Kurven, welche sich nirgends berühren (für jedes Wertepaar  $V'$ ,  $t$  ist  $V'$  eindeutig definiert).

An die Lösungskurve wird die Anforderung gestellt, dass sie im Punkte  $t = 0$  (d.h. vor Beginn der Versicherung) eine erste Nullstelle und im Punkte  $t = n$  (d.h. nach Abwicklung sämtlicher Versicherungsvorfälle) eine zweite Nullstelle annimmt.

Für die durch  $P$ ,  $\mu$  und  $Q$  definierte Lösungskurve wird die erste Nullstelle durch Nullsetzen der Integrationskonstanten, die zweite Nullstelle gemäss Voraussetzung (7) erreicht.

Die durch  $P$ ,  $\mu$  und  $A$  definierte Lösungsschar ist nun aber offensichtlich überbestimmt, da sie als einfach unendliche Lösungsschar nicht zwei Nebenbedingungen genügen kann: Nach Nullsetzen der Integrationskonstanten ist die Lösungskurve durch die Werte  $P$ ,  $\mu$  und  $A$  eindeutig festgelegt und nimmt im Punkte  $t = n$  folgenden Wert an:

$$V_n = \int_0^n P_u \cdot e^{\int_n^u (\mu_u A_u - \mu_u) du} \cdot du > 0. \quad (4a)$$

Als Besonderheit ist zu vermerken, dass der Typus (3) der Differentialgleichungen monoton nicht abnehmende Lösungskurven (4) erzeugt ( $P$  ist positiv anzusetzen), welche für alle möglichen Werte für  $A$  nach Nullsetzen der Integrationskonstanten keine Nullstelle mehr annehmen.

Abschliessend kann gesagt werden, dass der Ansatz  $Q_t = A_t V_t$  [1], [2], [6] nicht notwendig ist und dem versicherungsmathematischen Kriterium des Äquivalenzprinzips keine Genüge leisten kann, weshalb er

zu verwerfen ist. Die Leistungsfunktion  $Q_t$  darf allgemein nicht in Abhängigkeit des Deckungskapitals angesetzt werden, mit Ausnahme der sich aus der identischen Umformung der Differentialgleichung (6) ergebenden Spezialfälle.

5. *Definition von «Äquivalenten Versicherungsformen»*

Eine gegebene Versicherungsform wird im folgenden symbolisch bezeichnet mit

$$\{\mu; Q\} \equiv \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; Q^1, Q^2, \dots, Q^m\}.$$

Soll auch die Zinsintensität  $\vartheta$  in die Betrachtungen einbezogen werden, gelten für sie dieselben Gesetze, wenn nur das zugeordnete  $Q^{(0)} = 0$  gesetzt wird.

*Definition*

Zwei Versicherungsformen mit identischen Differentialgleichungen des Deckungskapitals werden im folgenden äquivalent genannt.

Äquivalente Versicherungsformen haben immer gleiche Prämie und gleiches Deckungskapital; ihre Ausscheide-Intensitäten und Leistungsfunktionen dagegen brauchen nicht identisch zu sein, müssen sich aber per Definition in folgende Bedingungsgleichungen einordnen lassen:

*Satz A (Erweiterungssatz)*

$$\{\mu; Q\} = \{\mu, \nu; Q, V\}.$$

Eine Versicherungsform, die durch Anwendung des Erweiterungssatzes aus einer bestehenden Versicherungsform hervorgeht, ist mit der ursprünglichen Versicherungsform äquivalent.

*Satz B*

$$\begin{aligned} \{\mu; Q\} &= \{\bar{\mu}; \bar{Q}\} \\ \text{für } \mu &= \sum_{(k)} \mu^{(k)} = \sum_{(l)} \bar{\mu}^{(l)} = \bar{\mu} \\ \text{und } \mu Q &= \sum_{(k)} \mu^{(k)} Q^{(k)} = \sum_{(l)} \bar{\mu}^{(l)} \bar{Q}^{(l)} = \bar{\mu} \bar{Q}. \end{aligned}$$

Zwei Versicherungsformen, von denen je die Summe der Ausscheide-Intensitäten und der ausbezahlten Beträge gleich gross sind, sind äquivalent.



$$\begin{aligned} \text{Satz C} \quad \{\mu; Q\} &= \sum_r \{\mu; {}^r Q\} \\ \text{für } Q &= \sum_r {}^r Q. \end{aligned}$$

Eine Versicherungsform ist äquivalent einer Summe von Versicherungsformen  $\{\mu; {}^r Q\}$ , sofern diese einzelnen Versicherungsformen in bezug zur ursprünglichen Versicherung identische Ausscheide-Intensitäten und gesamthaft die gleichen Leistungsfunktionen aufweisen. (Beispielsweise sind zwei gemischte Versicherungen zu je Fr. 5000 äquivalent einer gemischten Versicherung zu Fr. 10 000, sofern sie in allen technischen Daten übereinstimmen.)

### 6. Anwendungen der Theorie von Cantelli

Die im vorangehenden Abschnitt definierten «Äquivalenten Versicherungsformen» gestatten, eine gegebene Versicherungsform unter bestimmten Voraussetzungen aufzuteilen und zu zergliedern. Mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen über den innern Aufbau und die Struktur der Versicherung können einige Näherungsformeln der Versicherungsmathematik begründet werden. Über die Qualität der Näherung kann zahlenmässig nichts ausgesagt werden; dies bleibt der praktischen Rechnung vorbehalten.

#### a) Die «Theorie von Cantelli»

Die Kombination von Satz A mit Satz B ergibt das bekannte Resultat (6) für  $v = \bar{\mu} - \mu$

$$\begin{aligned} \{\mu; Q\} &\stackrel{A}{=} \{\mu, v; Q, V\} \stackrel{B}{=} \left\{ \mu + v; \frac{1}{\mu + v} (\mu Q + v V) \right\} \\ &\stackrel{B}{=} \left\{ \bar{\mu}; \frac{\mu Q + v V}{\bar{\mu}} \right\}. \end{aligned}$$

b) Ermittlung der Prämien-differenz bei Änderung der Ausscheide-Intensitäten [7].

Für die ursprüngliche Versicherungsform gilt

$$\{\mu; Q\} \stackrel{A, B}{=} \left\{ \bar{\mu}; \frac{\mu Q + v V}{\mu} \right\}.$$

Für die neue Versicherungsform gilt

$$\{\bar{\mu}; Q\}.$$

Die Differenz davon beträgt gemäss *C*

$$\left\{ \bar{\mu}; Q - \frac{\mu Q + vV}{\bar{\mu}} \right\} \stackrel{B}{=} \left\{ \bar{\mu}; \frac{\bar{\mu} - \mu}{\bar{\mu}} (Q - V) \right\}.$$

Sofern Ausscheide-Intensitäten geändert werden ohne gleichzeitige Änderung der Leistungsfunktionen, ist die neue Prämie gleich der ursprünglichen Prämie, erhöht um die Prämie für die Versicherungsform

$$\left\{ \bar{\mu}; \frac{\bar{\mu} - \mu}{\bar{\mu}} (Q - V) \right\},$$

wobei *V* das Deckungskapital von  $\{\mu; Q\}$  bedeutet.

Die gleiche Aussage gilt für den Verlauf der Deckungskapitalien der beiden Versicherungsformen.

*c) Die Lidstonesche Formel und deren Erweiterung auf mehrere Leben [9].*

Wir wenden vorerst Satz *C* auf eine allgemeine Versicherungsform an

$$\begin{aligned} \{\mu; Q\} &\equiv \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; Q^1, Q^2, \dots, Q^m\} \\ &\stackrel{C}{=} \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; Q^1, V^1, \dots, V^1\} \\ &\quad + \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; V^2, Q^2, \dots, V^2\} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; V^m, V^m, \dots, Q^m\} \\ &\quad - \{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^m; V^{-1}, V^{-2}, \dots, V^{-m}\} \end{aligned}$$

$$\text{wobei } V^{-i} = \sum_{j=1}^{i-1} V^j + \sum_{j=i+1}^m V^j$$

und verfügen, dass  $V^{(k)}$  gleich dem Deckungskapital der Versicherungsform  $\{\mu^{(k)}; Q^{(k)}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , sei. Damit reduziert sich das obige System auf

$$\begin{aligned} \{\mu; Q\} &\stackrel{A}{=} \sum_{k=1}^m \{\mu^{(k)}; Q^{(k)}\} - \{\mu; {}_1V\} \\ &\text{mit } {}_1V^{(k)} = V^{(-k)}. \end{aligned}$$

Gehen wir nun mit der Näherung

$$\mu_{x_1 x_2 \dots x_m} \sim \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_m}$$

in die reduzierte Gleichung ein, erhalten wir für  $Q^{(k)} = Q$

$$\{\mu_{x_1 x_2 \dots x_m}; Q\} = \sum_{k=1}^m \{\mu_{x_k}; Q\} - \{\mu_{x_1 x_2 \dots x_m}; {}_1V\}.$$

Ersetzen wir nun noch das Deckungskapital  $V^{(k)}$  durch das Deckungskapital der Sparversicherung (welche sich symbolisch als «Nullversicherung» darstellt), erhalten wir aus

$${}_1V = (m-1) \cdot V_n \text{ und } \{\mu_{x_1 x_2 \dots x_m}; V_n\} \sim \{\}$$

die Verallgemeinerung der Lidstoneschen Formel mit

$$\{\mu_{x_1 x_2 \dots x_m}; Q\} = \sum_{k=1}^m \{\mu_{x_k}; Q\} - (m-1) \{\},$$

welche Beziehung auf den Verlauf der Prämien wie auch der Deckungskapitalien anwendbar ist:

$$P_{x_1 x_2 \dots x_m : n} \sim \sum_{k=1}^m P_{x_k : n} - (m-1) P_n$$

$$V_{x_1 x_2 \dots x_m : n} \sim \sum_{k=1}^m V_{x_k : n} - (m-1) V_n.$$

*d) Näherungsformeln der Invalidenversicherung [8], [10].*

Der Barwert für die Invalidenrente eines im Alter  $x+t$  invalid werdenden Versicherten wird im folgenden mit  $B_t$  bezeichnet.

Die genaue Berechnung der Invaliditätsprämie stützt sich auf die Invalidierungs-Intensitäten  $\mu^i$  mit den zugeordneten Leistungen  $B$  sowie auf die aktiven Todesfall-Intensitäten  $\mu^a$  mit den zugeordneten Leistungen  $o$ :

$$\{\mu^i, \mu^a; B, o\}.$$

Werden die Invalidierungs-Intensitäten geändert, dann ändert sich die Versicherungsform gemäss Beispiel a) in

$$\left\{ \bar{\mu}^i, \bar{\mu}^a; \frac{\mu^i \cdot B + (\bar{\mu}^i - \mu^i) V}{\bar{\mu}^i}, \frac{\mu^a \cdot o + (\bar{\mu}^a - \mu^a) V}{\bar{\mu}^a} \right\}$$

oder, bei Vernachlässigung des Deckungskapitals  $V$ , in

$$\left\{ \bar{\mu}^i, \bar{\mu}^a; \frac{\mu^i}{\bar{\mu}^i} B, o \right\} \stackrel{C}{=} \frac{\mu^i}{\bar{\mu}^i} \left\{ \bar{\mu}^i, \bar{\mu}^a; B, o \right\}.$$

Die gewünschte neue Prämie der Versicherungsform  $\{\bar{\mu}^i, \bar{\mu}^a; B, o\}$  berechnet sich demnach näherungsweise aus Multiplikation der ursprünglichen Prämie mit dem Faktor  $\frac{\bar{\mu}^i}{\mu^i}$ , wofür [10]

$$P^{(2)} \sim P^{(1)} \cdot \frac{1}{n} \left[ \frac{q_x^{(2)}}{q_x^{(1)}} + k_1 \cdot \frac{q_{x+1}^{(2)}}{q_{x+1}^{(1)}} + \dots + k_{n-1} \cdot \frac{q_{x+n-1}^{(2)}}{q_{x+n-1}^{(1)}} \right]$$

eine Berechnungsweise für die Praxis darstellt.

An Stelle der genauen Invaliditäts-Prämienberechnung können auch Versicherungsformen mit gewöhnlichen Sterbe-Intensitäten  $\mu$  und mit zugeordneten Leistungen  $\frac{\mu^i}{\mu} B$

$$\left\{ \mu; \frac{\mu^i}{\mu} B \right\} \stackrel{AC}{=} \left\{ \mu^i, \mu^a, \mu; B, o, V' \right\} + \left\{ \mu^i, \mu^a, \mu; V'', V'', -V' \right\}$$

herangezogen werden, oder man kann ganz auf die Einrechnung einer Sterblichkeit verzichten (beide Beispiele in [8])

$$\left\{ o; \frac{\mu^i}{o} B \right\} \stackrel{AC}{=} \left\{ \mu^i, \mu^a, \mu; B, o, V' \right\} + \left\{ \mu^i, \mu^a, \mu; V''', V''', V''' - V' \right\}.$$

Wird die ursprüngliche Versicherungsform für die genaue Prämienberechnung erweitert zu

$$\left\{ \mu^i, \mu^a; B, o \right\} \stackrel{A}{=} \left\{ \mu^i, \mu^a, \mu; B, o, V' \right\},$$

dann sieht man beim Vergleich der drei Versicherungsformen, dass sie – bei Vernachlässigung ihrer Deckungskapitalien  $V'$  bzw.  $V''$  bzw.  $V'''$  – näherungsweise durcheinander ersetzt werden können.

### Literaturnachweis

- [1] *Cantelli, F. P.*: Genesi e costruzione delle tavole di mutualità; Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza; Roma 1914.
- [2] *Cantelli, F. P.*: Sulle leggi di mutualità e sulle equazioni delle riserve matematiche; Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari; Roma 1938.
- [3] *Zwiggli, E.*: Versicherungsmathematik; Basel 1945.
- [4] *Schärf, H.*: Über einige Variationsprobleme der Versicherungsmathematik, MVSVM 41/2.
- [5] *Zwiggli, E.*: Untersuchungen über den Einbezug der vorzeitigen Vertragsauflösung . . . , MVSVM 43/1.
- [6] *Schulthess, H.*: Volterrasche Integralgleichungen in der Versicherungsmathematik; Diss. Bern 1945.
- [7] *Jacob, M.*: Zur Berechnung von Versicherungswerten bei Änderung der Rechnungselemente; Assekuranz-Jahrbuch 54, Wien-Leipzig 1935.
- [8] *Jacob, M.*: Sui metodi di approssimazione per il calcolo dei premi nelle assicurazioni d'invalidità; Atti del decimo Congresso Internazionale degli Attuari, I, Roma 1934.
- [9] *Jecklin, H.*: Näherungswerte für die gemischte Versicherung mehrerer verbundener Leben; MVSVM 46/1.
- [10] *Saxer, W.*: Über die Variation der Invaliditäts-Wahrscheinlichkeiten . . . , MVSVM 53/1.