Untersuchungen zur n-Methode der Reserveberechnung

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **58 (1958)**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966796

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Untersuchungen zur n-Methode der Reserveberechnung

Von *H. Jecklin*, Zürich

In verschiedenen Arbeiten hat Verfasser darauf hingewiesen, dass bei der gruppenweisen Reserveberechnung jene Methoden grosse Vorteile aufzuweisen haben, welche die Ermittlung der mathematischen Reserven nach Gruppen gleichen Zugangsjahres gestatten. Eine dieser Methoden für Gesamtheiten gemischter Versicherungen ist die t-Methode, bei welcher bekanntlich für Gruppen gleicher verflossener Dauer in guter Näherung gilt:

$$\sum^i {}_tV_{x_i:\overline{n_i}|} S_i = \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum^i P_{x_i:\overline{n_i}|} S_i - \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum^i S_i =$$

$$= \sum^i S_i + \frac{1}{{}_tE_\xi} \left(\ddot{a}_{\xi:\overline{t}|} \left(d \sum^i S_i + \sum^i P_{x_i:\overline{n_i}|} S_i\right) - \sum^i S_i \right). \tag{1}$$

Hiebei ist die Einzelversicherung mit dem Index i gekennzeichnet, welchen Index wir in der Folge einfachheitshalber weglassen, soweit kein Missverständnis zu befürchten ist. Ferner bedeutet ξ das durchschnittliche Eintrittsalter, das in analoger Weise bestimmt wird wie das durchschnittliche Endalter bei der nach Gruppen gleicher restlicher Versicherungsdauer arbeitenden Lidstoneschen Z-Methode. Es ist also ξ zu bestimmen aus der quasiarithmetischen Mittelbildung der x nach einer geeigneten Hilfsfunktion $g(x)$, somit

$$g(\xi) = \frac{\sum^i g(x)\, S}{\sum^i S}, \tag{2}$$

wobei im Falle streng monotonen Verlaufes der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit die Hilfsfunktion $g(x)$ gleich q_x gesetzt werden kann. Bezüglich der Fragen, die mit der Ermittlung von ξ zusammenhängen, sei auf anderweitige Publikationen verwiesen [1] [1]). Die t-Methode begegnet jedoch vielfach einer gewissen Abneigung, weil sie die Reserve in retrospektiver Weise erfasst.

Sofern es jedoch gelingt, ausser dem mittleren Eintrittsalter ξ auch einen geeigneten Wert ν für die durchschnittliche Versicherungsdauer zu ermitteln, dann können die Globalreserven nach Gruppen gleichen Zugangsjahres ganz einfach in folgender Weise prospektiv erfasst werden:

$$\sum^i {}_tV_{x:\overline{n}|}\, S = A_{\xi+t:\overline{\nu-t}|} \sum^i S - \ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t}|} \sum^i P_{x:\overline{n}|}\, S =$$

$$= \sum^i S - \left(d \sum^i S + \sum^i P_{x:\overline{n}|}\, S\right) \ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t}|}, \qquad (3)$$

oder noch einfacher:

$$\sum^i {}_tV_{x:\overline{n}|}\, S = {}_tV_{\xi:\overline{n}|} \sum^i S = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t}|}}{\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu}|}}\right) \sum^i S. \qquad (4)$$

Die Schwierigkeit liegt scheinbar in der Bestimmung der mittleren Dauer ν, denn dass diese nicht in arithmetischer Mittelung erfolgen kann, leuchtet unmittelbar ein. Verfasser hat denn auch bereits kurz darauf hingewiesen, dass befriedigende Werte eher durch gewichtete harmonische Mittelbildung erhalten werden, wie folgt:

$$\nu = \frac{\sum^i S}{\sum^i \frac{S}{n}}. \qquad (5)$$

Diese Art der Mittelbildung erscheint insofern plausibel, als bei dem vereinfachten Falle des linearen Reserveverlaufes ${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{t}{n}$ ist, und somit aus

$$\sum^i S \frac{t}{n} = \frac{t}{\nu} \sum^i S \qquad (6)$$

unmittelbar (5) folgt.

Damit genauerweise linearer Reserveverlauf resultiert, müsste allerdings $D_x = l_x v^x = k =$ konstant sein respektive in kontinuierlicher Betrachtungsweise

[1]) Literaturangaben am Schluss.

$$D_x = l_x e^{-\delta x} = k\,,$$

mithin
$$l_x = k\, e^{\delta x}. \tag{7}$$

Wie jedoch Rufener neuerdings in sehr interessanten Untersuchungen gezeigt hat [2], liefert ausserdem für Gruppen festen Endalters z die Annahme parabolischen Verlaufes der D_x, gegeben im Intervall $0 \leqq x \leqq z$ durch

$$l_x = k\,(z-x)^{\lambda}\, e^{\delta x}, \quad \lambda \geqq 0, \quad \delta \leqq \frac{1}{z}, \tag{8}$$

ebenfalls linearen Reserveverlauf. Dies würde immerhin eine gewisse Erklärung für befriedigende Versuche mit der n-Methode geben. Aus den Resultaten Rufeners wäre insbesondere noch zu folgern, dass sich die n-Methode auch für t-Gruppen lebenslänglicher Todesfallversicherungen eignet.

Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass die Güte der Reserveberechnung auf Basis eines nach (5) ermittelten ν wesentlich von der Summenverteilung nach dem Argument n abhängen kann, und zwar ist der Einfluss um so grösser, mit je stärkerem Gewichte lange Versicherungsdauern vorhanden sind. Auf diesen Punkt ist noch zurückzukommen. Verfasser ist in dieser Frage insbesondere Herrn H. Wenk, Basel, für einen brieflichen Gedankenaustausch zu Dank verpflichtet.

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob sich nicht durch geeignete quasiharmonische Mittelbildung nach einer Funktion der n eine bessere und doch einfache Ermittlung von ν finden lässt.

Um einen gewissen Einblick in den Sachverhalt zu gewinnen, betrachten wir den Fall des reinen Sparvertrages, d. h. die gemischte Versicherung mit $q_x \equiv 0$. Hier ist die Einzelreserve in retrospektiver Darstellung

$${}_tV_{\overline{n|}} = P_{\overline{n|}}\, \ddot{s}_{\overline{t|}}\,.$$

Wir setzen nun

$$\sum{}^{i} P_{\overline{n|}}\, \ddot{s}_{\overline{t|}}\, S \sim P_{\overline{\nu|}}\, \ddot{s}_{\overline{t|}} \sum{}^{i} S\,, \tag{9}$$

wobei ν in irgendeiner Weise, z. B. nach (5), ermittelt sein möge. Aus (9) folgt aber unmittelbar

$$\frac{\sum^{i} P_{\overline{n|}}\, S}{P_{\overline{\nu|}} \sum^{i} S} = k = \text{konst.}, \tag{10}$$

was heissen will, dass bei globaler Reserveberechnung nach (9) für gegebenen Zinsfuss der relative Fehler der Gruppenreserve konstant ist, solange die Zusammensetzung der Gruppe nicht ändert. Der Fehler ist hier also unabhängig von t.

Wir können die Globalformel (9) auch benützen, um ein genaues ν zu bestimmen. Aus

$$\sum_i P_{\overline{n}|}\, \ddot{s}_{\overline{t}|}\, S = P_{\overline{\nu}|}\, \ddot{s}_{\overline{t}|} \sum_i S \tag{11}$$

folgt

$$P_{\overline{\nu}|} = \frac{\sum_i P_{\overline{n}|}\, S}{\sum_i S} \tag{12}$$

und in weiterer Umformung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{\nu}|}} &= d + \frac{\sum_i P_{\overline{n}|}\, S}{\sum_i S}, \\ \ddot{a}_{\overline{\nu}|} &= \frac{1-v^\nu}{d} = \frac{\sum_i S}{d\sum_i S + \sum_i P_{\overline{n}|}\, S}, \\ v^\nu &= \frac{\sum_i P_{\overline{n}|}\, S}{d\sum_i S + \sum_i P_{\overline{n}|}\, S}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\nu = \frac{1}{\ln v}\left[\ln \sum_i P_{\overline{n}|}\, S - \ln\left(d\sum_i S + \sum_i P_{\overline{n}|}\, S\right)\right]. \tag{14}$$

Formel (13) kann man offenbar auch wie folgt schreiben:

$$\ddot{a}_{\overline{\nu}|} = \frac{\sum_i S}{\sum_i \frac{S}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}}, \tag{15}$$

womit eine Analogie zu (5) gegeben ist. Aus empirischen Rechnungen zu schliessen, sinkt im allgemeinen ν mit steigendem Zinssatz, aber in sehr geringfügigem Ausmass. Wichtig aber ist die Feststellung, dass ν von t unabhängig ist, und man kann mit guten Gründen annehmen, dass dies auch bei gemischter Versicherung der Fall ist.

Versuchen wir nun, bei der gemischten Versicherung eine ähnliche Betrachtungsweise anzustellen wie beim Sparvertrag. Wir setzen voraus, dass ein mittleres Eintrittsalter ξ in geeigneter Weise bestimmt werden kann, und es gelte zufolgedessen

$$\begin{aligned} \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum_i S &= \sum_i \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} S, \\ \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum_i S &= \sum_i \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} S. \end{aligned} \tag{16}$$

Schreiben wir nun in Analogie zu (11)

$$\sum_i \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:n} S - \sum_i \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} S =$$

$$= \frac{N_\xi - N_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} P_{\xi:\nu|} \sum_i S - \frac{M_\xi - M_{\xi+t}}{D_{\xi+t}} \sum_i S,$$

so folgt in Berücksichtigung von (16)

$$P_{\xi:\nu} = \frac{\sum_i \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:n|} S}{\sum_i \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} S} = \frac{\sum_i G(x,t) P_{x:n|} S}{\sum_i G(x,t) S}. \tag{17}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Weglassung der Gewichte $G(x,t)$ den Mittelwert nicht stark beeinflusst, kann man schreiben

$$P_{\xi:\nu} = \frac{\sum_i G(x,t) P_{x:n|} S}{\sum_i G(x,t) S} \sim \frac{\sum_i P_{x:n} S}{\sum_i S}. \tag{18}$$

Die Gewichte $G(x,t)$ vermitteln immerhin eine wichtige Erkenntnis. Wenn nämlich ν wie vermutet von t unabhängig und mithin während der ganzen Versicherungsdauer konstant ist, so ist ξ seinerseits von t abhängig, auf welchen Umstand wir noch ausführlicher eintreten werden.

Setzen wir nun für unsere Zwecke

$$P_{\xi:\nu} = \frac{\sum_i P_{x:\nu|} S}{\sum_i S}, \tag{19}$$

so ist

$$\ddot{a}_{\xi:\nu} = \frac{1}{P_{x:\nu|} + d}, \tag{20}$$

oder in einfacher Transformation

$$\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu}|} = \frac{\sum_i S}{\sum_i P_{x:\overline{n}|} S + d \sum_i S} = \frac{\sum_i S}{\sum_i \dfrac{S}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}}, \tag{21}$$

und es ist ν gegeben als quasi-harmonische Mittelbildung nach der Funktion $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, womit insofern eine vollständige Analogie zum ν des Sparvertrages vorliegt, als für $q_x \equiv 0$ Formel (21) in (15) übergeht, und diese hinwiederum für $i = 0$ in (5).

Wir haben bereits bemerkt, dass ν wesentlich abhängig ist von der Verteilung der Versicherungssummen S nach dem Argument n, gegenüber welchem Einfluss Sterbetafel und Zinsfuss in den Hintergrund treten. Wir denken uns, um ein Beispiel zu geben, zwei gemischte Versicherungen, beide mit Eintrittsalter $x = 30$, aber die eine mit Dauer $n_1 = 10$, die andere mit $n_2 = 30$. Bezeichnen wir die bezüglichen Versicherungssummen mit S_1 und S_2, so ist gemäss (19):

$$P_{x:\overline{\nu}|} = \frac{S_1 P_{x:\overline{n_1}|} + S_2 P_{x:\overline{n_2}|}}{S_1 + S_2},$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{\nu}|} = \frac{1}{P_{x:\overline{\nu}|} + d},$$

womit ν, da $x = 30$, festgelegt ist. Wir wollen die Bestimmung von ν einerseits auf Basis S.M. 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$ vornehmen (bezeichnet mit $\nu_{(SM)}$) und anderseits nach M und WI à $3\frac{1}{2}\%$ (bezeichnet mit $\nu_{(MW)}$). Vergleichsweise wird ν noch in gewogener harmonischer Mittelung gemäss (5) bestimmt als

$$\nu_{(H)} = \frac{S_1 + S_2}{\dfrac{S_1}{n_1} + \dfrac{S_2}{n_2}}.$$

Je nach der Ansetzung von S_1 und S_2 ergeben sich nun für ν recht verschiedene Werte, wie die nachstehenden beispielmässigen Angaben zeigen:

S_1	S_2	$\nu_{(SM)}$	$\nu_{(MW)}$	$\nu_{(H)}$
10	1	10.63	10.62	10.65
1	1	14.83	14.70	15.00
1	10	25.05	24.81	25.38

Ausser von den Gewichten S ist aber ν noch, wenn auch weit weniger stark, von der Verteilung der Eintrittsalter x abhängig, wie uns dies das folgende Rechenbeispiel zeigen möge. Es seien gegeben zwei gemischte Versicherungen, beide mit Eintrittsalter $x = 30$ und Versicherungssumme $S = 1$, aber die eine mit der Dauer $n_1 = 15$, die andere mit $n_2 = 25$. Wir bilden nun nach der Tafel S. M. 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$ die durchschnittliche Reserve ${}_tV_{x:\overline{\nu}|} = \frac{1}{2}({}_tV_{x:\overline{15}|} + {}_tV_{t:\overline{25}|})$ und können, da das gemeinsame Eintrittsalter $x = 30$ feststeht, aus einer Reservetabelle für verschiedene t das ν interpolatorisch bestimmen. So ergibt sich beispielsweise für

t:	5	10	15
${}_tV_{x:\overline{\nu}|}$:	220,77 ‰	472,60 ‰	760,09 ‰
ν:	18,69	18,69	18,69

Machen wir nun die genau gleiche Rechnung mit $x = 45$ anstatt $x = 30$, so erhalten wir folgende Resultate:

t:	5	10	15
${}_tV_{x:\overline{\nu}|}$:	223,03 ‰	472,47 ‰	759,55 ‰
ν:	18,55	18,55	18,55

Interessehalber sei erwähnt, dass sich im vorliegenden Falle durch einfache harmonische Mittelung gemäss Formel (5) ein $\nu = 18{,}75$ ergibt.

Wie diese Beispiele zeigen, ist also ν wesentlich von der Verteilung der Versicherungssummen bezüglich der n abhängig, in geringerem Masse sodann auch von der Verteilung der Eintrittsalter x bezüglich der n, sowie schliesslich von der Wahl der Sterbetafel und des technischen Zinssatzes. Dagegen ist ν von t unabhängig, d. h. während der Versicherungsdauer konstant, solange die eben erwähnten Verteilungen nicht ändern.

Nach den bisherigen Ausführungen würde es demnach für die Reserveberechnung nach t-Gruppen bei gegebenen Rechnungsgrundlagen genügen, pro Einzelversicherung die drei Werte S, $Sg(x)$ und $SP_{x:\overline{n|}}$ zu notieren. Man erhält dann mit Hilfe von (2) ein mittleres Eintrittsalter ξ der t-Gruppe, und sodann ist durch (21) ein die Gruppe repräsentierender Rentenwert $\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}}$ gegeben. Die mittlere Versicherungsdauer ν könnte nun auf Basis von ξ und $\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}}$ aus einer Rentenwerttabelle interpolatorisch bestimmt werden. Es wäre dies aber gar nicht notwendig, denn die Globalreserve ergäbe sich nunmehr nach der Relation (4) zu

$$\sum^{i} {}_tV_{x:\overline{n|}}\, S = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t|}}}{\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}}}\right) \sum^{i} S,$$

oder auch gemäss (3) zu

$$\sum^{i} {}_tV_{x:\overline{n|}}\, S = \sum^{i} S - \left(d \sum^{i} S + \sum^{i} P_{x:\overline{n|}}\, S\right) \ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t|}},$$

wobei

$$\ddot{a}_{\xi+t:\overline{\nu-t|}} = \frac{D_\xi}{D_{\xi+t}} \left(\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}} - \ddot{a}_{\xi:\overline{t|}}\right). \tag{22}$$

$\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}}$ ist bekannt, und $\ddot{a}_{\xi:\overline{t|}}$ auf Basis des ebenfalls bekannten ξ zu ermitteln.

Somit kann man festhalten, dass man bei der n-Methode, wie bei der t-Methode, im wesentlichen mit einer Hilfszahl, nämlich $Sg(x)$, auskommen kann, indem ja der absolute Prämienbetrag $SP_{x:\overline{n|}}$ ohnehin zur Bildung des Prämienübertrages benötigt wird. Wenn mit dem repräsentativen Rentenwert $\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu|}}$ gearbeitet wird, so ist die Methode übrigens nicht wesentlich verschieden von der t-Methode. Denn es ist $P_{\xi:\overline{\nu|}} \sum^{i} S = \sum^{i} P_{x:\overline{n|}}\, S$, und es lässt sich die prospektive Reserveformel (3) in die retrospektive Formel (1) überführen.

Eine ganz fundamentale Rolle spielt natürlich die Hilfsfunktion $g(x)$ zur Ermittlung des durchschnittlichen Eintrittsalters ξ. Es ist irgendwie unbefriedigend, dass die Wahl von $g(x)$ bis zu gewissem Grade Ermessensfrage sein soll, indem ja in der Literatur für $g(x)$ schon verschiedene Vorschläge gemacht wurden. Es drängt sich die Frage auf, ob zwischen den Ermittlungsmethoden für ξ und ν nicht eine Beziehung bestehen muss. Denkt man sich z. B. das Modell einer t-Gruppe von Versicherungen gleichen Endalters z, so könnte man schliessen, dass, wenn ν primär bestimmt wird, ξ damit bereits festgelegt ist. Denn für die einzelne Versicherung gilt hier

$$Sx + Sn = Sz. \tag{23}$$

Dann gilt offenbar weiter

$$S\frac{x}{n} + S\frac{n}{n} = S\frac{z}{n}\,,\ \text{d. h. } S\frac{x}{n} + S = S\frac{z}{n}\,,$$

$$\sum_i S\frac{x}{n} + \sum_i S = \sum_i S\frac{z}{n} = z\sum_i \frac{S}{n}\,,$$

$$\frac{\sum_i S\frac{x}{n}}{\sum_i \frac{S}{n}} + \frac{\sum_i S}{\sum_i \frac{S}{n}} = z\,. \tag{24}$$

Hierin ist das zweite Glied ν in harmonischer Mittelung der n gemäss (5), und wenn $z = \xi + \nu$, dann ist das erste Glied das diesem ν entsprechende ξ, d.h. es würde sich letzteres ergeben durch gewogene arithmetische Mittelbildung der x mit den Gewichten $\frac{S}{n}$. Aus (23) folgt aber anderseits

$$\sum_i Sx + \sum_i Sn = z\sum_i S\,,$$

$$\frac{\sum_i Sx}{\sum_i S} + \frac{\sum_i Sn}{\sum_i S} = z\,, \tag{25}$$

und die Verbindung von (24) und (25) ergibt

$$\xi = \frac{\sum_i Sx}{\sum_i S} + \frac{\sum_i Sn}{\sum_i S} - \frac{\sum_i S}{\sum_i \frac{S}{n}}\,. \tag{26}$$

Es wäre hier also ξ das arithmetische Mittel der x, plus arithmetisches Mittel der n, minus harmonisches Mittel der n, gewichtet jeweils mit den Summen. Nun werden aber t-Gruppen festen Endalters die Ausnahme bilden. Aber auch abgesehen hievon ist es sehr fraglich, ob das in einfacher algebraischer Deduktion nach (26) erhaltene ξ ein brauchbares mittleres Eintrittsalter für die Reserveberechnung darstellt. Supponieren wir, die Bestimmung von ξ gemäss (26) gelte auch für t-Gruppen ungleichen Endalters, und denken uns das Modell einer t-Gruppe von Versicherungen durchwegs gleichen Eintrittsalters x, aber von verschiedener Dauer. Dann hätte man nach (26)

$$\xi = x + \frac{\sum_i S n}{\sum_i S} - \frac{\sum_i S}{\sum_i \frac{S}{n}} > x .$$

Nun ist es allerdings denkbar, dass bei primär bestimmtem ν das rechnungsmässige ξ für die Reserveberechnung auch bei einer Gruppe gleichen Eintrittsalters x nicht identisch diesem x zu sein braucht. Das behebt aber die Schwierigkeiten nicht. Denn es ist daran zu erinnern, dass das in harmonischer Mittelung gemäss (5) ermittelte ν von der wahren mittleren Dauer etwas abweicht. Stützen wir uns aber auf den repräsentativen Rentenwert $\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu}|}$ gemäss (21), so steht man, abgesehen von speziell gelagerten Fällen (gleiches Eintrittsalter oder gleiche Dauer) vor einem Problem, das sich ohne eine gewisse Willkür kaum lösen lässt. Wir müssen entweder ξ primär nach einer mehr oder weniger willkürlichen Methode gemäss (2) bestimmen, und dann ist ν festgelegt, oder man kann ein genähertes ν primär gemäss (5) bestimmen, womit ξ festgelegt ist.

Die Schwierigkeiten sind damit aber noch nicht alle, sie beginnen erst. Denn wählt man die erstgenannte Möglichkeit – was wohl naheliegend ist und den traditionellen Verfahren entspricht – und bestimmt ξ primär nach einem Prozedere gemäss (2), so ist damit auf Basis des Rentenwertes $\ddot{a}_{\xi:\overline{\nu}|}$ lediglich ein ξ des ersten Versicherungsjahres festgelegt. Nennen wir das gemäss (2) ermittelte durchschnittliche Eintrittsalter ξ_0, das für die Reserveberechnung im Zeitpunkt t geeignete durchschnittliche Eintrittsalter aber ξ_t, so ist, wie bereits erwähnt,

$$\xi_t + t \neq \xi_0 + t . \tag{27}$$

Der Grund ist offensichtlich. Die Hilfsfunktion $g(x)$ ist nach allen bisher gemachten Vorschlägen eine konvexe, monoton steigende Funktion. Sei γ die Umkehrfunktion von g, so ist dann sicher [3]

$$\xi_0 = \gamma\left(\frac{\sum_i S\, g(x)}{\sum_i S}\right) \geqq \frac{\sum_i S x}{\sum_i S} . \tag{28}$$

Fassen wir nun die Reserve ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ für festes n und festes t als Funktion von x auf – nennen wir sie $V(x)$ – so haben wir je nach Wahl von n und t ganz verschiedenen Funktionsverlauf. Feststehend ist lediglich, dass $V(x)$ für $t = n - 1$, d.h. also kurz vor Versicherungsablauf stets monoton fallend ist. Denn aus der Rekursionsformel für die gemischte Versicherung folgt bekanntlich

$$ {}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = v - P_{x:\overline{n|}}, $$

und da
$$ P_{x:\overline{n|}} < P_{x+\Delta:\overline{n|}}, $$

gilt stets $\quad {}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = v - P_{x:\overline{n|}} > {}_{n-1}V_{x+\Delta:\overline{n|}} = v - P_{x+\Delta:\overline{n|}}.$

Im übrigen aber ist z. B. auf Basis der Sterbetafel S. M. 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$ der Verlauf von $V(x)$ grosso modo:
bei kurzer Dauer $n \sim 10$ für jegliches t konkav, monoton fallend,
bei Dauer $n \sim 15$ für t kurz nach Versicherungsbeginn konkav, nicht monoton,
bei Dauern $n \geqq 20$ für t kurz nach Versicherungsbeginn konkav oder fast linear steigend,
für t in Versicherungsmitte konkav, nicht monoton.

Um die Rückwirkung auf ξ_t zu veranschaulichen, wählen wir als Beispiel zwei gemischte Versicherungen, beide mit $S = 1$ und $n = 25$. Das Eintrittsalter sei bei der einen $x_1 = 25$, bei der andern $x_2 = 45$. Für das rechnungsmässige Eintrittsalter gemäss (2) ergibt sich dann beispielsweise,

wenn $g(x) = q_x$:	$41\frac{1}{2}$ Jahre,
wenn $g(x) = \ddot{a}_{x:\overline{15|}}$:	40 Jahre,
wenn $g(x) = \ddot{a}_{x:\overline{20|}}$:	$39\frac{1}{2}$ Jahre.

Wir rechnen nun ${}_tV = \frac{1}{2}\left({}_tV_{25:\overline{25|}} + {}_tV_{45:\overline{25|}}\right)$ für verschiedene t und suchen in der Reservetabelle von ${}_tV_{x:\overline{25|}}$ das entsprechende Eintritts alter. Auf Basis S. M. 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$ erhalten wir beispielsweise für

t:	5	10	15	20	24
${}_tV$:	154,62 ‰	326,86 ‰	518,76 ‰	736,96 ‰	942,13 ‰
ξ_t:	$34\frac{1}{2}$	33	26 oder 47	40	$39\frac{1}{2}$

Wenn man nun aber in Anbetracht solcher Ergebnisse das ganze Problem als unlösbar betrachten wollte, so wäre damit der Stab auch gebrochen über andere Reserveberechnungsmethoden, die sich auf Durchschnittsalter stützen, und die doch ihre praktische Brauchbarkeit unter Beweis gestellt haben. In praxi wird es vielmehr so sein, dass die einzelnen t-Gruppen eines Versicherungsunternehmens nicht nur einige wenige Policen umfassen, und dass die einzelne Gruppe hinsichtlich Versicherungssummen, Eintrittsalter und Dauern Verteilungen aufweist, die mehr oder weniger charakteristisch sind und sich von Gruppe zu Gruppe nicht stark ändern. Zufolge der Überlagerung von Versicherungen verschieden langer Dauer wird das resultierende ξ_t einen bedeutend weniger abenteuerlichen Verlauf aufweisen als im vorherigen Beispiel. Es kann hier z.B. auf die aus der Praxis hervorgegangenen Untersuchungen von Maurer und Boss hingewiesen werden [4]. Allerdings wird es kaum möglich sein, eine Funktion anzugeben, welche den Verlauf von ξ_t in jedem Falle genau wiedergibt. Wenn ξ_t als Funktion von t gegeben sein sollte, so müssten offenbar die Parameter derselben ihrerseits abhängig sein von der Verteilung der S und der n bezüglich des Argumentes x. Man wird sich auch hier mit gewissen plausiblen Annahmen und Vereinfachungen behelfen müssen.

Eine praktische Lösung kann darin bestehen, dass man neben dem durchschnittlichen Eintrittsalter ξ_0 noch ein zweites durchschnittliches Eintrittsalter ξ_k ermittelt, auf Grund der Summe der individuellen Reserven nach einer passend gewählten abgelaufenen Dauer k. Auf das praktische Prozedere brauchen wir im Detail nicht einzutreten, wir können diesbezüglich auf die bereits erwähnte Arbeit von Maurer und Boss verweisen. Für $0 < t < k$ kann dann ξ_t unter Verwendung einer parabolischen Interpolationsformel festgesetzt werden. In diesem Zusammenhange ist jedoch auf einen wichtigen Umstand hinzuweisen. Wenn man nämlich mit einem variablen ξ_t rechnet, so sind die verschiedenen genannten Formeln für die Globalreserve $\sum_i S\,{}_tV_{x:\overline{n}|}$ im allgemeinen nicht mehr ineinander überführbar, d.h. bei gleichem ξ_t numerisch nicht identisch. So wird das Ergebnis beispielsweise verschieden ausfallen, je nachdem, ob man als Bestimmungsgleichung für ξ_k

$$\sum_i S\,{}_kV_{x:\overline{n}|} = \sum_i S - \left(d \sum_i S + \sum_i S P_{x:\overline{n}|}\right) \ddot{a}_{\xi_k+k:\overline{\nu-k}|}\,, \tag{29}$$

oder

$$\sum_i S\,{}_kV_{x:\overline{n}|} = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{\xi_k+k:\overline{\nu-k}|}}{\ddot{a}_{\xi_k:\overline{\nu}|}}\right) \sum_i S \tag{30}$$

wählt. Der Unterschied liegt hier darin, dass im ersten Falle in der Prämiensumme der repräsentative Rentenwert $\ddot{a}_{\xi_0:\overline{\nu}|}$ implizit unverändert beibehalten bleibt, im zweiten Falle nur die durch ihn festgelegte durchschnittliche Versicherungsdauer ν. Relation (29) ist zur Bestimmung von ξ_k sicher einfacher als (30). Wird sie aber gewählt, dann muss aus eben genannten Gründen für die globale Reserveberechnung Formel (3) beibehalten werden, welche der Bestimmungsgleichung (29) entspricht. Die vom Verfasser an grösseren t-Gruppen effektiver Versicherungsbestände durchgeführten Untersuchungen deuten im übrigen darauf hin, dass bei $\xi_k < \xi_0$ parabolisch konkave, bei $\xi_k > \xi_0$ parabolisch konvexe Interpolationskurven für ξ_t in Frage kommen.

Die Frage ist berechtigt, ob denn die n-Methode gegenüber der t-Methode bei der Reserveberechnung Vorteile aufzuweisen habe. In der Tat dürfte dies, was die Reserveberechnung als solche anbelangt, kaum der Fall sein. Das Wesentliche liegt vielmehr darin, dass man ausser dem durchschnittlichen Alter auch die durchschnittliche Versicherungsdauer einer Gruppe feststellen kann. Auf Basis dieser charakteristischen Durchschnittswerte ist es möglich, im Falle von Grundlagenwechsel in der Reserveberechnung, insbesondere auch was den technischen Zinsfuss anbelangt, viel dynamischer zu operieren als bei irgendeiner anderen globalen Reserveberechnung. Dieser Umstand allein schon rechtfertigt es unseres Erachtens, das Studium der hier aufgezeigten Probleme noch zu vertiefen.

Literatur:

[1] *H. Jecklin:* Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t-Methode. M.V.S.M. Bd.42, 1.
H. Jecklin: Grundsätzliche Bemerkungen zur t-Methode. M.V.S.M. Bd.49, 2.
H. Jecklin: Reserveberechnung nach t-Gruppen. M.V.S.M. Bd.57, 1.
H. Ruch: Eine Variation der t-Methode. M.V.S.M. Bd. 48, 2 und Bd.49, 2.
N. A. Munro: Lidstone's Z-Method without Makeham's Law. Journal of the Inst. of Actuaries, Vol.83, 3.

[2] *E. Rufener:* Beiträge zur Theorie linearer Reserven. M.V.S.M. Bd.58, 1.

[3] *H. Jecklin:* Quasi-arithmetische Mittelwerte. Elemente der Mathematik, Bd.4, Hefte 5 und 6.

[4] *W. Maurer* und *M. Boss:* Eine verfeinerte t-Methode. M.V.S.M. Bd.54, 1.