Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 57 (1957)

Artikel: Über eine Bilineardarstellung der Barwerte temporärer Verbindungsrenten

Autor: Rufener, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551024

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine Bilineardarstellung der Barwerte temporärer Verbindungsrenten

Von *Ernst Rufener*, Zürich

1. Einleitung

In einem früheren Beitrag hat der Verfasser bewiesen, dass der temporäre Leibrentenbarwert sich genau dann durch eine k-gliedrige Bilinearform

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\, \Phi_i(x)\,, \qquad (k \geqq 1)$$

darstellen lässt, wenn die zugrunde gelegte Überlebensordnung eine lineare homogene Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllt [1]). *H. Jecklin* [2]) hat die Problemstellung auf Verbindungsrenten mit zwei Altersvariablen ausgedehnt und nachgewiesen, dass die Altersunabhängigkeit der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit notwendig und hinreichend sei für eine zweigliedrige Barwertformel

$$\mathsf{a}_{xy:\overline{n}|} = A(n) + B(n)\, q_{xy}\,.$$

In Anlehnung an ein von *R. Piccard* [3]) bei temporären Leibrenten auf ein Leben dargelegtes Verfahren lässt sich ebenfalls zeigen, dass durch den speziellen Ansatz

$$\bar{a}_{xy:\overline{t}|} = A(t,\delta) + B(t,\delta)\, e^{r(x+y)}$$

eine Überlebensordnung von Dormoy bestimmt wird [4]).

---

[1]) «Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 55. Band, Heft 3 (1955), S. 423–473.

[2]) «Lidstonesche Näherungsformel und Makehamsche Funktion», Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band II, Heft 1 (1954), S. 61–70.

[3]) «Bemerkungen zu der Lidstoneschen Z-Methode», Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, S. 281.

[4]) Siehe Fussnote 1 auf folgender Seite.

Die Überlebensordnung $L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{\nu=1}^{m} l_\nu(x_\nu)$ mit der Eigenschaft

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\, \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad (m \geqq 1,\ k \geqq 1) \qquad (1)$$

lässt sich in sinngemässer Verallgemeinerung des im Falle einer einzigen Altersvariablen erhaltenen Ergebnisses durch eine partielle lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\lambda} L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \qquad (2)$$

charakterisieren, so dass durch (1) Abfallsordnungen $l_\nu(x_\nu)$ bestimmt werden, die lineare Verbindungen einfacher Exponentialfunktionen mit Konstanten oder Polynomen in x_ν als Koeffizienten sind. Die Zeitrentenfunktionen $A_i(t,\delta)$ sind wie im Falle einer Altersvariablen als Lösungen eines linearen inhomogenen Systemes von Differentialgleichungen nach Vorgabe gewisser Anfangswerte eindeutig bestimmt.

---

[1]) Leitet man nämlich

$$\bar{a}_{xy:\overline{t}|} = \int_0^t {}_\tau p_{xy}\, e^{-\delta\tau}\, d\tau = A(t) + B(t)\, e^{r(x+y)}$$

nach t ab und setzt

$$\alpha(t) = e^{\delta t}\, \dot{A}(t), \quad \beta(t) = e^{\delta t}\, \dot{B}(t),$$

so folgt aus

$${}_t p_{xy} = \alpha(t) + \beta(t)\, e^{r(x+y)}$$

wegen

$${}_t p_{xy}\ {}_t p_{x+t,y+t} = {}_{2t} p_{xy},$$

$$\alpha^2(t) - \beta^2(t)\, e^{2r(x+y+t)} = \alpha(2t),$$

woraus durch Ableiten nach x auf

$$\beta^2(t)\, e^{2r(x+y+t)} = 0,$$

mithin auf

$$\beta(t) \equiv 0$$

und damit auf die Funktionalgleichung

$$\alpha^2(t) = \alpha(2t)$$

mit der Lösung

$$\alpha(t) = {}_t p_x = s^t,$$

geschlossen wird, welche Dormoys Überlebensordnung charakterisiert.

2. Bemerkungen zu einer speziellen partiellen linearen Differentialgleichung

Im folgenden betrachten wir die homogene partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung in m ($m \geqq 1$) Variablen mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^\mu \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \tag{2}$$

deren Lösungsgesamtheit wir charakterisieren.

Durch die lineare Variablentransformation

$$X = \xi_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m,$$
$$\xi_h = x_1 - x_h, \qquad (h = 2, 3, \ldots, m)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_1} \equiv \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h} \equiv \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_h} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_h}, \qquad (h = 2, 3, \ldots, m),$$

mithin

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \equiv m \frac{\partial}{\partial X}$$

und

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = (-1)^{m-1} m$$

geht (2) in eine lineare homogene Differentialgleichung k-ter Ordnung in X mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu m^\mu \left(\frac{d}{dX} \right)^\mu \psi(X; \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m) = 0 \tag{3}$$

über.

Die Variablen ξ_h, ($h = 2, 3, \ldots, m$) treten darin als Parameter auf. Die Lösungen von (3) bestimmen einen linearen Raum, der durch k Hauptlösungen $\Lambda_\nu(X)$, ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) aufgespannt wird; die Koeffizienten in den Linearverbindungen der Hauptlösungen sind Funktionen der Variablen ξ_h, ($h = 2, 3, \ldots, m$).

Vermöge des Ansatzes

$$\psi(X; \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m) = \chi(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m)\, e^{\bar{\varrho} X}$$

wird die Ermittlung eines Hauptsystems auf das Bestimmen der Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu m^\mu \bar{\varrho}^\mu = 0 \tag{4}$$

oder

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu \varrho^\mu = 0, \qquad \varrho = m\bar{\varrho} \tag{4'}$$

zurückgeführt.

Es sei $\bar{\varrho}_1$ σ_1-fache, $\bar{\varrho}_2$ σ_2-fache, ..., $\bar{\varrho}_j$ σ_j-fache Wurzel von (4), $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_j = k$. Die allgemeine Lösung von (3) ist dann gegeben durch

$$\psi(X; \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m) = \sum_{i=1}^{j} e^{\bar{\varrho}_i X} \sum_{\mu=1}^{\sigma_i} \chi_{i\mu}(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m)\, X^{\mu-1} \tag{5}$$

und es wird

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{j} e^{\bar{\varrho}_i (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)} \,.$$

$$\sum_{\mu=1}^{\sigma_i} \Omega_{i\mu}(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^{\mu-1} \tag{5'}$$

allgemeine Lösung von (2). $\chi_{i\mu}$ sind willkürlich gewählte Funktionen der Variablen ξ_h, $(h = 2, 3, \ldots, m)$, mithin sind die $\Omega_{i\mu}$ willkürliche Funktionen der Differenzen $x_1 - x_h$, $(h = 2, 3, \ldots, m)$.

Im Falle k reeller voneinander verschiedener Wurzeln $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \ldots, \bar{\varrho}_k$ bildet $\Lambda_\nu(X) = e^{\bar{\varrho}_\nu X}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ ein Hauptsystem und es ist

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)\, e^{\bar{\varrho}_i (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)}$$

allgemeine Lösung. Ist $\bar{\varrho}$ k-fache reelle Wurzel der charakteristischen Gleichung, so wird ein Hauptsystem durch

$$\Lambda_\nu(X) = X^{\nu-1} e^{\bar{\varrho} X}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

bestimmt, und die allgemeine Lösung (5′) ist dann von der Form

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^{i-1}\, e^{\bar{\varrho}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)}.$$

Wählt man für die Berechnung des Barwertintegrals

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \cdots x_m : \overline{t}|} = \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^t \varphi(x+\xi)\, e^{-\delta\xi}\, d\xi$$

eine in der Lösungsmenge (5′) enthaltene Funktion als Sterbegesetz, so lässt sich für den Barwert nach einigen Umformungen die k-gliedrige Summe

$$\frac{1}{\varphi(x)} \sum_{i=1}^{j} e^{\varrho_i X} \sum_{\nu=1}^{\sigma_i} \left\{ \sum_{\mu=\nu}^{\sigma_i} \frac{(\mu-1)!}{(\mu-\nu)!} \Omega_{i\mu}(x_1-x_2, \ldots, x_1-x_m)\, X^{\mu-\nu} \right\} \frac{m^\nu}{(\nu-1)!} \int_0^t \xi^\nu e^{-(\delta-\varrho_i)\xi}\, d\xi,$$

$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, angeben, in der Altersvariable und Rentendauer im Sinne unseres Ansatzes getrennt sind. Es gilt daher

Satz 1. *Für ein Sterbegesetz, das der Lösungsmenge* $\{\varphi\}$ *angehört, lässt sich der temporäre Leibrentenbarwert durch eine k-gliedrige Bilinearformel*

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{t}|} = \sum_{i=1}^{k} A_i(t,\delta)\, \Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

darstellen.

3. Bezeichnungen und Differentialrelationen

Die Ausscheideordnung der versicherten Personengruppe

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

sei durch

$$L(x) = L(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{\nu=1}^{m} l_\nu(x_\nu), \qquad (m \geqq 1)$$

dargestellt. Von den Funktionen $l_\nu(x_\nu)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ setzen wir hinreichende Regularität voraus, so dass alle nachfolgenden Operationen erlaubt sind. Der Überlebensordnung $L(x)$ werde nun die Funktion

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{\nu=1}^{m} f_\nu(x_\nu) = e^{-\frac{\delta}{m}\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu} L(x) \tag{6}$$

mit

$$f_\nu(x_\nu) = e^{-\frac{\delta}{m} x_\nu}\, l_\nu(x_\nu)$$

zugeordnet,

so dass der Barwert der temporären Verbindungsrente in der für unsere Untersuchungen geeigneten Form

$$\alpha(x,t) = \bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{t}|} = \int_0^t \prod_{\nu=1}^m \frac{f(x_\nu + \xi)}{f(x_\nu)}\, d\xi = \frac{1}{F(x)} \int_0^t F(x+\xi)\, d\xi$$

geschrieben werden kann. Durch Ableiten von

$$F(x)\,\alpha(x,t) = \int_0^t F(x+\xi)\, d\xi$$

nach t findet man einerseits

$$F(x)\,\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} = F(x+t)\,;$$

anderseits wird die Ableitung von $F(x)\,\alpha(x,t)$ in der Richtung $\mathfrak{e}(1,1,\ldots,1)$ durch Projektion des Gradienten grad $F(x)\,\alpha(x,t)$ in diese Richtung bestimmt:

$$\left(\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) F(x)\,\alpha(x,t) = \int_0^t \prod_{\nu=1}^m f(x_\nu + \xi) \sum_{\mu=1}^m \frac{f'(x_\mu + \xi)}{f(x_\mu + \xi)}\, d\xi =$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\xi} F(x+\xi)\, d\xi = F(x+t) - F(x)\,.$$

Beide Ableitungen lassen sich in

$$\left(\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x)\,\alpha(x,t) = -F(x) \tag{7}$$

zusammenfassen. Unter Berücksichtigung von (6) und

$$\text{grad}\; e^{-\frac{\delta}{m}(x_1+x_2+\ldots+x_m)} = -\frac{\delta}{m}\, e^{-\frac{\delta}{m}(x_1+x_2+\ldots+x_m)}\, \mathfrak{e}\,,$$

erhält man

$$\left(\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) F(x)\,\alpha(x,t) = e^{-\frac{\delta}{m}\sum_{\nu=1}^m x_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \delta\right) L(x)\,\alpha(x,t)\,,$$

und hieraus in Verbindung mit (7)

$$\left(\sum_{\nu=1}^m \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial t} - \delta\right) L(x)\,\alpha(x,t) = -L(x)\,. \tag{8}$$

4. Die Normalform der Bilineardarstellung

Satz 2. *Der temporäre Leibrentenbarwert habe die Bilinearentwicklung*

$$(1) \qquad \alpha(x,t) = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\, \Phi_h(x)\,, \qquad (k \geqq 1)\,.$$

Die Funktionen $A_1(t), A_2(t), \ldots, A_k(t)$ seien linear unabhängig vorausgesetzt (keine Einschränkung der Allgemeinheit) und ausserdem sei

$$\underset{\substack{i=1,2,\ldots,k \\ h=1,2,\ldots,k}}{\mathrm{Det}} \left\| A_h^{(i)}(0) \right\| \neq 0\,.$$

Der Barwertformel (1) entsprechen dann die Beziehungen

$$\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \frac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda-1} f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_m(x_m)}{f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_m(x_m)} \tag{9}$$

oder

$$\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t) \frac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda-1} l_1(x_1)\, l_2(x_2) \ldots l_m(x_m)}{l_1(x_1)\, l_2(x_2) \ldots l_m(x_m)}\,. \tag{9'}$$

Die nur von Rentendauer t und Zinsintensität δ abhängigen Funktionen $\eta_\lambda(t)$ und $y_\lambda(t)$ entstehen aus den $A_h(t)$ durch lineare Transformation.

Beweis. i-maliges Ableiten von

$$\alpha(x,t) = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\, \Phi_h(x) = \frac{1}{F(x)} \int_0^t F(x+\xi)\, d\xi$$

nach t führt zu den Beziehungen

$$F(x) \sum_{h=1}^{k} A_h^{(i)}(t)\, \Phi_h(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{i-1} F(x+t)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k)\,,$$

aus denen für $t = 0$ unter Beachtung von

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\lambda} F(x+t)\right]_{t=0} = \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda} F(x)\,, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

das in den k Funktionen $\Phi_h(x)$ lineare System

$$\sum_{h=1}^{k} A_h^{(i)}(0)\, \Phi_h(x) = \frac{1}{F(x)} \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{i-1} F(x)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{10}$$

erhalten wird, welches diese Funktionen bestimmt. Die Anfangswerte der Ableitungen der zeitabhängigen und stillschweigend als beliebig oft differenzierbar vorausgesetzten Funktionen $A_i(t)$ seien wie früher mit

$$A_h^{(i)}(0) = a_{ih}, \quad (i,h = 1, 2, \ldots, k)$$

bezeichnet und in die k-reihige quadratische Matrix

$$A = \|a_{ih}\|$$

vom Range k mit der inversen Matrix

$$A^{-1} = \|a^{ih}\|, \quad a^{ih} = \frac{A_{hi}}{|A|}, \quad |A| = \operatorname{Det}\|a_{ih}\| \neq 0$$

zusammengefasst.

Da $\operatorname{Det}\|a_{ih}\| \neq 0$, lassen sich mittels (10) in

$$\alpha(x,t) = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\, \Phi_h(x)$$

die k Funktionen $\Phi_h(x)$ eliminieren, und man erhält das in Determinantenform gekleidete Ergebnis

$$\operatorname*{Det}_{\substack{\lambda=1,2,\ldots,k\\ \mu=1,2,\ldots,k}} \left\| \begin{array}{c:c} \alpha(x,t) & A_1(t)\, A_2(t) \ldots A_k(t) \\ \hdashline \dfrac{1}{F(x)} \left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{\lambda-1} & \alpha_{\lambda\mu} \end{array} \right\| = 0.$$

Für den Rentenbarwert erhält man nun durch Entwickeln nach den Elementen der ersten Kolonne

$$\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \left(\sum_{\mu=1}^{k} a^{\mu\lambda}\, A_\mu(t) \right) \frac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{\lambda-1} F(x)}{F(x)},$$

und hieraus nach der Festsetzung

$$\eta_\lambda(t) = \sum_{\mu=1}^{k} a^{\mu\lambda}\, A_\mu(t) \tag{11}$$

die mit (9) übereinstimmende Formel

$$\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \frac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{\lambda-1} F(x)}{F(x)}.$$

Die vermöge (11) definierte lineare Transformation sei durch

$$H(t) = (A^{-1})' A(t) = (A')^{-1} A(t), \tag{11'}$$

$$H(t) = \left\| \begin{matrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_k(t) \end{matrix} \right\|, \qquad A(t) = \left\| \begin{matrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ \vdots \\ A_k(t) \end{matrix} \right\|, \qquad \text{festgehalten.}$$

Um in (9) die rechten Seiten durch die Überlebensordnung $L(x)$ darzustellen, beachten wir die aus

$$\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) F(x) = e^{-\frac{\delta}{m}(x_1+x_2+\ldots+x_m)} \left(-\delta + \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) L(x)$$

entspringende Relation

$$\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^\lambda F(x) = e^{-\frac{\delta}{m}(x_1+x_2+\ldots+x_m)} \left(-\delta + \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^\lambda L(x), \tag{12}$$

$$(\lambda = 0, 1, \ldots, k),$$

und ersetzen den in (9) unter dem Summenzeichen stehenden Differentialausdruck durch

$$\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda-1} F(x) = e^{-\frac{\delta}{m}(x_1+x_2+\ldots+x_m)} \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \binom{\lambda-1}{\sigma-1} (-\delta)^{\lambda-\sigma} \left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\sigma-1} L(x).$$

Wir erhalten

$$\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \binom{\lambda-1}{\sigma-1} (-\delta)^{\lambda-\sigma} \frac{\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\sigma-1} L(x)}{L(x)} =$$

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \left\{ \sum_{\lambda=\sigma}^{k} \eta_\lambda(t) \binom{\lambda-1}{\sigma-1} (-\delta)^{\lambda-\sigma} \right\} \frac{\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\sigma-1} L(x)}{L(x)} = \sum_{\sigma=1}^{k} y_\sigma(t) \frac{\left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\sigma-1} L(x)}{L(x)},$$

mithin (9'). Die zeitabhängigen Funktionen $y_\sigma(t)$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, k)$ sind durch

$$y_\sigma(t) = \sum_{\lambda=\sigma}^{k} \eta_\lambda(t) \binom{\lambda-1}{\sigma-1} (-\delta)^{\lambda-\sigma} = \sum_{\lambda=\sigma}^{k} d_{\lambda\sigma}\, \eta_\lambda(t) \tag{13}$$

oder

$$Y(t) = \left\| \begin{matrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{matrix} \right\| \quad \text{und} \quad D = \|d_{ih}\| = \left\| \binom{i-1}{h-1} (-\delta)^{i-h} \right\| \quad \text{gesetzt,}$$

durch die Beziehung $$Y(t) = D'H(t) \tag{13'}$$
definiert, welche in Verbindung mit (11′) die lineare Transformation
$$Y(t) = D'(A^{-1})'\,A(t) = (A^{-1}D)'\,A(t) = T'\,A(t), \tag{14}$$
$$T = A^{-1}D, \quad |T| = |A|^{-1} \qquad \text{festlegt.}$$

5. Die Differentialgleichungen für die Funktionen $F(x)$ und $L(x)$

Satz 3. *Durch jede der beiden nicht weiter verkürzbar vorausgesetzten Bilinearformen*

$$\alpha(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t) \dfrac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda-1} F(x)}{F(x)}, & (9) \\[2ex] \sum\limits_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t) \dfrac{\left(\sum\limits_{\nu} \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda-1} L(x)}{L(x)}, & (9') \end{cases}$$

sind die Funktionen $F(x)$ und $L(x)$ als Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Form

$$(2) \quad \sum_{\lambda=0}^{k} c_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\lambda} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

bestimmt.

Beweis: Im Hinblick auf eine geschmeidigere Darstellung seien die Grössen
$$F_\lambda(x) = \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda} F(x)$$
und
$$L_\lambda(x) = \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\lambda} L(x)$$
eingeführt.

Die Differentialrelation
$$(7) \quad \left(\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial t}\right) F(x)\,\alpha(x,t) = -F(x)$$
führt in Verbindung mit
$$F(x)\,\alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} \eta_\lambda(t)\,F_{\lambda-1}(x)$$

auf die Beziehung

$$F_k(x) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \frac{\dot{\eta}_{\lambda+1}(t) - \eta_\lambda(t)}{\eta_k(t)} F_\lambda(x) - \frac{\dot{\eta}_1(t) - 1}{\eta_k(t)} F(x) = 0,$$

in der $\eta_k(t) \not\equiv 0$ vorausgesetzt werden darf und die sich nach den Definitionen $F_0(x) = F(x)$,

und

$$Q_\lambda(t) = -\frac{\dot{\eta}_{\lambda+1}(t) - \eta_\lambda(t)}{\eta_k(t)}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1), \tag{15}$$

$$Q_0(t) = -\frac{\dot{\eta}_1(t) - 1}{\eta_k(t)}$$

durch

$$F_k(x) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} Q_\lambda(t) F_\lambda(x) = 0 \tag{16}$$

schreiben lässt. Um einzusehen, dass darin die Grössen $Q_\lambda(t)$ Konstante sind, beweisen wir zunächst den folgenden *Hilfssatz:*

Sind in $$g(x) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} q_\lambda(t) f_\lambda(x) \equiv 0 \quad \textit{(in } x \textit{ und } t\textit{)}$$

die Funktionen $f_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$ *linear unabhängig, dann sind die* $q_\lambda(t)$ *Konstante.*

Dieser Satz wird indirekt bewiesen. Angenommen, es existiere ein $q_\nu(t) \not\equiv c$ für $0 \leqq \nu \leqq k-1$, so würde für geeignet gewählte Argumente a und b $(a \neq b)$ die Differenz

$$q_\nu(a) - q_\nu(b) \neq 0$$

ausfallen. In der durch Subtraktion aus

$$g(x) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} q_\lambda(a) f_\lambda(x) \equiv 0$$

und

$$g(x) + \sum_{\lambda=0}^{k-1} q_\lambda(b) f_\lambda(x) \equiv 0$$

gewonnenen Relation

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} [q_\lambda(a) - q_\lambda(b)] f_\lambda(x) \equiv 0 \quad (\text{in } x)$$

müsste daher mindestens eine der Grössen

$$q_\lambda(a) - q_\lambda(b)$$

von Null verschieden sein, wodurch ein Widerspruch zur vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der $f_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$ entsteht.

Da die Normalform der Bilineardarstellung eine minimal vorausgesetzte Gliederzahl enthält, sind in (16) die Funktionen $F_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$ linear unabhängig anzunehmen [1]). Nach dem Hilfssatz ist

$$Q_\lambda(t) = \omega_{k-\lambda} = \text{konstant}, \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{15'}$$

und die Funktion $F(x)$ hat demnach der Differentialgleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{k} \omega_{k-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^\lambda F(x) = 0, \quad \omega_0 = 1 \tag{17}$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$r^k + \omega_1 r^{k-1} + \ldots + \omega_k = 0 \tag{18}$$

zu genügen.

Tritt an Stelle von (7)

$$(8) \qquad \left(\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{\partial}{\partial t} - \delta \right) L(x)\, \alpha(x,t) = -L(x),$$

so führen dieselben Erwägungen unter Berücksichtigung von

$$L(x)\, \alpha(x,t) = \sum_{\lambda=1}^{k} y_\lambda(t)\, L_{\lambda-1}(x)$$

auf die Differentialgleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{k} \varkappa_{k-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^\lambda L(x) = 0, \quad \varkappa_0 = 1, \tag{19}$$

welche die Überlebensordnung $L(x)$ als notwendige Bedingung für die Darstellbarkeit der Verbindungsrente als Bilinearform zu erfüllen hat. (19) ist die charakteristische Gleichung

$$\varrho^k + \varkappa_1 \varrho^{k-1} + \ldots + \varkappa_k = 0 \tag{20}$$

zugeordnet, deren Koeffizienten durch

$$\varkappa_{k-\lambda} = -\frac{\dot{y}_{\lambda+1}(t) + \delta \dot{y}_{\lambda+1}(t) - y_\lambda(t)}{y_k(t)}, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k-1)$$

und

$$\varkappa_k = -\frac{\dot{y}_1(t) + \delta y_1(t) - 1}{y_k(t)} \tag{21}$$

definiert sind.

---

[1]) Bei linearer Abhängigkeit der $F_\lambda(x)$, $(\lambda = 0, 1, \ldots, k-1)$,

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} c_\lambda F_\lambda(x) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} c_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^\lambda F(x) = 0,$$

(nicht alle $c_\lambda = 0$), müsste nach Satz 1 der Rentenbarwert bereits eine Bilinearform mit weniger als k Gliedern haben.

Aus (12) schliesst man, dass die Wurzeln der beiden charakteristischen Gleichungen (18) und (20) durch

$$\varrho = r + \delta$$

miteinander verknüpft sind.

6. Darstellung der Überlebensordnungen $l_\nu(x_\nu)$

Im einfachsten Falle, $\underline{k = 1}$, $\underline{m = 2}$, ist die allgemeine Lösung von (20) nach (5′) durch

$$L(x,y) = a(x-y)\, e^{\alpha x + \beta y}, \quad \alpha + \beta = \bar{\varrho}$$

gegeben. In Verbindung mit der Produktdarstellung der zusammengesetzten Ordnung

$$L(x,y) = l_1(x)\, l_2(y)$$

folgt

$$l_1(x) = L(x,0) = a(x)\, e^{\alpha x},$$
$$l_2(y) = L(0,y) = a(-y)\, e^{\beta y},$$

und hieraus, $L(0,0) = 1$ angenommen, für die Koeffizientenfunktion die Hamelsche Funktionalgleichung

$$a(x)\, a(-y) = a(x-y),$$

die unter schwachen Regularitätsvoraussetzungen die Lösung

$$a(x) = K\, e^{\gamma x} \quad ^{1)}$$

hat, so dass

$$l_1(x) = K\, e^{(\alpha+\gamma)x} = K\, s_1^x,$$
$$l_2(y) = K\, e^{(\beta+\gamma)x} = K\, s_2^x$$

in Übereinstimmung mit dem bekannten Ergebnis einfache Exponentialfunktionen sind.

---

[1]) $a(x)\, a(-y) = a(x-y)$ wird durch Logarithmieren auf die Funktionalgleichung

$$\varphi(\xi) + \varphi(\eta) = \varphi(\xi + \eta)$$

mit der trivialen Lösung

$$\varphi(\xi) = A\xi$$

zurückgeführt. Wird Differentierbarkeit, Stetigkeit oder Beschränktheit über die Lösungsfunktion vorausgesetzt, so ist die triviale Lösung auch einzige Lösung. Die nichttriviale Lösung überdeckt als «Kurve» die ganze Ebene dicht; sie ist in jedem Punkt unstetig. Vgl. *G. Hamel*, «Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$». Math. Annalen 60 (1905), S. 459–462.

$k = 2$, $m = 2$. Die beiden reellen Wurzeln $\bar{\varrho}_1$ und $\bar{\varrho}_2$ der charakteristischen Gleichung seien voneinander verschieden. Aus

$$L(x,y) = l_1(x)\, l_2(y) = a(x-y)\, e^{\bar{\varrho}_1(x+y)} + b(x-y)\, e^{\bar{\varrho}_2(x+y)}$$

wird,

$$l_1(x)\, e^{-\bar{\varrho}_1 x} = g(x), \quad l_2(y)\, e^{-\varrho_1 y} = h(y), \quad \bar{\varrho}_2 - \bar{\varrho}_1 = 1$$

gesetzt, zunächst auf

$$g(x)\, h(y) = a(x-y) + b(x-y)\, e^{x+y}$$

oder

$$\left(1 - \frac{D}{2}\right) g(x)\, h(y) = a(x-y), \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

und hieraus auf die Relation

$$D\left(1 - \frac{D}{2}\right) g(x)\, h(y) = 0$$

geschlossen, die — $y = 1$ bzw. $x = 1$ gewählt — lehrt, dass die Funktionen $g(x)$ bzw. $h(y)$, mithin $l_1(x)$ oder $l_2(y)$ aus einer Summe von Exponentialfunktionen mit konstanten Koeffizienten aufgebaut sind.

Um einzusehen, dass im allgemeinen Falle die Überlebensordnungen $l_\nu(x_\nu)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ Linearkombinationen von Exponentialfunktionen in x_ν mit Konstanten oder Polynomen in x_ν als Koeffizienten sind, ordne man (19) nach absteigenden Potenzen von $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$. Da im erhaltenen Differentialausdruck nur $l_\nu(x_\nu)$ der Differentiation nach x_ν unterliegt, stellt er – $x_\mu = 1$, $(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \mu \not\equiv \nu)$ gewählt – eine homogene lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung für $l_\nu(x_\nu)$ dar, woraus die Behauptung ersichtlich ist. – Die Umkehrung des Satzes, wonach jede aus einfachen Sterbegesetzen vom Exponentialtypus aufgebaute Überlebensordnung zu einer Bilineardarstellung des Rentenbarwertes Anlass gibt, ist trivial.

Satz 4. *Der temporäre Leibrentenbarwert* $\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{t}|}$ *ist dann und nur dann in der Form*

$$\bar{a}_{x_1 x_2 \ldots x_m : \overline{t}|} = \sum_{h=1}^{k} A_h(t)\, \Phi_h(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

darstellbar, wenn die versicherten Leben x_ν *Sterbegesetze* $l_\nu(x_\nu)$ *befolgen, die eine Linearkombination von Exponentialfunktionen in* x_ν *sind, mit Konstanten oder Polynomen in* x_ν *als Koeffizienten.*

Die Frage nach den durch die gegebene Gliederzahl k einer Bilinearentwicklung des Rentenbarwertes bestimmten Darstellungsmöglichkeiten der einfachen Überlebensordnungen $l_\nu(x_\nu)$ führt zu nichtelementaren, durch eine eigenartige arithmetische Struktur ausgezeichneten Problemen. Wir begnügen uns mit einem Hinweis: Sind im Falle zweier Altersvariablen die Ordnungen $l_1(x)$ und $l_2(y)$ lineare Verbindungen von Exponentialfunktionen mit konstanten Koeffizienten,

$$l_1(x) = \sum_{\nu=1}^{k_1} \lambda_{1\nu}\, e^{\alpha_\nu x}, \quad l_2(y) = \sum_{\nu=1}^{k_2} \lambda_{2\nu}\, e^{\beta_\nu y},$$

dann ist die Anzahl der Möglichkeiten für die gleichzeitige Wahl von k_1 und k_2 bei gegebenem k bestimmt durch die Anzahl Teiler τ_k von k [1]):

k	k_1	k_2	Anzahl Möglichkeiten τ_k
1	1	1	1
2	1 2	2 1	2
3	1 3	3 1	2
4	1 2 4	4 2 1	3

7. Darstellung der Zeitrentenfunktionen $\eta_i(t)$ und $y_i(t)$

Die Relationen (15) – in Verbindung mit (15′) – und (21) stellen für die unbestimmten Funktionen $\eta_i(t)$ und $y_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ je ein lineares inhomogenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar,

---

[1]) Die Zahlen τ_k sind Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung der Lambertschen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{1-z^\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k z^k = z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 4z^8 + \ldots$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ_k	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

$$\dot{H}(t) = R\,H(t) + Q, \tag{22}$$

$$\dot{Y}(t) = P\,Y(t) + Q, \tag{22'}$$

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & & & & -\omega_k \\ 1 & 0 & & & -\omega_{k-1} \\ & 1 & 0 & & -\omega_{k-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\omega_1 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} -\delta & & & & -\varkappa_k \\ 1 & -\delta & & & -\varkappa_{k-1} \\ & 1 & -\delta & & -\varkappa_{k-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -(\delta+\varkappa_1) \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix},$$

deren Lösungen durch die Anfangswerte

$$H(0) = Y(0) = 0 \quad ^{1)}$$

eindeutig bestimmt sind.

Da die Säkulargleichungen der homogenen Systeme

$$\ddot{H}(t) = R\,\dot{H}(t), \tag{23}$$

$$\ddot{Y}(t) = P\,\dot{Y}(t), \tag{23'}$$

$$\operatorname{Det} \| R - rE \| = r^k + \omega_1 r^{k-1} + \ldots + \omega_k = 0,$$

$$\operatorname{Det} \| P - rE \| = \varrho^k + \varkappa_1 \varrho^{k-1} + \ldots + \varkappa_k = 0, \quad \varrho = r + \delta$$

mit den charakteristischen Polynomen (18) und (20) der Differentialgleichungen für $F(x)$ und $L(x)$ übereinstimmen, bleiben die früher [2]) eingehend dargelegten Zusammenhänge zwischen Zeitrentenfunktion und Überlebensordnung auch im Falle der Verbindungsrente mit beliebig vielen Variablen erhalten [3]).

---

[1]) $H(0) = Y(0) = A(0) = 0$ ist die Folge der Voraussetzung, dass die Bilinearform des Leibrentenbarwertes nicht weiter verkürzbar ist.

[2]) Vgl. die auf der ersten Seite in Fussnote 1 zitierte Arbeit.

[3]) Wegen (11') $A(t) = A'\,H(t)$ erfüllt $A(t)$ das inhomogene System

$$\dot{A}(t) = A'\,R(A')^{-1}\,A(t) + A'\,Q, \quad A(0) = 0,$$

und es ist

$$\ddot{A}(t) = A'\,R(A')^{-1}\,\dot{A}(t) = P\,\dot{A}(t).$$

Aus (13') und (23') folgt $R = (D')^{-1}\,PD$ und damit die Ähnlichkeit der drei Matrizen P, R, und $\bar{P}$. Da

$$\operatorname{Spur} \bar{P} = \operatorname{Spur} A'\,R(A')^{-1} = \operatorname{Spur} R = \operatorname{Spur} (D')^{-1}\,PD' =$$
$$\operatorname{Spur} P = -\omega_1 = -k\delta - \varkappa_1 = r_1 + r_2 + \ldots + r_k,$$

und weil die Wronskische Determinante $\Delta(t)$ eines linearen Systems $\dot{\mathfrak{Y}}(t) = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Y}(t)$ der Relation $\dot{\Delta}(t) = \operatorname{Spur} \mathfrak{P}\,\Delta(t)$ zu genügen hat, schliesst man auf

$$\operatorname{Det} \| A_h^{(i)}(t) \| = \operatorname{Det} \| A_h^{(i)}(0) \|\, e^{(r_1+r_2+\ldots+r_k)t},$$

mithin auf $\operatorname{Det} \| A_h^{(i)}(t) \| \neq 0 \;\; (t \geqq 0)$, falls $\operatorname{Det} \| A_h^{(i)}(0) \| \neq 0$.