**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 57 (1957)

**Artikel:** Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage

**Autor:** Ammeter, Hans

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-550876

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungswesen auf risikotheoretischer Grundlage

Von *Hans Ammeter*, Zürich

*Der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt zu ihrem 100jährigen Jubiläum gewidmet*

## A. Problemstellung und grundsätzliche Erwägungen

1. Der Gewinn aus irgendeiner wirtschaftlichen Tätigkeit wird grundsätzlich nach dem Schema

$$\text{Gewinn} = \text{Erlös} - \text{Aufwand}$$

ermittelt. Für die nicht vollständig innerhalb der Abrechnungsperiode abgewickelten Geschäfte, die sogenannten unvollendeten Umsätze, sind dabei besondere Rückstellungen einzusetzen, welche, je nachdem es sich um eine Erfolgs- oder Liquidationsrechnung handelt, in verschiedener Weise zu bemessen sind.

Im Versicherungswesen tritt eine besondere Art von nicht vollendeten Umsätzen auf. Die Prämienberechnung geht nämlich von einem vollendeten Risikoumsatz, d. h. von der Annahme aus, dass alle theoretisch möglichen Schadenabläufe auftreten. Praktisch wird jedoch wegen der stochastischen Natur des versicherungsmässigen Risikos immer nur ein Teil dieser Möglichkeiten realisiert; der verbleibende Rest von nicht aufgetretenen Möglichkeiten äussert sich in den Schwankungen der jährlichen Schadenbelastung. Würde man diesen unvollendeten Risikoumsätzen bei der Bestimmung der Risikogewinne nicht Rechnung tragen, d.h. den Gewinn lediglich als Differenz zwischen der eingenommenen Nettorisikoprämie $P'$ und dem fällig gewordenen Gesamtschaden $S$ bestimmen und diesen Gewinn fortgesetzt ausschütten, so verblieben dem Versicherer keine Mittel, um die in einzelnen Jahren auftretenden Überschäden zu decken. Eine versicherungsmässige Risikodeckung könnte so auf die Dauer nicht funktionieren und würde den Sicherheitsanforderungen kaum genügen, welche die Versicherten mit Recht an einen Versicherungsträger stellen.

Es ist daher notwendig, den unvollendeten Risikoumsätzen bei der Ermittlung der Risikogewinne durch geeignete Rückstellungen Rechnung zu tragen. Dies führt zu der in der vorliegenden Arbeit dargelegten Theorie der Gewinnermittlung auf risikotheoretischer Grundlage, welche dem stochastischen Charakter der im Versicherungswesen auftretenden Vorgänge gerecht wird.

2. Die einfachste Methode der risikotheoretischen Gewinnermittlung geht von der Aufteilung der gesamten Nettorisikoprämie $P'$ in zwei Komponenten aus; eine Komponente ist die Grundquote $k'P'$ $(0 < k' < 1)$, welche die Normalschäden deckt und die Sicherheitsmarge enthält; die andere Komponente – die Überschadenquote $(1-k')P'$ – deckt die allenfalls auftretenden Überschäden. Die Überschadenquote $(1-k')P'$ wird in jedem Rechnungsjahr einer Ausgleichsreserve gutgeschrieben, der anderseits allfällige Überschäden $S-k'P' > 0$ belastet werden. Es ergeben sich dann – je nach dem aufgetretenen Gesamtschaden $S$ – die nachstehenden Gut- und Lastschriften, welche den Rückstellungen für die unvollendeten Risikoumsätze entsprechen.

| Höhe des Gesamtschadens | Gutschrift der Ausgleichsreserve | Lastschrift der Ausgleichsreserve | Risikogewinn |
|---|---|---|---|
| $S \leqq k'P'$ | $(1-k')P'$ | $0$ | $k'P'-S$ |
| $k'P' \leqq S \leqq P'$ | $P'-S$ | $0$ | $0$ |
| $S \geqq P'$ | $0$ | $S-P'$ | $0$ |

3. Die unter Ziffer 2 geschilderte Methode gipfelt in der Gewinnformel

$$G = k'P' - S. \tag{a}$$

Diese Art der Risikogewinnermittlung, die als die natürliche Methode bezeichnet werden kann, ist nicht die einzig mögliche. Man könnte z.B. Formel (a) verallgemeinern in

$$G = k_1'(k_2'P' - S), \quad (k_1' < 1), \tag{b}$$

oder

$$\begin{aligned} G &= k'P' - S + m'P' && \text{für } S \leqq k'P', \\ &= m'P' && \text{für } S \geqq k'P', \end{aligned} \tag{c}$$

$$\text{mit } 0 < m' \leqq 1-k'.$$

Nimmt man an, dass die Gewinnformeln in einem noch näher zu präzisierenden Sinne stets gleichwertig konstruiert werden, so führt Formel (a) zu stärker schwankenden Jahresgewinnen als die Formeln (b) und (c). Man könnte theoretisch sogar so weit gehen und einen festen Jahresgewinn

$$G = k'P' \tag{d}$$

festsetzen. Damit käme man allerdings zu einer nur noch fiktiven Gewinnermittlung, weil der wirkliche Schadenverlauf keine Rolle mehr spielen würde.

Durch die Gestaltung geeigneter Gewinnformeln kann man einer bestimmten Gewinnpolitik Rechnung tragen. Es ist durchaus zulässig, nicht die natürliche Methode (Formel (a)) zu wählen, obschon dadurch der natürliche Fluss der Gewinne künstlich gesteuert wird. Eine derartige Gewinnpolitik erfordert allerdings – wie noch zu zeigen sein wird – grössere Rückstellungen und Sicherheitsmittel als die natürliche Methode.

4. Das dargelegte Verfahren für die Gewinnermittlung erstrebt eine Ordnung, bei der Risikoverluste nicht in Erscheinung treten, indem Verluste stets über die Ausgleichsreserve abgebucht werden. Dennoch wäre es denkbar, dass Risikoverluste vorkommen, nämlich dann, wenn sich die Ausgleichsreserve erschöpfen würde, z.B. wenn ein besonders hoher Überschaden auftritt oder wenn Jahre mit Überschaden sich häufen würden. Es empfiehlt sich deshalb, den Anfangswert $u$ der Ausgleichsreserve und die Faktoren in der Gewinnformel so festzusetzen, dass eine Erschöpfung der Ausgleichsreserve praktisch als ausgeschlossen gelten kann. Man gelangt dann zu einem gesicherten Risikoausgleich, der sich in folgenden drei Stufen vollzieht:

*Erstes Risiko:*

Der Versicherer deckt die individuellen Schäden aus den einzelnen Versicherungen mit Hilfe der Gesamtrisikoprämie $P'$, soweit diese dazu ausreicht.

*Zweites Risiko:*

Die in Reserve gestellten Überschadenquoten $(1-k')P'$ decken das Risiko eines Gesamtüberschadens $S-k'P'>0$, soweit sie dazu ausreichen.

*Drittes Risiko:*

Die Ausgleichsreserve mit dem passend festgelegten Anfangswert $u$ und die Sicherheitsmarge in den Überschadenquoten $(1-k')P'$ decken das Risiko von Super-Überschäden, welche zu einer Erschöpfung der Ausgleichsreserve führen könnten.

5. An sich genügt es, wenn der geschilderte dreistufige Risikoausgleich für das Gesamtrisikogeschäft eines Versicherers gewährleistet ist. In diesem Sinne könnte das geschilderte Verfahren für alle Geschäftszweige und Risikoverbände zusammen als Ganzes angewendet werden.

Der Versicherungsträger muss anderseits den Verlauf des Risikogeschäftes getrennt nach Geschäftszweigen und Risikoverbänden verfolgen und die Grundlagen der Prämienkalkulation in allen Risikoverbänden laufend überwachen. Darüber hinaus erscheint es als wünschenswert, dass – abgesehen von Zuweisungen im Zuge des Ausgleichs von Überschäden – die einzelnen Risikoverbände sich selbst erhalten. Dies lässt sich erreichen, indem für jeden Risikoverband getrennt die anzuwendende Gewinnformel festgesetzt wird, wobei den besonderen Bedürfnissen jedes Risikoverbandes durch geeignete Konstruktion der Gewinnformel Rechnung getragen werden kann. Die dem Ausgleich der Überschäden dienende Ausgleichsreserve wird jedoch für alle Risikoverbände gemeinsam geführt.

6. Für die praktische Durchführung der geschilderten Gewinnermittlung müssen die in den Gewinnformeln auftretenden Zahlenfaktoren $k'$, die sogenannten Gewinnfaktoren, bestimmt werden. Dabei geht man von der Annahme aus, dass der Gesamtschaden $S$ eine zufällige Variable ist, deren Verteilungsgesetz durch die in Abschnitt B skizzierten Hilfsmittel der kollektiven Risikotheorie einer technischen Analyse zugänglich gemacht wird. Für die Berechnung der Gewinnfaktoren werden drei Prinzipien vorgeschlagen, die anhand der natürlichen Gewinnformel (a) im folgenden diskutiert werden.

*Prinzip I:*

Der Gewinnfaktor $k'$ in der Formel

$$G = k'P' - S$$

wird so bestimmt, dass der Erwartungswert des Überschadens $S - k'P' > 0$ gleich gross wird wie die Überschadenquote $(1-k')P'$,

d.h., es ist für $S - k'P' > 0$

$$(1-k')P' = E\{S-k'P'\} = \int_{k'P'}^{\infty} (S-k'P')\, f(S,P')\, dS. \qquad \text{(I)}$$

In dieser Formel bedeutet $f(S,P')$ die Frequenzfunktion des Gesamtschadens, welcher während der Zeitspanne auftritt, die der Nettoprämieneinnahme $P'$ zugeordnet ist. Es lässt sich zeigen, dass die Bestimmungsgleichung (I) gleichwertig ist der Bedingung

$$\lambda P = E\{k'P'-S\} = \int_{0}^{k'P'} (k'P'-S)\, f(S,P')\, dS, \qquad \text{(I')}$$

oder in Worten, der Gewinnfaktor $k'$ wird so bestimmt, dass der Erwartungswert des jährlichen Gewinnes $G = k'P' - S \geqq 0$ gleich gross wird wie die in der Nettoprämie enthaltene Sicherheitsmarge $\lambda P$.

*Prinzip II:*

Die Bestimmungsgleichungen (I) erfassen wohl die zweite Risikostufe im Sinne von Ziffer 4, lassen jedoch die dritte Stufe unberücksichtigt. Um dieser Rechnung zu tragen, muss die Verteilung der Überschäden

$$L = S - k'P' \quad \text{für } S > k'P',$$
$$L = 0 \quad \text{für } S \leqq k'P'$$

betrachtet werden. Die Verteilung – ihre Frequenzfunktion sei mit $f(L)$ bezeichnet – lässt sich durch ihre Momente

$$\mu_r = \int_0^{\infty} L^r f(L)\, dL$$

charakterisieren, von denen das erste Moment $\mu_1$ mit dem bereits angegebenen Erwartungswert des Überschadens identisch ist. Das Streuungsquadrat des Überschadens

$$\mu_2' = \mu_2 - \mu_1^2 = \int_0^{\infty} (L-\mu_1)^2 f(L)\, dL$$

stellt ein einfaches Mass für die Variabilität der Überschäden dar. Nach Tchebycheff erreicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wirkliche Überschaden nicht höher ausfällt als

$$\mu_1 + \alpha \sqrt{\mu_2'},$$

bei beliebiger Verteilung $f(L)$ mindestens

$$1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Setzt man $\alpha = 3$, und bemisst man die Überschadenquote auf

$$\mu_1 + 3\sqrt{\mu_2'},$$

so würde diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $^8/_9$ ausreichen, um allfällige Überschäden zu decken. Man gelangt so, an Stelle von Gleichung (I), zur die dritte Stufe berücksichtigenden Bestimmungsgleichung für den Gewinnfaktor $k'$

$$(1-k')P' = \mu_1 + \alpha\sqrt{\mu_2'}. \qquad \text{(II)}$$

*Prinzip III:*

Das zweite Glied rechts in Formel (II) führt mitunter zu einer untragbar hohen Überschadenquote. Dies lässt sich vermeiden, indem man an Stelle von (II) die Bestimmungsgleichung

$$(1-k')P' = (1 + \lambda^{\text{III}}_{k'P'})\,\mu_1 \qquad \text{(III)}$$

benützt, in welcher der Überschaden-Sicherheitszuschlag $\lambda^{\text{III}}_{k'P'}$ so angesetzt wird, dass die noch näher zu umschreibende Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ hinreichend klein ausfällt. Unter $\psi(u)$ versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgleichsreserve mit dem Anfangswert $u$, der die Überschadenquoten $(1 + \lambda^{\text{III}}_{k'P'})\,\mu_1$ gutgeschrieben und der die aufgetretenen Überschäden belastet werden, jemals negativ wird.

Es lässt sich zeigen, dass die Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ gültig bleibt, wenn die Gewinnfaktoren $k'$ für jeden Risikoverband getrennt nach der Formel (III) bestimmt werden, vorausgesetzt, dass die Schadenverläufe in den einzelnen Risikoverbänden untereinander stochastisch unabhängig sind und für jeden Risikoverband die gemeinsame Ausgleichsreserve mit dem Anfangswert $u$ in Rechnung gestellt wird. Damit gelangt man zu einer theoretisch und praktisch befriedigenden Gewinnermittlung, die sich gegebenenfalls leicht auf verallgemeinerte Gewinnformeln im Sinne der Formeln (b), (c) und (d) übertragen lässt.

* * *

Die angeführten Formeln beziehen sich auf den Fall mit nur positivem Risiko. Der Fall mit negativem Risiko, der z. B. in der Lebensfall- und Rentenversicherung auftritt, lässt sich nach sinngemäss ähnlichen Methoden behandeln, wobei die Begriffe Gewinn und Überschaden gewissermassen ihre Bedeutung tauschen. Ebenso lässt sich der Fall mit gemischtem Risiko behandeln, wobei man zweckmässig vom insgesamt überwiegenden Risiko ausgeht.

Das skizzierte Verfahren bezieht sich nur auf die Ermittlung der Risikogewinne, kann aber auf alle Versicherungszweige angewendet werden. Ferner kann es – wenn Gewinnbeteiligung vorgesehen ist – auch angewendet werden auf die Gewinnverteilung nach Risikoverbänden und auch auf Kollektiv-Risikoversicherungen aller Art, z. B. auf Gruppenversicherungen und Rückversicherungen.

## B. Risikotheoretische Grundlagen

### 1. Grundlegende Annahmen und Formeln [4] [1])

Die Risikotheorie betrachtet die in einem Versicherungsbestand auftretenden Schadensbelastungen als zufällige Variable, welche durch bestimmte Verteilungsgesetze charakterisiert werden. Die theoretischen Erwartungswerte dieser zufälligen Variablen sind identisch mit den nach dem Äquivalenzprinzip bestimmten Nettoprämien. Diese Eigenschaft des Erwartungswertes bildet gewissermassen die Brücke zwischen der elementaren Theorie, welche vom Äquivalenzprinzip ausgeht, und der Risikotheorie, welche den stochastischen Charakter des Risikoprozesses berücksichtigt.

Die Verteilung des Gesamtschadens in einem beliebigen Versicherungsbestand für eine gegebene Abrechnungsperiode ist ein zu komplexes Gebilde, um direkt angegeben werden zu können. Man ist daher gezwungen, die Gesamtverteilung aus einfacheren Elementen aufzubauen. In dieser Hinsicht sind bisher zwei Wege beschritten worden, welche unter dem Namen der individuellen und der kollektiven Risikotheorie bekannt geworden sind.

Die ältere individuelle Risikotheorie geht von der Gesamtheit der bei den einzelnen Versicherungen im allgemeinen überblickbaren Schadensmöglichkeiten aus und baut aus den für alle Einzelversicherungen als bekannt vorausgesetzten Elementarverteilungen die eigentlich allein interessierenden Verteilungen für Versicherungsbestände auf. Die vorausgesetzte Kenntnis der technischen Eigenschaften aller Einzelversicherungen gestaltet die Anwendung der individuellen Theorie unübersichtlich und zeitraubend.

---

[1]) Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

Einen anderen Weg schlägt die moderne kollektive Risikotheorie ein. Sie geht – ohne sich um die Verhältnisse bei den einzelnen Versicherungen zu kümmern – von der verhältnismässig leicht überblickbaren Verteilung für den Gesamtbestand in einem infinitesimalen Zeitelement aus und baut aus diesen Elementarverteilungen – lediglich unter Benützung gewisser Bestandeseigenschaften – die Verteilung des Gesamtschadens für eine gegebene Abrechnungsperiode auf. Die kollektive Betrachtungsweise steht dem Grundgedanken des Versicherungswesens näher als die individuelle Methode, weil die versicherungsmässige Risikodeckung nur innerhalb von Kollektiven, nicht aber bei einzelnen Versicherungen funktionieren kann.

Das Verteilungsgesetz des in einer Abrechnungsperiode auftretenden Totalschadens $S$ kann unter bestimmten Voraussetzungen in der Form

$$f(S,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-t}\, t^r}{r!}\, s^{*r}(S) \tag{1}$$

dargestellt werden; in dieser Formel bedeuten

$f(S,t)\, dS$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Totalschaden $S$ in das Intervall $(S, S + dS)$ fällt, wenn eine Abrechnungsperiode betrachtet wird, in der genau $t$ Schadenfälle theoretisch erwartet werden;

$s^{*r}(S)\, dS$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Gesamtschaden aus genau $r$ Schadenfällen in das Intervall $(S, S + dS)$ fällt.

Die Verteilung $s^{*r}(S)$ entsteht rekursiv aus der Schadensummenverteilung $s^{*1}(S) = s(S)$ nach der Formel

$$s^{*r}(S) = \int_0^S s(z)\, s^{*(r-1)}(S - z)\, dz \tag{2}$$

und ist mit der $r$-ten Faltungspotenz von $s(S)$ identisch.

Der in Formel (1) rechts auftretende Ausdruck

$$f(r,t) = \frac{e^{-t}\, t^r}{r!} \tag{3}$$

stellt die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte Verteilung von Poisson dar; $f(r,t)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass genau $r$ Schadenfälle eintreten, wenn theoretisch $t$ Fälle erwartet werden.

Der als einziger Parameter in Formel (3) auftretende Erwartungswert $t$ ist – wenn die mittlere Schadensumme

$$S_1 = \int_0^\infty S\, s(S)\, dS \tag{4}$$

als Rechnungseinheit eingeführt wird – gleich der theoretisch erforderlichen Gesamtrisikoprämie für die betrachtete Abrechnungsperiode. Umgekehrt kann man die Risikoprämie $t$ auch als Mass für die zeitliche Länge der betrachteten Abrechnungsperiode benützen. Cramér deutet daher den Erwartungswert $t$ als «transformierte Zeit».

Die Ableitung der Formel (1) stützt sich im wesentlichen auf folgende drei Annahmen:

*a)* Im infinitesimalen Zeitelement $(t, t+dt)$ treten nur ein oder gar kein Schadenfall auf.

*b)* Die Verteilungen des Gesamtschadens in den aufeinanderfolgenden Zeitelementen sind untereinander stochastisch unabhängig.

*c)* Der Erwartungswert $t$ ist für eine gegebene Zeitstrecke eine feste Zahl.

Diese Annahmen können z. B. als erfüllt gelten, wenn gleichbleibende oder gesetzmässig sich verändernde Schadenswahrscheinlichkeiten vorliegen.

In der Wirklichkeit sind die geschilderten Annahmen kaum je streng erfüllt. Mitunter treten sogar erhebliche Abweichungen auf. In früheren Arbeiten des Verfassers [1] wurden daher diese zu engen Annahmen erweitert auf zufallsartig schwankende Schadenswahrschein lichkeiten, was implizite zu gewissen Abhängigkeiten unter den Schadenfällen führt. An die Stelle der Poissonverteilung (3) tritt dann die negative Binomialverteilung

$$f(r,t,h) = \binom{h+r-1}{r} \left[\frac{t}{t+h}\right]^r \left[\frac{h}{t+h}\right]^h, \tag{5}$$

in der $h$ einen Schwankungsparameter bedeutet, der um so kleiner ausfällt, je grösser die Schwankungen in den Schadenswahrscheinlichkeiten angenommen werden. Der Grenzfall $h = \infty$ entspricht dem Spezialfall von festen Schadenswahrscheinlichkeiten, der auf die Poissonverteilung (3) zurückführt.

Die Verteilung (5) ergibt sich unter folgenden Annahmen: Der feste Erwartungswert $t$ wird ersetzt durch einen zufallsartig schwankenden Wert $tq$, worin der Faktor $q$ eine zufällige Variable ist, welche der Primärverteilung

$$dH(q) = \frac{h^h e^{-hq} q^{h-1} dq}{\Gamma(h)} \tag{6}$$

genügt. Im Anhang I wird unter A gezeigt, dass die Verteilung (5) sich auch noch aus einer Reihe von weiteren scheinbar untereinander wesentlich verschiedenen Modellen ergibt. Ferner lässt sich die gegenüber (1) verallgemeinerte Formel

$$f(S,t,h) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h+r-1}{r} \left[\frac{t}{t+h}\right]^r \left[\frac{h}{t+h}\right]^h s^{*r}(S) \tag{7}$$

näherungsweise auf verschiedene weitere Modelle zurückführen (siehe Anhang I, Abschnitt B). Dies sichert der Verteilung (7) eine fast umfassende Anwendbarkeit, sowohl in der Lebens- als auch in der Sachversicherung.

## 2. Momentenformeln

Die wichtigsten Eigenschaften der Verteilungen (1) und (7) des Gesamtschadens lassen sich aus ihren Momenten erkennen. Die Formeln für die ersten Momente sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt, wobei angenommen wird, dass nur positive Schadensummen auftreten und die Momente $p$-ter Ordnung um Null der Schadensummenverteilung $s(S)$ mit

$$S_p = \int_0^{\infty} S^p s(S)\, dS$$

bezeichnet werden. Die Momente der Verteilung des Gesamtschadens sind als $r$-te Ableitungen der zugehörigen charakteristischen Funktion

$$\varphi_s(\tau) = \left[1 - \chi\left(\int_0^{\infty} e^{i\tau S} s(S)\, dS - 1\right)\right]^{-h} \tag{8}$$

an der Stelle $\tau = 0$ bestimmt worden, worin zur Abkürzung

$$\chi = \frac{t}{h}$$

gesetzt wurde.

*a)* Erstes Moment um Null (Erwartungswert):

Verteilung (1)
Verteilung (7) $$\mu_1 = tS_1 . \tag{9a}$$

*b)* Zweites Moment um den Erwartungswert $\mu_1$:
(Streuungsquadrat)

$$\begin{aligned} &\text{Verteilung (1)} \quad \mu_2' = tS_2 , \\ &\text{Verteilung (7)} \quad \mu_2' = t(S_2 + \chi S_1^2) . \end{aligned} \tag{9b}$$

*c)* Drittes Moment um den Erwartungswert $\mu_1$:
(Schiefe)

$$\begin{aligned} &\text{Verteilung (1)} \quad \mu_3' = tS_3 , \\ &\text{Verteilung (7)} \quad \mu_3' = t(S_3 + 3\chi S_2 S_1 + 2\chi^2 S_1^3) . \end{aligned} \tag{9c}$$

*d)* Viertes Moment um den Erwartungswert $\mu_1$:
(Exzess)

$$\begin{aligned} &\text{Verteilung (1)} \quad \mu_4' = tS_4 + 3t^2 S_2^2 , \\ &\text{Verteilung (7)} \quad \mu_4' = t(S_4 + 4\chi S_3 S_1 + 3\chi S_2^2 + 12\chi^2 S_2 S_1^2 + \\ &\qquad\qquad + 6\chi^3 S_1^4) + 3t^2(S_2^2 + 2\chi S_2 S_1^2 + \chi^2 S_1^4) . \end{aligned} \tag{9d}$$

*e)* Fünftes Moment um den Erwartungswert $\mu_1$:

$$\begin{aligned} &\text{Verteilung (1)} \quad \mu_5' = tS_5 + 10t^2 S_3 S_2 , \\ &\text{Verteilung (7)} \quad \mu_5' = t(S_5 + 5\chi S_4 S_1 + 10\chi S_3 S_2 + 20\chi^2 S_3 S_1^2 + \\ &\qquad\qquad + 30\chi^2 S_2^2 S_1 + 60\chi^3 S_2 S_1^3 + 24\chi^4 S_1^5) + \\ &\qquad + 10t^2(S_3 S_2 + \chi S_3 S_1^2 + 3\chi S_2^2 S_1 + 5\chi^2 S_2 S_1^3 + 2\chi^3 S_1^5) . \end{aligned} \tag{9e}$$

Ein Vergleich der entsprechenden Momentenformeln zeigt, dass

*a)* die Verteilungen (1) und (7) im Erwartungswert übereinstimmen und

*b)* die Streuungsquadrate und die höheren Momente der verallgemeinerten Verteilung (7) grösser sind als bei der Verteilung (1).

Bemerkenswert ist, dass weder in den Formeln (1) und (7) noch in den Momentenformeln (9) Eigenschaften der einzelnen Versicherungen und deren Anzahl auftreten. Lediglich die Bestandeseigenschaften, welche in den Parametern $t$ und $h$ oder $\chi$ zum Ausdruck kommen, sowie die Schadensummenverteilung $s(S)$ und deren Momente $S_p$ kommen in den genannten Formeln vor. Darin äussert sich der kollektive Charakter der Lundbergschen Risikotheorie.

### 3. Grenzverteilungen

Für die späteren Untersuchungen ist es nützlich, die Grenzformen der Verteilungen (1) und (7) für kleine und grosse Werte von $t$ zu kennen. Die entsprechenden Formeln werden daher im folgenden zusammengestellt.

*a) Grenzverteilung für kleine Werte von t*

Es gilt die Grenzformel für beide Verteilungen (1) und (7)

$$\lim_{t \to 0} f(S,t) = \lim_{t \to 0} f(S,t,h) = \begin{cases} 1 & \text{für } S = 0, \\ 0 & \text{für } S > 0. \end{cases} \tag{10}$$

*b) Grenzverteilungen für grosse Werte von t*

Die Verteilungsfunktionen

$$F(S,t,h) = \int_0^S f(S,t,h)\, dS,$$

welche den Verteilungen (1) und (7) entsprechen, gehen für grosse Werte von $t$ in die nachstehenden Grenzfunktionen über, wobei die Variable $S$ ersetzt wird durch die Hilfsvariablen

*aa)*
$$q = \frac{S}{tS_1}$$

(= relativer Gesamtschaden in bezug auf den Erwartungswert),

*bb)*
$$z = \frac{S - tS_1}{\sqrt{\mu_2'(S)}}$$

(= standardisierter Gesamtschaden mit dem Erwartungswert Null und dem Streuungsquadrat Eins).

Zu *aa)* Für den relativen Gesamtschaden $q$ gelten die Grenzformeln

$$\lim_{t \to \infty} F(q,t,h = \infty) = \begin{cases} 0 & \text{für } q < 1, \\ 1 & \text{für } q \geqq 1; \end{cases} \tag{11}$$

und

$$\lim_{t \to \infty} F(q,t,h \neq \infty) = \int_0^q \frac{h^h e^{-hp} p^{h-1}}{\Gamma(h)}\, dp \tag{12}$$

$$= \mathrm{I}(hq,h), \text{ (unvollständige } \Gamma\text{-Funktion).}$$

Zu *bb)* Für den standardisierten Gesamtschaden $z$ gilt die Grenzformel

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ \frac{t}{h} = \chi}} F(z,t,h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \tag{13}$$

(Gauss-Verteilung).

Die Grenzverteilungen *aa)* des relativen Gesamtschadens $q$ entsprechen dem schwachen Gesetz der grossen Zahlen, bei dem eine Massstabverkürzung im Verhältnis $1:t$ vorgenommen wird; die Grenzverteilungen *bb)* des standardisierten Gesamtschadens $z$ entsprechen anderseits dem starken Gesetz der grossen Zahlen, bei dem der Maßstab im Verhältnis $1:\sqrt{t}$ verkürzt wird. Während sich beim standardisierten Schaden $z$ sowohl für die Verteilung (1) als auch für die verallgemeinerte Verteilung (7) die Gauss-Verteilung als Grenzfunktion ergibt, gehen beim relativen Schaden $q$ die beiden Verteilungen in zwei verschiedene Grenzfunktionen über: Bei der Verteilung (1) erhält man die Elementarverteilung (11) und bei der verallgemeinerten Verteilung (7) die unvollständige Gammafunktion (12) als Grenzfunktion. Die letztere Grenzverteilung ist mit der Verteilungsfunktion der Primärverteilung (6) identisch.

## C. Die Verteilungen des Gewinnes und des Überschadens

Von grundlegender Bedeutung für die Tarifierung von Gewinnformeln sind die Verteilungen des Gewinnes und des Überschadens. Im folgenden werden daher die wichtigsten Eigenschaften dieser Verteilungen untersucht.

### 1. Allgemeine Formeln

Der Gewinn
$$\begin{aligned} G &= k'P' - S && \text{für } S < k'P', \\ &= 0 && \text{für } S \geqq k'P', \end{aligned}$$

und der Überschaden (14′)

$$\begin{aligned} L &= S - k'P' && \text{für } S > k'P', \\ &= 0 && \text{für } S \leqq k'P' \end{aligned}$$

hängen von der zufälligen Variablen $S$ ab und haben daher ihrerseits den Charakter von zufälligen Variablen. Für die weiteren Untersuchungen empfiehlt es sich, die mittlere Schadensumme $S_1$ als Rechnungseinheit einzuführen; dies führt auf folgende Substitutionen:

$$g = \frac{G}{S_1}, \qquad t = \frac{P}{S_1},$$

$$l = \frac{L}{S_1}, \qquad k = k'(1+\lambda),$$

$$x = \frac{S}{S_1}, \qquad P' = (1+\lambda)\,P.$$

$P$ bedeutet die nach dem Äquivalenzprinzip berechnete Nettoprämie und $(1+\lambda)$ den Sicherheitsfaktor.

Es ergeben sich dann an Stelle von (14′) die Definitionsgleichungen in kanonischer Form:

$$\begin{aligned} g &= kt - x && \text{für } x < kt, \\ &= 0 && \text{für } x \geqq kt; \\ l &= x - kt && \text{für } x > kt, \\ &= 0 && \text{für } x \leqq kt. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Verteilungen der zufälligen Variablen $g$ und $l$ sind durch die Verteilung des transformierten Gesamtschadens $x$ gegeben; für die Verteilungsfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} F(g,kt,h) &= 1 - F(kt,t,h) && \text{für } g = 0, \\ &= 1 - F(kt-g,t,h) && \text{für } 0 < g \leqq kt; \end{aligned} \tag{14g}$$

$$\begin{aligned} F(l,kt,h) &= F(kt,t,h) && \text{für } l = 0, \\ &= F(kt+l,t,h) && \text{für } l > 0. \end{aligned} \tag{14l}$$

Die Erwartungswerte von $g$ und $l$ ergeben sich aus

$$E\{g_{kt}\} = \int_0^{kt} (kt-x)\, f(x,t,h)\, dx, \tag{15g}$$

$$E\{l_{kt}\} = \int_{kt}^{\infty} (x-kt)\, f(x,t,h)\, dx. \tag{15l}$$

Zwischen diesen Erwartungswerten besteht die einfache Beziehung

$$E\{g_{kt}\} - E\{l_{kt}\} = t(k-1), \tag{16}$$

mit deren Hilfe sie gegenseitig aufeinander zurückgeführt werden können.

Setzt man $k = 0$, so erhält man, weil $E\{g_0\} = 0$ ist, aus (16) das plausible Resultat

$$E\{l_0\} = t.$$

Für $k = 0$ ist somit der Erwartungswert des Überschadens gleich der theoretischen Nettoprämie $t$.

Ein weiterer bemerkenswerter Spezialfall ergibt sich für $k = 1$; es ist dann

$$E\{g_t\} = E\{l_t\},$$

d.h., die Erwartungswerte von Gewinn und Überschaden in bezug auf die theoretische Nettoprämie $t$ sind gleich gross. Dies ist eine der Ausdrucksformen des Äquivalenzprinzips. Daraus folgt ferner, dass

$$E\{g_{kt}\} \gtreqless E\{l_{kt}\}$$

ist, je nachdem $k \gtreqless 1$ ist.

Analog wie der Erwartungswert, der mit dem ersten Moment der Verteilung identisch ist, lassen sich allgemein die Momente um Null des Gewinnes $g$ und des Überschadens $l$ darstellen. Es ist

$$\mu_r\{g_{kt}\} = E\{g_{kt}^r\} = \int_0^{kt} (kt-x)^r f(x,t,h)\, dx, \tag{17 g}$$

$$\mu_r\{l_{kt}\} = E\{l_{kt}^r\} = \int_{kt}^{\infty} (x-kt)^r f(x,t,h)\, dx. \tag{17 l}$$

Zwischen den entsprechenden Momenten gilt als Verallgemeinerung von Gleichung (16) die Beziehung

$$\mu_r\{g_{kt}\} + (-1)^r \mu_r\{l_{kt}\} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (kt)^{r-i} \mu_i (-1)^i, \tag{18}$$

in der die Momente um Null des transformierten Gesamtschadens $x$ mit $\mu_i$ bezeichnet sind. Für das zweite Moment erhält man beispielsweise

$$\mu_2\{g_{kt}\} + \mu_2\{l_{kt}\} = (kt)^2 - 2kt\,\mu_1 + \mu_2. \tag{19}$$

Unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes

$$\mu_2' = \mu_2 - \mu_1^2$$

erhält man für die Streuungsquadrate die Beziehung

$$\begin{aligned} \mu_2'\{g_{kt}\} + \mu_2'\{l_{kt}\} &= \mu_2' - 2\mu_1\{g_{kt}\}\,\mu_1\{l_{kt}\} \\ &= t(S_2 + \chi) - 2E\{g_{kt}\}\,E\{l_{kt}\}, \end{aligned} \tag{19'}$$

mit deren Hilfe die Streuungsquadrate von Gewinn und Überschaden gegenseitig aufeinander zurückgeführt werden können ($S_2$ = zweites Moment um Null der transformierten Schadensummenverteilung $s(x)$). In ähnlicher Weise liessen sich Beziehungen zwischen den höheren Momenten um den Erwartungswert herleiten.

## 2. Grenzfälle

Für die Tarifierung von Gewinnformeln ist es nützlich, die Momenten-Grenzwerte für grosse und kleine Versicherungsbestände zu kennen. Da die Grösse der Versicherungsbestände durch die erwartete Schadenzahl $t$ gemessen wird, genügt es, die Grenzübergänge $t \to 0$ und $t \to \infty$ zu untersuchen.

### *a) Momenten-Grenzwerte für kleine Werte von t*

Führt man die relativen Gewinne und Überschäden

$$g' = \frac{g}{t}, \qquad l' = \frac{l}{t}$$

ein, so ergeben sich für die Erwartungswerte dieser Grössen unter Berücksichtigung der Grenzverteilung (10) und der Beziehung (16) die Grenzwerte

$$\lim_{t \to 0} E\{g_{kt}'\} = k$$

und

$$\lim_{t \to 0} E\{l_{kt}'\} = 1. \tag{20}$$

Für kleine Versicherungsbestände streben somit die Erwartungswerte des relativen Gewinnes und Überschadens gegen den Gewinnfaktor $k$ und gegen Eins.

Die Streuungsquadrate und alle höheren Momente um den Erwartungswert der Verteilung des relativen Gewinnes $g'$ streben für kleine $t$ gegen Null, weil die Grenzverteilung (10) in einen Punkt degeneriert. Für den relativen Überschaden wächst – wie man mit Hilfe von Formel (19) zeigen kann – das Streuungsquadrat für $t \to 0$ bis ins Unendliche.

### *b) Momenten-Grenzwerte für grosse Werte von t*

#### *aa)* Grenzwerte für den relativen Gewinn und Überschaden

Unter Berücksichtigung der Grenzverteilung (11), welche für feste Schadenswahrscheinlichkeiten, d.h. für $h = \infty$ gilt, erhält man für die Erwartungswerte des relativen Gewinnes und Überschadens die einfachen Ausdrücke:

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ h=\infty}} E\{g'_{kt}\} = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 1, \\ k-1 & \text{für } k \geqq 1 \end{cases} \tag{21 g'}$$

und

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ h=\infty}} E\{l'_{kt}\} = \begin{cases} 1-k & \text{für } k < 1, \\ 0 & \text{für } k \geqq 1. \end{cases} \tag{21 l'}$$

Die Streuungsquadrate und alle höheren Momente um den Mittelwert streben für grosse $t$ gegen Null, weil die Grenzverteilung (11) sich schliesslich in den Mittelwert konzentriert.

Geht man von der Grenzverteilung (12) aus (d.h. $h \neq \infty$), so ergeben sich für den relativen Gewinn und Überschaden gegenüber (21) abweichende Momenten-Grenzwerte. Für den Erwartungswert findet man

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ h \neq \infty}} E\{g'_{kt}\} = \frac{e^{-hk}(hk)^h}{\Gamma(h+1)} + (k-1)\,\mathrm{I}(hk,h), \tag{22 g'}$$

$$\lim_{\substack{t \to \infty \\ h \neq \infty}} E\{l'_{kt}\} = \frac{e^{-hk}(hk)^h}{\Gamma(h+1)} - (k-1)\,[1-\mathrm{I}(hk,h)], \tag{22 l'}$$

worin

$$\mathrm{I}(hk,h) = \int_0^{hk} \frac{e^{-y}\,y^{h-1}}{\Gamma(h)}\,dy$$

die unvollständige Gamma-Funktion bedeutet. Für die Streuungsquadrate und die höheren Momente liessen sich analoge Formeln herleiten.

Bemerkenswert ist, dass die Verteilungen (1) und (7), wie ein Vergleich der Formeln (21) und (22) zeigt, zu wesentlich verschiedenartigen Momenten-Grenzwerten führen.

*bb)* Grenzwerte für den standardisierten Gesamtschaden

Ersetzt man den transformierten Schaden $x$ durch den standardisierten Schaden $z$, d.h. setzt man

$$x = \mu_1 + z\sigma,$$

worin $\mu_1$ den Mittelwert und $\sigma$ die Streuung des transformierten Schadens bedeuten und entsprechend für die Schadengrenze

$$kt = \mu_1 + \alpha\sigma,$$

so lassen sich der transformierte Gewinn $\bar{g}$ und der transformierte Überschaden $\bar{l}$ im neuen Maßstab in der Form

$$\bar{g} = (\alpha - z)\sigma,$$
$$\bar{l} = (z - \alpha)\sigma$$

darstellen, worin die Hilfsvariable $z$ für grosse $t$ der Normalverteilung mit dem Mittelwert Null und der Streuung Eins folgt. Für die Erwartungswerte gelten dann die Formeln

$$E\{\bar{g}\} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} (\alpha - z)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

und

$$E\{\bar{l}\} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} (z - \alpha)\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Die Auswertung dieser Integrale führt auf

$$E\{\bar{g}\} = \sigma \left[ \alpha\, \Phi(\alpha) - \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right], \tag{23 $\bar{g}$}$$

$$E\{\bar{l}\} = \sigma \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - \alpha\big(1 - \Phi(\alpha)\big) \right], \tag{23 $\bar{l}$}$$

mit

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Mit Hilfe der Formeln (23) und gegebenenfalls von analogen Formeln für die höheren Momente lassen sich Näherungswerte für die Erwartungswerte und Momente berechnen, wenn die Verteilung des Gesamtschadens durch die Normalverteilung approximiert werden darf, d.h. wenn $t$ gross und die Summenstreuung verhältnismässig niedrig ist.

## D. Das Ruinproblem bei der Überschadenversicherung

### 1. Vorbemerkungen

Im Zusammenhang mit den Bemerkungen zum Prinzip III, unter Ziffer 6 in Kapitel A, stellt sich die Frage, wie die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ für eine Überschadenversicherung oder der zugehörige Sicherheitszuschlag $\lambda$ bestimmt werden können. Die Lösung dieses Problems ist für den Fall einer gewöhnlichen Versicherung – im Gegensatz zur Überschadenversicherung – in der kollektiven Risikotheorie wohlbekannt [4]. Es zeigt sich, dass die verallgemeinerte Fragestellung in ähnlicher Weise beantwortet werden kann wie im Falle der gewöhnlichen Versicherung und dass die gewöhnliche Versicherung als Spezialfall in der Lösung für die Überschadenversicherung erscheint.

Die Problemstellung lässt sich in folgender Weise umschreiben:

Gegeben ist eine Überschadenversicherung für einen Versicherungsbestand, der durch die Rechnungselemente $\left(t, s(x), h\right)$ charakterisiert sei. Überschäden sind zu decken, soweit sie den Selbstbehalt $kt$ überschreiten. Zum Ausgleich des Überschadenrisikos wird eine Überschadenreserve mit dem Anfangswert $u$ gestellt. Dieser Reserve werden einerseits die Überschadenprämien

$$(1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}})\, E\left\{l_{kt}\right\}$$

gutgeschrieben. Anderseits werden der Reserve alle auftretenden Überschäden belastet.

*Frage:* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $\psi(u)$, dass die Überschadenreserve jemals am Ende einer Abrechnungsperiode erschöpft sein wird, wenn die Überschadendeckung immer wieder erneuert und – sofern der Ruin nicht vorher eintritt – bis ins Unendliche fortgesetzt wird?

Für die im folgenden skizzierte Lösung wird eine ähnliche Methode benützt, wie sie Täcklind [6] für das Ruinproblem bei der gewöhnlichen Versicherung entwickelt hat.

## 2. Nur positive Schadensummen

Es sei $y$ der Gewinn der Überschadenreserve in einer Abrechnungsperiode. Zwischen diesem Gewinn und dem aufgetretenen Gesamtschaden $x$ besteht folgende Beziehung:

$$y = \begin{cases} (1+\lambda_{kt}^{\mathrm{III}})\, E\{l_{kt}\} - x + kt & \text{für } x > kt, \\ (1+\lambda_{kt}^{\mathrm{III}})\, E\{l_{kt}\} & \text{für } x \leqq kt. \end{cases} \tag{24}$$

Unter Berücksichtigung der Formel (1) für die Verteilung des Gesamtschadens $x$ (oder Formel (7)) lässt sich in Verbindung mit den Transformationsgleichungen (24) die Verteilungsfunktion $F(y)$ darstellen; $F(y)$ bedeutet dabei die Wahrscheinlichkeit, dass die Überschadenreserve in einer Abrechnungsperiode um höchstens den Betrag $y$ zunimmt. Führt man für die erhöhte Überschadenprämie $(1+\lambda_{kt}^{\mathrm{III}})\, E\{l_{kt}\}$ die abgekürzte Bezeichnung $\bar{l}$ ein, so gelten für die Verteilung des Gewinnes $y$ folgende Beziehungen:

$$\int_{-\infty}^{\bar{l}} dF(y) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\bar{l}} y\, dF(y) = \bar{l} \int_{0}^{kt} f(x,t,h)\, dx + \int_{kt}^{\infty} (\bar{l} - x + kt)\, f(x,t,h)\, dx$$

$$= \bar{l} - E\{l_{kt}\} = \lambda_{kt}^{\mathrm{III}} E\{l_{kt}\}.$$

Der Erwartungswert des Gewinnes $y$ ist somit gleich dem Sicherheitszuschlag in der Überschadenprämie.

Bezeichnet man mit $\psi_\nu(u)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Überschadenreserve mit dem Anfangswert $u$ während der ersten $\nu-1$ Abrechnungsperioden nie erschöpft wird, dass aber Ruin in der $\nu$-ten Abrechnungsperiode eintritt, so erhält man die Rekursionsformeln

$$\psi_1(u) = F(-u)$$

$$\psi_2(u) = \int_{0}^{\infty} \psi_1(y)\, dF(y-u)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\psi_\nu(u) = \int_{0}^{\infty} \psi_{\nu-1}(y)\, dF(y-u).$$

Daraus ergibt sich für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ (Ruin in irgendeinem Jahr) unter Berücksichtigung von

$$\psi(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(u)$$

die Integralgleichung

$$\psi(u) = F(-u) + \int_0^\infty \psi(y)\, dF(y-u)\,, \tag{25}$$

deren Lösung $\psi(u)$ die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit darstellt. Es wird hier darauf verzichtet, die Integralgleichung (25) aufzulösen und die Lösung zu diskutieren. Hingegen wird die vom Ruinproblem bei einer gewöhnlichen Versicherung her wohlbekannte Majorante zur Ruinfunktion

$$\psi(u) \leqq e^{-Ru} \tag{26}$$

hergeleitet, welche für die hier verfolgten Zwecke genügt.

Es sei $$\bar{\psi}(u) = e^{-Ru} - \psi(u)$$

eine Hilfsfunktion, welche der aus (25) hervorgehenden Integralgleichung

$$\bar{\psi}(u) = \bar{F}(u) + \int_0^\infty \bar{\psi}(y)\, dF(y-u)$$

genügt, worin

$$\bar{F}(u) = e^{-Ru} - \int_0^\infty e^{-Ry}\, dF(y-u) - F(-u)$$

bedeutet und $R$ die grösste Zahl ist, welche die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ry}\, dF(y) = 1 \tag{27}$$

erfüllt.

Für die Hilfsfunktion $\bar{F}(u)$ gilt folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(u) &= e^{-Ru} - e^{-Ru} \int_{-u}^{\infty} e^{-Ry}\, dF(y) - F(-u) \\
&= e^{-Ru} - e^{-Ru} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ry}\, dF(y) + e^{-Ru} \int_{-\infty}^{-u} e^{-Ry}\, dF(y) - F(-u) \\
&= \int_{-\infty}^{-u} (e^{-R(u+y)} - 1)\, dF(y) > 0\,.
\end{aligned}$$

Es ist somit $$0 < \bar{F}(u) < e^{-Ru}.$$

Geht man auf den rekursiven Aufbau der Integralgleichung (25) zurück, so lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$e^{-Ru} - \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(u) = \overline{F}(u) + \int_0^\infty \left[ e^{-Ry} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \psi_\nu(y) \right] dF(y-u) .$$

Ist die Klammer unter dem Integralzeichen rechts positiv, d.h. ist die Ungleichung

$$e^{-Ry} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \psi_\nu(y) > 0 \tag{26 a}$$

erfüllt, so muss auch – da $\overline{F}(u)$ positiv ist – die linke Seite der obigen Gleichung positiv sein, oder mit anderen Worten, die Ungleichung (26a) gilt auch, wenn $n-1$ durch $n$ ersetzt wird. Nun ist aber für $n = 1$

$$e^{-Ru} - \psi_1(u) = e^{-Ru} - F(-u) > \overline{F}(u) > 0 .$$

Daraus folgt aber

$$e^{-Ru} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_\nu(u) = e^{-Ru} - \psi(u) > 0$$

oder

$$\underline{\psi(u) \leqq e^{-Ru}.} \tag{26}$$

Die Bestimmungsgleichung (27) für den Parameter $R$ lässt sich unter Berücksichtigung der Transformationsgleichungen (24) in folgender Form schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\bar{l}} e^{-Ry}\, dF(y) = \varphi(R,t,k) = \frac{\int_0^{kt} f(x,t,h)\, dx + \int_{kt}^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\, dx}{e^{R\bar{l}}} = 1 . \tag{28}$$

Eine nähere Untersuchung der Funktion $\varphi(R,t,k)$ zeigt, dass $\varphi(0,t,k) \equiv 1$ ist; die Ableitung $\varphi'(0,t,k)$ nach $R$ ist gleich dem negativen erwartungsmässigen Gewinn $\lambda_{kt}^{\mathrm{III}} E\{l\}$. Die Funktion $\varphi(R,t,k)$ sinkt somit für kleine positive Werte von $R$. Anderseits streben der Zähler und der Nenner in der Quotientendarstellung von $\varphi(R,t,k)$ und auch der Quotient selbst für grosse Werte von $R$ gegen Unendlich. Daraus folgt – da $\varphi(R,t,k)$ in $R$ stetig ist –, dass es einen kritischen Argumentwert $R > 0$ gibt, für den die Bedingung

$$\varphi(R,t,k) = 1 \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Wird $R$ so gewählt, so erhält man für den Sicherheitsfaktor $(1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}})$ den Ausdruck:

$$1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}} = \frac{\ln \left\{ 1 + \int\limits_{kt}^{\infty} (e^{R(x-kt)} - 1)\, f(x,t,h)\, dx \right\}}{R \int\limits_{kt}^{\infty} (x - kt)\, f(x,t,h)\, dx}. \tag{29}$$

Für $k = 0$ erhält man die Spezialformel:

$$1 + \lambda = \frac{\ln \left[ 1 - \frac{t}{h} \left( \int\limits_{0}^{\infty} e^{Rz}\, s(z)\, dz - 1 \right) \right]^{-h}}{Rt}. \tag{29'}$$

Formel (29′) lässt sich umformen in

$$1 + \frac{1 - e^{(1+\lambda)R\chi}}{\chi} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{Rx}\, s(x)\, dx. \tag{29''}$$

Für $h = \infty$ geht Formel (29″) schliesslich über in

$$1 + (1 + \lambda)\, R = \int\limits_{0}^{\infty} e^{Rx}\, s(x)\, dx, \tag{29'''}$$

Die Formeln (29″) und (29‴) sind in der kollektiven Risikotheorie wohlbekannt. Aus ihnen lässt sich bei gegebenem Zuschlagsfaktor der Ausgleichskoeffizient $R$ bestimmen, welcher in der Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit (26) bei einer gewöhnlichen Versicherung auftritt. Damit ist aber gezeigt, dass Formel (29) die Verallgemeinerung der bekannten Ausdrücke (29″) und (29‴) für die gewöhnliche Versicherung auf den Fall der Überschadenversicherung darstellt.

### 3. Nur negative Schadensummen

In einem Versicherungsbestand mit ausschliesslich negativen Schadensummen (Lebensfallversicherung) können Verluste für den Versicherer nur entstehen, wenn zu wenig negative Schadensummen fällig werden, d.h. wenn z.B. in einem Rentenversicherungsbestand zu wenig Rentner sterben. Eine Überschadendeckung muss daher bei negativem Risiko so geordnet werden, dass die Summe der fällig werdenden negativen Schadensummen auf einen Mindestbetrag $kt$ ergänzt wird. Bei negativem Risiko würde man somit besser von einer Unterschadendeckung sprechen.

Eine solche Deckung bei negativem Risiko müsste, wenn die fälligen Schadensummen mit dem positiven Vorzeichen genommen werden, den Unterschaden

$$l = kt - x \quad \text{für } x < kt$$

decken, wofür eine theoretische Nettoprämie von

$$E\{l_{kt}\} = \int_0^{kt} (kt - x)\, f(x,t,h)\, dx$$

erforderlich wäre, die wiederum mit einem Sicherheitsfaktor $(1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}})$ zu erhöhen wäre. Für den Sicherheitsfaktor lässt sich durch eine ähnliche Ableitung wie beim positiven Risiko die Formel

$$1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}} = \frac{\ln\left\{1 + \int_0^{kt} (e^{R(kt-x)} - 1)\, f(x,t,h)\, dx\right\}}{R \int_0^{kt} (kt - x)\, f(x,t,h)\, dx} \tag{30}$$

herleiten, die gleich aufgebaut ist wie Formel (29), nur dass das Integrationsintervall $(kt,\infty)$ ersetzt ist durch das Intervall $(0,kt)$, was gewissermassen einer Vertauschung der Begriffe Überschaden und Gewinn entspricht.

Besteht für einen Versicherungsbestand mit ausschliesslich negativem Risiko eine Unterschadendeckung, so hätte der Erstversicherer insgesamt folgende Belastungen zu erbringen:

Risikoprämienausgabe für Erstversicherung $t$,

Prämie für Unterschadendeckung $(1 + \lambda_{kt}^{\mathrm{III}})\, E\{l_{kt}\}$.

Fällt die Summe dieser beiden Belastungen kleiner oder höchstens gleich hoch aus wie die Schadengrenze $kt$, so würde der Erstversicherer überhaupt kein Verlustrisiko mehr tragen.

### 4. Gemischte Schadensummen

Der Fall mit gemischten Schadensummen kann – wenn man vom insgesamt überwiegenden Risiko ausgeht – auf die gleichen Formeln wie die Fälle mit nur positivem oder nur negativem Risiko zurückgeführt werden. Bei überwiegend positivem Risiko ist z. B. der Fall

eines negativen Gesamtschadens ohne weiteres in der zweiten Zeile von Formel (24) enthalten und die Ausdehnung des Definitionsbereichs auf negative Gesamtschäden spielt für die weiteren Entwicklungen keine Rolle mehr.

## 5. Beispiele

In der nachstehenden Tabelle sind einige Sicherheitsfaktoren $\lambda_{kt}^{\mathrm{III}}$ zusammengestellt, die sich auf folgende Annahmen stützen:

*Erstes Beispiel* (positives Risiko):

$$s(x) = e^{-x}; \qquad h = \infty; \qquad R = 0{,}1$$

| $k$ | $\lambda_{kt}^{\mathrm{III}}$ in % | | |
|---|---|---|---|
| | $t = 1$ | $t = 10$ | $t = 100$ |
| 0,0 | 11 | 11 | 11 |
| 0,5 | 11 | 20 | 22 |
| 1,0 | 12 | 30 | 114 |
| 1,5 | 14 | 34 | 79 |
| 2,0 | 16 | 27 | 49 |

Es zeigt sich, dass der Sicherheitsfaktor $\lambda_{kt}^{\mathrm{III}}$ als Funktion der Schadengrenze $kt$ bei festem $t$ einen amonotonen Verlauf aufweist und für ein bestimmtes $k$ einen Maximalwert erreicht. Dieser Verlauf des Sicherheitsfaktors ist plausibel, weil der Erwartungswert des Überschadens $E\{l_{kt}\}$ mit steigender Schadengrenze rasch sinkt, die zum Ruin führenden Schadenverläufe jedoch überwiegend in sich schliesst, so dass ein fortgesetzt anwachsender Sicherheitsfaktor notwendig ist.

Bei hoher Schadengrenze verlieren anderseits die Überschäden immer mehr an Gewicht im Verhältnis zur Ausgleichsreserve mit festem Anfangswert. Von einer bestimmten Schadengrenze an überwiegt dieser den Sicherheitsfaktor dämpfende Einfluss, wodurch der geschilderte Verlauf des Sicherheitsfaktors $\lambda_{kt}^{\mathrm{III}}$ zustande kommt. Zu beachten ist allerdings, dass die in der obigen Tabelle zusammengestellten Sicherheitsfaktoren nach der in Kapitel $F$ geschilderten Näherungsmethode von Esscher berechnet wurden und daher einen Approximationsfehler enthalten, dessen genaue Grösse nur schwer feststellbar wäre.

*Zweites Beispiel:*

Der standardisierte Gesamtschaden $z$ sei normal verteilt, d. h., man hat

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = \varphi(z),$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z)\, dz = \Phi(z), \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} x &= \sigma z + t, \\ kt &= \sigma\alpha + t, \\ x - kt &= \sigma(z - \alpha). \end{aligned}$$

Unter Benützung dieser besonderen Annahmen ergibt sich aus Formel (29) der Ausdruck:

$$1 + \lambda_{\alpha,\sigma}^{\mathrm{III}} = \frac{\ln\left\{\Phi(\alpha) + \dfrac{\varphi(\alpha)\,\Phi(-\beta)}{\varphi(\beta)}\right\}}{(\alpha - \beta)\left\{\varphi(\alpha) - \alpha\,\Phi(-\alpha)\right\}} \tag{29$\sigma$}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{t(k-1)}{\sigma} \quad \text{und } \beta = \alpha - R\sigma.$$

In der nachstehenden Tabelle sind einige Werte des Sicherheitsfaktors $\lambda_{\alpha,\sigma}^{\mathrm{III}}$ zusammengestellt, welche sich auf die Spezialformel (29$\sigma$) stützen.

| Schadengrenze $\alpha$ | Sicherheitsfaktoren $\lambda_{\alpha,\sigma}^{\mathrm{III}}$ in % | | |
|---|---|---|---|
| | $R\sigma = 0{,}1$ | $R\sigma = 0{,}3$ | $R\sigma = 1$ |
| −0,5 | 4,0 | 12,8 | 49,8 |
| 0 | 4,4 | 14,1 | 59,2 |
| 0,5 | 4,5 | 14,4 | 63,9 |
| 1,0 | 4,2 | 13,8 | 62,1 |
| 1,5 | 3,9 | 12,5 | 55,7 |
| 2,0 | | 11,1 | 48,0 |

Die nach der exakten Spezialformel (29$\sigma$) berechneten Sicherheitsfaktoren bieten ein weitgehend ähnliches Bild wie die im ersten Beispiel nach der Approximationsmethode von Esscher berechneten Faktoren.

* * *

Die angegebenen Formeln und Beispiele geben eine erste Übersicht über die mit dem Ruinproblem bei Überschadenversicherungen auftretenden Fragen. Hier bietet sich noch ein weites Feld für weitere Untersuchungen.

## E. Unterteilung nach Risikoverbänden

In den bisherigen Untersuchungen wurde angenommen, der gesamte Versicherungsbestand eines Versicherungsträgers bilde einen einzigen Risikoverband. Im folgenden wird demgegenüber vorausgesetzt, der gesamte Versicherungsbestand zerfalle in $n$ Risikoverbände. Grundsätzlich lassen sich die bisher abgeleiteten Formeln auf jeden einzelnen Teilbestand anwenden. Für den Versicherungsträger stellt sich dann die Frage, in welcher Weise sich eine solche Unterteilung auf sein Gesamtrisiko auswirkt.

Im folgenden wird angenommen, der Gesamtversicherungsbestand zerfalle in $n$ stochastisch unabhängige Teilbestände mit den Charakteristiken

$$\begin{array}{llll} t_1, t_2, & \ldots t_i, & \ldots t_n, \\ s_1(x), s_2(x), & \ldots s_i(x), & \ldots s_n(x), \\ h_1, h_2, & \ldots h_i, & \ldots h_n. \end{array}$$

Bestehen Abhängigkeiten im Schadenverlauf zwischen einzelnen Teilbeständen, so lassen sich diese nach dem in der Arbeit [2] dargelegten Verfahren wenigstens in erster Näherung auf den Fall mit stochastisch unabhängigen Teilbeständen zurückführen. Es werden deshalb für einmal nur stochastisch unabhängige Teilbestände betrachtet.

### 1. Die Momente der Verteilungen des Gesamtgewinnes und des Gesamtüberschadens

Für jeden Teilbestand seien in irgendeiner Weise die Gewinnfaktoren

$$k_1, k_2, \ldots k_i, \ldots k_n$$

festgesetzt worden. Man kann die Verteilung des Gesamtgewinnes

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

und die Verteilung des Gesamtüberschadens

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

betrachten.

Diese Verteilungen ergeben sich aus den entsprechenden Verteilungen der einzelnen Risikoverbände als Faltungsprodukte. Es ist

$$F(G) = F(G_1) * F(G_2) * \ldots * F(G_n)$$

und

$$F(L) = F(L_1) * F(L_2) * \ldots * F(L_n).$$

Für die Erwartungswerte und Streuungsquadrate gelten die einfachen Summenformeln

$$E\{G\} = \sum_{i=1}^{n} E\{G_i\} \quad \text{und} \quad E\{L\} = \sum_{i=1}^{n} E\{L_i\},$$

$$\mu_2'\{G\} = \sum_{i=1}^{n} \mu_2'\{G_i\} \quad \text{und} \quad \mu_2'\{L\} = \sum_{i=1}^{n} \mu_2'\{L_i\}.$$

Für die höheren Momente liessen sich weitere Summenformeln aufstellen, welche vom vierten Grade an etwas komplizierter aufgebaut wären.

Will man beispielsweise im Sinne von Prinzip II unter Ziffer 6, in Kapitel A, eine Sicherheitsmarge in die Gesamtüberschadenprämie in der Höhe der $\alpha$-fachen Streuung einrechnen, so könnte man in jedem einzelnen Risikoverband die Sicherheitsmarge auf den $\alpha_i$-fachen Betrag der zugehörigen Streuung ansetzen, wobei die Faktoren $\alpha_i$ so zu wählen sind, dass die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{\mu_2'\{L_i\}} = \alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_2'\{L_i\}}$$

erfüllt ist. Diese Bedingung lässt sich auf unendlich viele Arten erfüllen. Sollen z. B. alle $\alpha_i$ gleich hoch angesetzt werden, so ist

$$\alpha_i = \frac{\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_2'\{L_i\}}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_2'\{L_i\}}},$$

was für $n$ gleiche Bestände auf

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$$

führen würde.

## 2. Das Ruinproblem

In $n$ stochastisch unabhängigen Risikoverbänden werden die Überschäden getrennt ermittelt, jedoch stets einer gemeinsamen Überschadenreserve belastet. Jeder Risikoverband leistet an die Überschadenreserve in jeder Abrechnungsperiode einen Beitrag von

$$\bar{L}_i = (1 + \lambda^{\mathrm{III}}_{k_i t_i})\, E\{L_i\}\,.$$

Es stellt sich dann die Frage, wie die Sicherheitsfaktoren $\lambda^{\mathrm{III}}_{k_i t_i}$ anzusetzen sind, so dass die Majorante zur Ruinwahrscheinlichkeit (26) einen gegebenen Wert erreicht.

Für die Lösung dieser Frage geht man von Formel (27) aus und interpretiert $y$ als Summe aller $y_i$ der einzelnen Risikoverbände, d. h., es ist

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i\,.$$

Es ist dann, weil der Ausdruck links in Formel (27) die charakteristische Funktion der Verteilung $F(y)$ darstellt, die sich bei der Summierung der Variablen in ein Produkt umsetzt

$$\int_{-\infty}^{\bar{L}} e^{-Ry}\, dF(y) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\bar{L}_i} e^{-Ry_i}\, dF(y_i)\,.$$

Gleichung (27) geht somit in die allgemeinere Form

$$\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\bar{L}_i} e^{-Ry_i}\, dF(y_i) = 1\,. \tag{32}$$

über.

Die Bedingung (32) lässt sich auf unendlich viele Arten erfüllen. Die einfachste Lösung erhält man, wenn man jeden Faktor des Produktes in Formel (32) links einzeln gleich Eins setzt, oder mit anderen Worten, wenn man das Ruinproblem für jeden Risikoverband getrennt löst, jedoch stets die gemeinsame Überschadenreserve in Rechnung stellt. Allen Lösungen der Gleichung (32) gemeinsam ist es – wenn die Gewinnfaktoren $k_i$ fest gewählt werden –, dass die Summe der Überschadenquoten gleich gross ist wie bei der geschilderten einfachsten Lösung.

## F. Numerische Berechnung von Erwartungswerten nach der Methode von Esscher

Die numerische Auswertung von Erwartungswerten von der Form

$$\int_0^{kt} \varphi(kt-x)\, f(x,t,h)\, dx$$

oder

$$\int_{kt}^{\infty} \varphi(x-kt)\, f(x,t,h)\, dx$$

stösst auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten, hauptsächlich, weil in den Formeln (1) und (7) für die Frequenzfunktion des Gesamtschadens alle Faltungspotenzen $s^{*r}(z)$ für $1 \leqq r \leqq \infty$ auftreten; die rekursive Berechnung dieser Faltungspotenzen gestaltet sich äusserst mühsam und grenzt schon bei verhältnismässig niedrigem Faltungsgrad fast ans Unausführbare. Glücklicherweise lassen sich die in Frage stehenden Erwartungswerte nach einer asymptotischen Näherungsmethode auswerten, die erstmals von F. Esscher [5] auf die Verteilungsfunktion $F(x,t)$ erfolgreich angewendet worden ist. Im folgenden werden die nach der Methode von Esscher sich ergebenden Näherungsformeln hergeleitet, welche für die numerische Berechnung der in dieser Arbeit auftretenden Erwartungswerte äusserst nützlich, oft sogar unentbehrlich sind.

### 1. Allgemeine Formeln

Es sei

$$\bar{s}(x) = \frac{e^{cx}\, s(x)}{\bar{s}_0}$$

eine transformierte Frequenzfunktion der Schadensumme $x$, deren Momente $\frac{\bar{s}_r}{\bar{s}_0}$ durch die Erwartungswerte

$$\bar{s}_r = \int_0^{\infty} x^r\, e^{cx}\, s(x)\, dx$$

gegeben seien. Über den Transformationsparameter $c$ wird später passend verfügt. Zwischen den Faltungspotenzen von $s(x)$ und $\bar{s}(x)$ besteht die einfache Beziehung

$$s^{*r}(x) = \bar{s}_0^r\, e^{-cx}\, \bar{s}^{*r}(x)\,.$$

Ersetzt man in der Formel (7) die Schadensummenverteilung $s(x)$ durch die transformierte Verteilung $\bar{s}(x)$ und substituiert man ausserdem an Stelle des Parameters $t$ den transformierten Parameter

$$\bar{t} = \frac{t\bar{s}_0}{1-\chi(\bar{s}_0-1)},$$

so kann man die Frequenzfunktion (7) durch die Formel

$$f(x,t,h) = C(x)\,\bar{f}(x,\bar{t},h) \tag{33}$$

darstellen, in der die Hilfsfunktion $C(x)$ durch die Formeln

$$\begin{aligned} C(x) &= e^{-cx}\big(1-\chi(\bar{s}_0-1)\big)^{-h} && \text{für } h \neq \infty, \\ &= e^{-cx-t(\bar{s}_0-1)} && \text{für } h = \infty \end{aligned} \tag{34}$$

bestimmt ist. Die Funktion $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ stellt eine transformierte Frequenzfunktion des Gesamtschadens dar, die gleich aufgebaut ist wie die Frequenzfunktion $f(x,t,h)$, nur dass $s(x)$ und $t$ ersetzt sind durch $\bar{s}(x)$ und $\bar{t}$.

Es erweist sich als nützlich, den Transformationsparameter $c$ so zu wählen, dass die Schadengrenze $kt$ zum Erwartungswert des Schadens $x$ bezüglich der transformierten Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ wird; dies führt auf die Bestimmungsgleichung

$$k = \frac{\int_0^\infty x e^{cx}\, s(x)\, dx}{1-\chi\left(\int_0^\infty e^{cx}\, s(x)\, dx - 1\right)} = \frac{\bar{s}_1}{1-\chi(\bar{s}_0-1)}. \tag{35}$$

Nach Formel (35) erhält man stets einen eindeutig bestimmten Wert für den Transformationsparameter $c$, der einem gegebenen Wert des Faktors $k$ zugeordnet ist.

Es ist
$$\begin{aligned} c &< 0 \quad \text{für} \quad k < 1, \\ c &= 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \\ c &> 0 \quad \text{für} \quad k > 1. \end{aligned}$$

Die transformierte Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ ist somit vollständig und eindeutig bestimmt.

Durch die Substitution

$$x = \bar{\mu}_1 + \xi \sqrt{\bar{\mu}_2'} = \bar{t}\,\frac{\bar{s}_1}{\bar{s}_0} + \xi \sqrt{\bar{t}\left(\frac{\bar{s}_2}{\bar{s}_0} + \bar{\chi}\right)}$$

wird die transformierte Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ standardisiert; die Hilfsvariable $\xi$ weist den Mittelwert Null und die Streuung Eins auf.

Für grosse $\bar{t}$ folgt der standardisierte Gesamtschaden der aus der transformierten Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ sich ergebenden Normalverteilung (13). Für endliche Werte von $\bar{t}$ gilt unter bestimmten Voraussetzungen nach Cramér [4] die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\xi,\bar{t},h) &= \varphi(\xi) - \\
&- \frac{1}{3!}\,\frac{\bar{\mu}_3'}{\bar{\mu}_2'^{3/2}}\,\varphi^{(3)}(\xi) + \\
&+ \frac{1}{4!}\left(\frac{\bar{\mu}_4'}{\bar{\mu}_2'^{2}} - 3\right)\varphi^{(4)}(\xi) + \frac{10}{6!}\,\frac{\bar{\mu}_3'^{2}}{\bar{\mu}_2'^{3}}\,\varphi^{(6)}(\xi) - \\
&- \frac{1}{5!}\left(\frac{\bar{\mu}_5'}{\bar{\mu}_2'^{5/2}} - 10\,\frac{\bar{\mu}_3'}{\bar{\mu}_2'^{3/2}}\right)\varphi^{(5)}(\xi) - \frac{35}{7!}\,\frac{\bar{\mu}_3'}{\bar{\mu}_2'^{3/2}}\left(\frac{\bar{\mu}_4'}{\bar{\mu}_2'^{2}} - 3\right)\varphi^{(7)}(\xi) - \frac{280}{9!}\,\frac{\bar{\mu}_3'^{3}}{\bar{\mu}_2'^{9/2}}\,\varphi^{(9)}(\xi) \\
&+ \ldots
\end{aligned} \tag{36}$$

bei der die jeweils in einer Zeile stehenden Glieder die gleiche Grössenordnung in $\bar{t}$ aufweisen. In Formel (36) bedeuten $\varphi(\xi)$ die Frequenzfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

und $\varphi^{(r)}(\xi)$ die zugehörigen Ableitungen. Die Grössen $\mu_r'$ sind die Momente um den Mittelwert der transformierten Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ und ergeben sich sinngemäss aus den Formeln (9), indem $t$ und $s(x)$ durch $\bar{t}$ und $\bar{s}(x)$ ersetzt werden. Wird der Transformationsparameter $c$ nach Gleichung (35) bestimmt, so wird die Schadengrenze $kt$ zum Mittelwert der transformierten Verteilung $\bar{f}(x,\bar{t},h)$. Dieser Mittelwert geht durch die Standardisierung in den Nullpunkt über. Dies erleichtert die Auswertung der im folgenden darzustellenden Erwartungswerte wesentlich.

## 2. Die Esscherschen Funktionen

Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich als nützlich, die Esscherschen Funktionen $E_{rs}(y)$ einzuführen. Diese sind durch das Integral

$$E_{rs}(y) = \int_0^\infty e^{-\xi y}\, \xi^r\, \varphi^{(s)}(\xi)\, d\xi \tag{37}$$

definiert. Für $r = s = 0$ ergibt sich die Grundfunktion

$$E_{00}(y) = E(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi y}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{1-\Phi(y)}{\varphi(y)}, \tag{38}$$

die durch den von Laplace stammenden unendlichen Kettenbruch

$$\sqrt{2\pi}\, E(y) = \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{y + \cfrac{2}{y + \cfrac{3}{y + \cfrac{4}{\cdots}}}}} \tag{38a}$$

$$\cdots$$

dargestellt werden kann. Für grosse $y$ gilt überdies die asymptotische Entwicklung

$$\sqrt{2\pi}\, E(y) \sim \frac{1}{y} - \frac{1}{y^3} + \frac{1.3}{y^5} - \frac{1.3.5}{y^7} + \frac{1.3.5.7}{y^9} - \ldots. \tag{38b}$$

Für negative $y$ ist

$$E(-y) = \frac{\Phi(y)}{\sqrt{2\pi}\, \varphi(y)}. \tag{38c}$$

Im Anhang II ist die Funktion $E(y)$ für den praktisch in Betracht fallenden Bereich tabelliert.

Aus den Funktionen $E_{00}(y)$ ergeben sich die weiteren Esscher-Funktionen durch die Rekursionsformel

$$E_{0s}(y) = -\frac{dE_{0(s-1)}(y)}{dy} \tag{39a}$$

oder allgemein

$$E_{rs}(y) = -\frac{dE_{r(s-1)}(y)}{dy}. \tag{39b}$$

Daraus folgen die für die numerische Berechnung bequemen Rekursionsformeln für

$$\bar{E}_{rs}(y) = \sqrt{2\pi}\, E_{rs}(y)\,,$$

wobei zur Abkürzung in den Funktionen $\bar{E}_{rs}(y)$ das Argument $y$ weggelassen wird.

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{00} &= \bar{E}_{00} \\
\bar{E}_{01} &= y\bar{E}_{00} - 1 \\
\bar{E}_{02} &= y\bar{E}_{01} \\
\bar{E}_{03} &= y\bar{E}_{02} + 1 \\
\bar{E}_{04} &= y\bar{E}_{03} \\
\bar{E}_{05} &= y\bar{E}_{04} - 3 \\
\bar{E}_{06} &= y\bar{E}_{05} \\
\bar{E}_{07} &= y\bar{E}_{06} + 15 \\
\bar{E}_{08} &= y\bar{E}_{07} \\
\bar{E}_{09} &= y\bar{E}_{08} - 105
\end{aligned}
\qquad (40\,a)$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{10} &= -y\bar{E}_{00} + 1 \\
\bar{E}_{11} &= y\bar{E}_{10} - \bar{E}_{00} \\
\bar{E}_{12} &= y\bar{E}_{11} - \bar{E}_{01} \\
\bar{E}_{13} &= y\bar{E}_{12} - \bar{E}_{02} \\
\bar{E}_{14} &= y\bar{E}_{13} - \bar{E}_{03} \\
\bar{E}_{15} &= y\bar{E}_{14} - \bar{E}_{04} \\
\bar{E}_{16} &= y\bar{E}_{15} - \bar{E}_{05} \\
\bar{E}_{17} &= y\bar{E}_{16} - \bar{E}_{06} \\
\bar{E}_{18} &= y\bar{E}_{17} - \bar{E}_{07} \\
\bar{E}_{19} &= y\bar{E}_{18} - \bar{E}_{08}
\end{aligned}
\qquad (40\,b)$$

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{20} &= -y\bar{E}_{10} + \bar{E}_{00} \\
\bar{E}_{21} &= y\bar{E}_{20} - 2\bar{E}_{10} \\
\bar{E}_{22} &= y\bar{E}_{21} - 2\bar{E}_{11} \\
\bar{E}_{23} &= y\bar{E}_{22} - 2\bar{E}_{12} \\
\bar{E}_{24} &= y\bar{E}_{23} - 2\bar{E}_{13} \\
\bar{E}_{25} &= y\bar{E}_{24} - 2\bar{E}_{14} \\
\bar{E}_{26} &= y\bar{E}_{25} - 2\bar{E}_{15} \\
\bar{E}_{27} &= y\bar{E}_{26} - 2\bar{E}_{16} \\
\bar{E}_{28} &= y\bar{E}_{27} - 2\bar{E}_{17} \\
\bar{E}_{29} &= y\bar{E}_{28} - 2\bar{E}_{18}
\end{aligned}
\qquad (40\,c)$$

Die Funktionen $E_{rs}(y)$ lassen sich auch in der Form

$$\bar{E}_{rs}(y) = P_{rs}(y)\,\bar{E}_{00}(y) + Q_{rs}(y) \qquad (41)$$

darstellen, worin $P_{rs}(y)$ und $Q_{rs}(y)$ Polynome in $y$ sind. Für die hier in Betracht kommenden Anwendungen sind jedoch die Rekursionsformeln (40) bequemer, weil stets die ganze Folge der Funktionswerte zu einem gegebenen Argumentwert $y$ benötigt wird.

### 3. Die Berechnungsformeln von Esscher

Mit Hilfe der Reihenentwicklung (36) lassen sich die zu berechnenden Erwartungswerte unter Benützung der unter Ziffer 2 dargestellten Esscherschen Funktionen in einer der numerischen Rechnung zugänglichen Form darstellen. Je nachdem, wieviele Glieder der Reihenentwicklung (36) benützt werden, ergeben sich der Reihe nach die Approximationsformeln:

| | Benützte Glieder in Formel (36) | Grössenordnung des Approximationsfehlers |
|---|---|---|
| Esscher 0 | 1. Zeile | $\bar{t}^{-1/2}$ |
| Esscher I | 1. und 2. Zeile | $\bar{t}^{-1}$ |
| Esscher II | 1. bis 3. Zeile | $\bar{t}^{-3/2}$ |
| Esscher III | 1. bis 4. Zeile | $\bar{t}^{-2}$ |

Zu beachten ist, dass die Grössenordnung des Approximationsfehlers von $\bar{t}$ und nicht von $t$ abhängt; da $\bar{t}$ bei festem $t$ mit steigender Schadengrenze $kt$ anwächst und für $k \to \infty$ ebenfalls unendlich gross wird, so ist der Approximationsfehler in der Regel um so kleiner, je höher die Schadengrenze $kt$ liegt. Darin liegt ein wesentlicher Vorzug des Esscherschen Verfahrens, weil die Approximation gerade für hohe $k$-Werte besonders heikel ist.

### *a) Verteilungsfunktion des Gesamtschadens*

Geht man von Formel (33) für die Frequenzfunktion des Gesamtschadens aus und ersetzt man darin die transformierte Frequenzfunktion $\bar{f}(x,\bar{t},h)$ durch die Reihenentwicklung (36), so ergibt sich

$$F(kt,t,h) \sim C(kt) \int_{-\infty}^{0} e^{-c\xi\sqrt{\bar{\mu}_2'}} \left( \varphi(\xi) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!} \varphi^{(3)}(\xi) \ldots \right) d\xi, \quad \text{für } k < 1,$$

$$1 - F(kt,t,h) \sim C(kt) \int_{0}^{\infty} e^{-c\xi\sqrt{\bar{\mu}_2'}} \left( \varphi(\xi) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!} \varphi^{(3)}(\xi) \ldots \right) d\xi, \quad \text{für } k \geqq 1,$$

worin mit $\bar{\beta}_r$ die von den Momenten $\bar{\mu}_r'$ abhängigen Koeffizienten (ohne Zahlenfaktoren) von $\varphi^{(r)}(\xi)$ in der Reihenentwicklung (36) bezeichnet sind. Setzt man

$$y = \left| c\sqrt{\bar{\mu}_2'} \right|$$

und führt man die Esscherschen Funktionen ein, so ergeben sich der Reihe nach folgende Formeln:

*Esscher 0:*

$$F(kt,t,h) \sim C(kt) \{E_{00}(y)\}, \quad \text{für } k < 1, \qquad \text{(a)}$$

(42,0)

$$1 - F(kt,t,h) \sim C(kt) \{E_{00}(y)\}, \quad \text{für } k \geqq 1. \qquad \text{(b)}$$

*Esscher I:*

$$F(kt,t,h) \sim C(kt) \left\{ E_{00}(y) + \frac{1}{3!} \bar{\beta}_3 E_{03}(y) \right\}, \quad \text{für } k < 1, \qquad \text{(a)}$$

(42,I)

$$1 - F(kt,t,h) \sim C(kt) \left\{ E_{00}(y) - \frac{1}{3!} \bar{\beta}_3 E_{03}(y) \right\}, \quad \text{für } k \geqq 1. \qquad \text{(b)}$$

*Esscher II:*

$$F(kt,t,h) \sim C(kt)\left\{E_{00}(y) + \frac{\bar{\beta}_3}{3!}E_{03}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!}E_{04}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!}E_{06}(y)\right\}, \quad \text{(a)}$$

(42,II)

$$1-F(kt,t,h) \sim C(kt)\left\{E_{00}(y) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!}E_{03}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!}E_{04}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!}E_{06}(y)\right\}. \quad \text{(b)}$$

*Esscher III:*

$$F(kt,t,h) \sim C(kt)\left\{E_{00}(y) + \frac{\bar{\beta}_3}{3!}E_{03}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!}E_{04}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!}E_{06}(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3)E_{05}(y) + \frac{35}{7!}\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4 E_{07}(y) + \frac{280}{9!}\bar{\beta}_3^3 E_{09}(y)\right\}, \quad \text{(a)}$$

(42,III)

$$1-F(kt,t,h) \sim C(kt)\left\{E_{00}(y) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!}E_{03}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!}E_{04}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!}E_{06}(y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3)E_{05}(y) - \frac{35}{7!}\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4 E_{07}(y) - \frac{280\bar{\beta}_3^3}{9!}E_{09}(y)\right\}. \quad \text{(b)}$$

Die in den Gleichungen (30) und (29) auftretenden Hilfswerte

$$\int_0^{kt} e^{R(kt-x)} f(x,t,h)\,dx$$

und

$$\int_{kt}^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\,dx$$

lassen sich auf die Berechnungsformeln (42) zurückführen. Beispielsweise ist

$$\int_{kt}^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\,dx \sim C(kt)\int_0^{\infty} e^{-\xi\sqrt{\bar{\mu}_2'}(c-R)}\left(\varphi(\xi) - \frac{1}{3!}\bar{\beta}_3\varphi^{(3)}(\xi)\ldots\right)d\xi. \quad \text{(43a)}$$

Daraus folgt, dass der in Frage stehende Hilfswert durch die entsprechenden Formeln (b) in den Gleichungen (42) dargestellt werden kann, wenn man $y$ durch

$$\bar{y} = y - R\sqrt{\bar{\mu}_2'} \quad \text{(43b)}$$

ersetzt.

Beim Hilfswert
$$\int_0^{kt} e^{R(kt-x)} f(x,t,h)\,dx$$
ist entsprechend von den Formeln (a) auszugehen und $y$ durch (43 b) zu ersetzen.

Besonders zu beachten ist, dass die dargelegten Berechnungsregeln für die beiden Hilfswerte nur anwendbar sind, wenn beim erstgenannten Hilfswert $k \geqq 1$ ist und beim zweiten Hilfswert $k < 1$. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so empfiehlt es sich, von den Formeln

$$\begin{aligned}
\int_0^{kt} e^{-R(kt-x)} f(x,t,h)\,dx + \int_{kt}^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\,dx &= \int_0^{\infty} e^{R(x-kt)} f(x,t,h)\,dx \\
&= e^{-Rkt}\left\{1 - \chi\left(\int_0^{\infty} e^{Rz}\, s(z)\,dz - 1\right)\right\}^{-h}, \quad \text{für } h \neq \infty, \\
&= e^{-t\left(Rk+1-\int_0^{\infty} e^{Rz}\, s(z)\,dz\right)}, \qquad \text{für } h = \infty, \qquad (44)
\end{aligned}$$

auszugehen, bei denen in der ersten Zeile immer einer der beiden Summanden links nach der Formel (42) und ihre Summe nach der Formel (44) berechenbar ist.

### *b) Die Erwartungswerte von Gewinn und Überschaden*

Eine analoge Ableitung wie bei der Verteilungsfunktion des Gesamtschadens führt beim Erwartungswert des Gewinnes für $k < 1$ zu der nachstehenden Esscher-III-Formel.

$$\begin{aligned}
E\{g_{kt}\} &= \int_0^{kt} (kt-x)\, f(x,t,h)\,dx \sim \\
&\sim C(kt)\sqrt{\bar{\mu}_2'}\left\{E_{10}(y) + \frac{\bar{\beta}_3}{3!} E_{13}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!} E_{14}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!} E_{16}(y) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3) E_{15}(y) + \frac{35}{7!}\bar{\beta}_3\bar{\beta}_4 E_{17}(y) + \frac{280}{9!}\bar{\beta}_3^3 E_{19}(y)\right\}. \quad (45,\text{III a})
\end{aligned}$$

Für $k \geqq 1$ gilt ferner für den Erwartungswert des Überschadens die nachstehende Esscher-III-Formel

$$E\{l_{kt}\} = \int_{kt}^{\infty} (x-kt)\, f(x,t,h)\, dx \sim$$

$$\sim C(kt)\sqrt{\bar{\mu}_2'}\left\{E_{10}(y) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!} E_{13}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!} E_{14}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!} E_{16}(y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3) E_{15}(y) - \frac{35}{7!} \bar{\beta}_3 \bar{\beta}_4 E_{17}(y) - \frac{280}{9!} \bar{\beta}_3^3 E_{19}(y)\right\}. \quad (45,\text{III b})$$

Durch Weglassung von Gliedern ergeben sich die entsprechenden Esscher-Formeln (45) niedrigeren Grades.

Sind Erwartungswerte des Gewinnes für $k \geqq 1$ oder Erwartungswerte des Überschadens für $k < 1$ zu berechnen, so ist vorerst der durch die Formeln (45a) oder (45b) berechenbare Wert zu ermitteln; anschliessend ergibt sich der eigentlich gesuchte Wert aus der Umrechnungsformel (16).

*c) Zweites Moment der Verteilung des Gewinnes und des Überschadens*

Es gelten folgende Esscher-III-Formeln:

Zweites Moment des Gewinnes für $k < 1$:

$$E\{(kt-x)^2\} = \int_{0}^{kt} (kt-x)^2 f(x,t,h)\, dx \sim$$

$$\sim C(kt)\,\bar{\mu}_2'\left\{E_{20}(y) + \frac{\bar{\beta}_3}{3!} E_{23}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!} E_{24}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!} E_{26}(y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3) E_{25}(y) + \frac{35}{7!} \bar{\beta}_3 \bar{\beta}_4 E_{27}(y) + \frac{280}{9!} \bar{\beta}_3^3 E_{29}(y)\right\}. \quad (46,\text{III a})$$

Zweites Moment des Überschadens für $k \geqq 1$:

$$E\{(x-kt)^2\} = \int_{kt}^{\infty} (x-kt)^2 f(x,t,h)\, dx \sim$$

$$\sim C(kt)\,\bar{\mu}_2'\left\{E_{20}(y) - \frac{\bar{\beta}_3}{3!} E_{23}(y) + \frac{\bar{\beta}_4}{4!} E_{24}(y) + \frac{10\bar{\beta}_3^2}{6!} E_{26}(y) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{5!}(\bar{\beta}_5 - 10\bar{\beta}_3) E_{25}(y) - \frac{35}{7!} \bar{\beta}_3 \bar{\beta}_4 E_{27}(y) - \frac{280}{9!} \bar{\beta}_3^3 E_{29}(y)\right\}. \quad (46,\text{III b})$$

Sind zweite Momente zu berechnen, die ausserhalb des Gültigkeitsbereichs der beiden Formeln (46) liegen, so ist unter Anwendung der Umrechnungsformel (19) analog zu verfahren wie beim Erwartungswert des Gewinnes und des Überschadens.

* * *

Die abgeleiteten Esscher-Formeln weisen den vor allem für die Anwendungen gewichtigen Vorzug auf, dass sie an fast keine einschränkenden Bedingungen über die Schadensummenverteilung $s(x)$ gebunden sind. Ferner lassen sich die Esscher-Formeln auch anwenden, wenn die Schadensummenverteilung eine analytische Form aufweist, die eine Integration in geschlossener Form nicht zulässt oder wenn die Schadensummenverteilung sogar nur numerisch, ohne formelmässige Darstellung, gegeben ist.

Die Esscher-Formeln sind vor allem nützlich, wenn $t$ eine gewisse Schranke (etwa $t \geqq 3$) überschreitet. Für ganz kleine $t$ ist es in der Regel ebenso einfach oder gar noch einfacher, eine exakte Berechnung durchzuführen, weil dann nur die verhältnismässig leicht berechenbaren Faltungspotenzen niedrigsten Grades von $s(x)$ benötigt werden.

Noch nicht restlos geklärt ist die Frage, welche Genauigkeit mit den verschiedenen Esscher-Formeln praktisch erreicht wird. Diese Frage lässt sich wohl nur durch systematische Vergleichungen mit exakten Funktionswerten hinreichend beantworten. Solche Untersuchungen liessen sich durch die modernen Rechenautomaten auf elektronischer Grundlage mit mehr Aussicht auf Erfolg durchführen als bisher.

## G. Anwendungen

Bei der Anwendung des dargelegten Verfahrens der Risikogewinn-Ermittlung muss man von den die Verteilung des Gesamtschadens bestimmenden Rechnungselementen $t$, $s(x)$ und $h$ ausgehen. Die erwartete Schadenzahl $t$ und die Schadensummenverteilung $s(x)$ erfassen den Umfang und die Struktur des Versicherungsbestandes. Durch den Schwankungsparameter $h$ lassen sich schliesslich die Unsicherheit von $t$ und $s(x)$ sowie allfällige Störungen des normalen Risikoablaufes (Kumulrisiko usw.) berücksichtigen. Von besonderer Bedeutung ist bei den

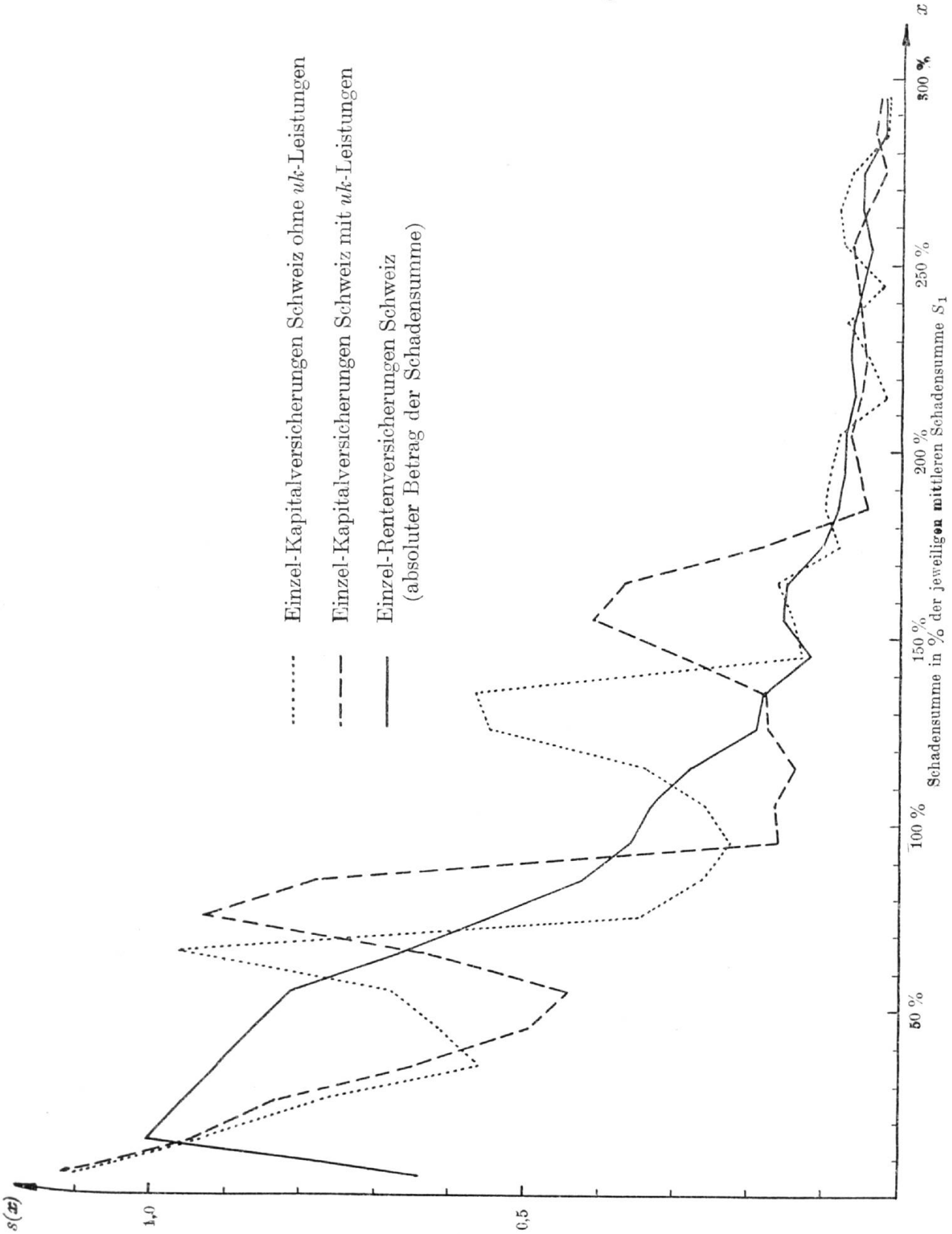
meisten Anwendungen die Schadensummenverteilung $s(x)$. Im folgenden werden daher vorerst einige diesbezügliche statistische Erfahrungen aus der Einzelversicherung bei der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt bekanntgegeben, die dank der in freundlicher Weise erteilten Erlaubnis hier mitgeteilt werden dürfen.

## 1. Schadensummenverteilungen aus der Lebensversicherung

Die Schadensummenverteilung $s(x)$ bezieht sich nicht auf die statistisch nur schwer erfassbaren *versicherten* Schadensummen, sondern auf die *fälligen* Schadensummen. Für die empirische Bestimmung der Schadensummenverteilung geht man daher von den binnen einer bestimmten Zeitspanne fällig gewordenen Schadensummen aus, ordnet diese nach steigenden Schadensummen und bildet daraus die Verteilung der Schadensummen. Derartige empirische Schadensummenverteilungen wurden aus den in den Jahren 1935, 1945 und 1955 fällig gewordenen Schadensummen im Bestande der grossen Einzel-Kapitalversicherungen (ohne Volksversicherungen) des Schweizergeschäftes der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt abgeleitet. Für das Jahr 1955 wurde überdies je eine Verteilung mit und ohne Berücksichtigung der Sonderleistungen aus den obligatorischen Zusatzversicherungen für Unfalltod und Tod nach langdauernder Krankheit (im folgenden «*uk*-Leistungen» genannt) aufgestellt. In analoger Weise wurde die Verteilung der negativen Schadensummen im Einzel-Rentenbestand Schweiz für das Jahr 1955 bestimmt.

Die für das Jahr 1955 ermittelten Verteilungen sind auf der folgenden Seite graphisch dargestellt. Alle Verteilungen weisen im ganzen gesehen ein ähnliches Bild auf und gehören zum asymmetrisch glockenförmigen oder J-förmigen Typus. Die im unteren Ast ausgeprägten Unregelmässigkeiten bei den aus der Einzel-Kapitalversicherung abgeleiteten Verteilungen sind in erster Linie eine Folge davon, dass die runden Versicherungssummen von Fr. 5000 und Fr. 10 000 vorherrschen.

Beobachtete Schadensummenverteilungen aus dem Jahre 1955 bei der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt



Die wichtigsten statistischen Masszahlen aller fünf Verteilungen sind in der nachstehenden Übersicht festgehalten.

| | Beobachtete Schadensummenverteilung | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Einzel-Kapitalversicherungen | | | | Einzel-Rentenversicherung 1955 |
| | 1935 | 1945 | 1955 ohne *uk*-Leistungen | 1955 mit *uk*-Leistungen | |
| Anzahl der fälligen Schadensummen | 466 | 476 | 514 | 523 | 997 |
| mittlere Schadensumme $S_1$ in sFr. | 5009 | 3404 | 5660 | 7111 | 7204 |
| absolute Summenstreuung $\sqrt{S_2'}$ in sFr. | 7222 | 5151 | 7626 | 8786 | 9667 |
| relative Summenstreuung $\frac{\sqrt{S_2'}}{S_1}$ in % | 144 | 151 | 135 | 124 | 134 |

Die *mittlere Schadensumme* ist in der Einzel-Kapitalversicherung im Jahrzehnt 1935–1945 um etwa $^1/_3$ gesunken; dies ist wohl eine Folge des Rückgangs der Neuproduktion in den dreissiger Jahren und auch des Rückgangs der Sterblichkeit, welche die Sterbefälle immer mehr in die oberen Altersklassen zurückdrängte, wo die Risikosummen mit Rücksicht auf das bis dahin gebildete Deckungskapital immer kleiner werden. Die grossen Neuzugänge der Nachkriegsjahre sowie der vermehrte Abschluss von Risiko-Todesfallversicherungen haben bis zum Jahre 1955 die mittlere Schadensumme sogar über das ursprüngliche Niveau hinaussteigen lassen. Durch den obligatorischen Einschluss der *uk*-Leistungen ergab sich eine weitere Erhöhung der mittleren Schadensumme um rund 25 %. Bemerkenswert ist, dass die relative Summenstreuung in allen vier Verteilungen aus der Einzel-Kapitalversicherung ungefähr gleich geblieben ist; die Abweichungen liegen überdies im Bereich von zufälligen Schwankungen. Die in Einheiten der jeweiligen mittleren Schadensumme dargestellten Schadensummenverteilungen sind somit in den letzten zwei Jahrzehnten trotz der inzwischen ein-

getretenen Veränderungen (Vergrösserung der Versicherungsbestände, Sterblichkeitsverbesserung, Umstellung der Reserve auf neue Rechnungsgrundlagen, Einschluss der *uk*-Leistungen usw.) im wesentlichen unverändert geblieben. Die in der kollektiven Risikotheorie übliche Annahme einer gleichbleibenden Summenstruktur findet damit ihre praktische Bestätigung. Nicht gleich geblieben ist allerdings das Summenniveau, was sich auf die Höhe der erforderlichen Sicherheitsreserven auswirkt.

Bemerkenswert ist, dass die Verteilung der negativen Schadensummen aus der Einzel-Rentenversicherung im Jahre 1955 eine grosse Ähnlichkeit mit der gleichzeitig beobachteten Verteilung der positiven Schadensummen aus der Einzel-Kapitalversicherung mit Einschluss der *uk*-Leistungen aufweist. Dies zeigt sich unter anderem darin, dass die mittlere Schadensumme und die relative Summenstreuung nahezu übereinstimmen.

Die im folgenden behandelten Beispiele gehen von der analytischen Schadensummenverteilung

$$s(x) = \frac{\alpha^{\alpha} e^{-\alpha x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{47}$$

aus ($\Gamma$-Verteilung), die nahe mit den in der Lebensversicherung beobachteten Verteilungen übereinstimmt. Diese Verteilungen weisen stets eine mittlere Schadensumme $E\{x\} = S_1 = 1$ auf; die als einziger Parameter auftretende Grösse $\alpha$ ist mit der relativen Summenstreuung $\sigma$ durch die einfache Beziehung

$$\sigma^2 = \alpha^{-1}$$

verbunden. Die mitgeteilten Erfahrungszahlen aus der Lebensversicherung würden etwa $\alpha = \frac{1}{2}$, d.h. einer relativen Summenstreuung von rund 140 % entsprechen; diese Annahme würde auf die $\chi^2$-Verteilung mit einem Freiheitsgrad führen. Die in der Sachversicherung weit grösseren Summenstreuungen lassen sich durch entsprechende Wahl des Parameters $\alpha$ berücksichtigen.

Die Verteilung (47) weist den für die Anwendungen wesentlichen Vorteil auf, dass sie in einfacher Weise integriert und gefaltet werden kann, was für nicht zu grosses $t$ eine exakte Auswertung der Erwartungswerte erlaubt. Die Anwendung der Methode von Esscher wird überdies erleichtert, weil die Hilfszahlen $\bar{s}_r$ sich in expliziter Form als Funktion von $\alpha$ und $c$ darstellen lassen.

## 2. Untersuchungen über die Höhe der Gewinnfaktoren

### *a) Nur positive Schadensummen*

Die nachstehenden Beispiele stützen sich auf folgende Annahmen:

Schadensummenverteilung: $s(x) = e^{-x}$; $S_1 = 1$; $\sigma = 1$,

Schwankungsparameter: $h = \infty$ (homogener stochastischer Prozess),

Tarifniveau: $t' = 1{,}2t$, (d.h. erwartungsmässige Tarifmarge = 16,67 % der Nettoprämie $t'$);

Sicherheitsmarge in der Überschadenquote:

Prinzip I keine,

Prinzip II 10 % der Überschadenstreuung,

Prinzip III Ausgleichskoeffizient $R = 0{,}1$.

In der untenstehenden Tabelle sind die auf Grund der genannten Annahmen sich ergebenden Gewinnfaktoren $k'$ für einige Werte von $t$ zusammengestellt, die sich auf die natürliche Gewinnformel

$$g = k't' - x$$

stützen.

*Tabelle 1*

| $t$ | $t'$ | Gewinnfaktor $k'$ in % nach Prinzip | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| 0 | 0 | 17 | | |
| 1 | 1,2 | 34 | 11 | 17 |
| 10 | 12,0 | 87 | 82 | 77 |
| 50 | 60,0 | 98,1 | 97,4 | 95,7 |
| 100 | 120,0 | 99,4 | 99,2 | 98,5 |
| $\infty$ | $\infty$ | 100 | 100 | 100 |

Die erwartete Schadenzahl $t$ (d.h. die transformierte theoretische Nettoprämie) kann als Mass der Bestandesgrösse verwendet werden. Es zeigt sich somit, dass die Gewinnfaktoren $k'$ mit wachsendem Bestand ansteigen. Nach Prinzip I ist $k'$ im theoretischen Grenzfall $t = 0$ gleich der angenommenen Tarifmarge von 17 % und wächst mit steigendem $t$ bis auf 100 % im Grenzfall eines unendlich grossen Bestandes.

Der Grenzwert von 100 % wird für $t = 100$ mit $k' = 99{,}4\,\%$ schon fast erreicht.

Nach den Prinzipien II und III, die mit einer Sicherheitsmarge in der Überschadenquote rechnen, fällt der Gewinnfaktor $k'$ durchwegs niedriger aus als nach Prinzip I, bei dem keine solche Sicherheitsmarge eingerechnet wird. Grosse Unterschiede ergeben sich vor allem für kleine Werte von $t$, d.h. für kleine Versicherungsbestände. Bemerkenswert ist, dass bei den hier getroffenen Annahmen nach Prinzip II die Gewinnfaktoren $k'$ für kleine Bestände kleiner und für grosse Bestände grösser ausfallen als nach Prinzip III.

Die Gewinnfaktoren nach Prinzip III gehen von einem Ausgleichskoeffizienten $R = 0{,}1$ aus, was – wenn man die Näherungsformel für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = e^{-Ru}$$

benützt – auf

$$R = -\frac{\ln \psi(u)}{u}$$

führt. Die Annahme $R = 0{,}1$ entspricht etwa einer Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ von 1 % und einer Ausgleichsreserve von 50 mittleren Schadensummen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Variationen über den Ausgleichskoeffizienten $R$ zusammengestellt. Die angegebenen Gewinnfaktoren stützen sich im übrigen auf die gleichen Annahmen wie in der Tabelle 1; lediglich für die erwartete Schadenzahl wird durchwegs der feste Wert $t = 50$ benützt.

*Tabelle 2*

| $R$ | Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ 1 % Ausgleichsreserve *) | Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ 1 ‰ Ausgleichsreserve *) | Gewinnfaktor $k'$ in % |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 46 | 69 | 95,7 |
| 0,05 | 92 | 138 | 97,4 |
| 0,01 | 460 | 690 | 97,9 |
| 0,005 | 920 | 1380 | 98,0 |
| 0 | ∞ | ∞ | 98,1 (Prinzip I) |

*) in Vielfachen der mittleren Schadensumme

In der nachstehenden Tabelle 3 sind weitere Gewinnfaktoren nach Prinzip III für $t = 50$ angegeben, welche die Auswirkungen verschiedener Variationen der relativen Summenstreuung und des Schwankungsparameters $h$ veranschaulichen. Der Ausgleichskoeffizient $R$ ist durchwegs zu $R = 0{,}1$ angesetzt worden, und die Schadensummenverteilung genügt stets der $\Gamma$-Verteilung (47).

*Tabelle 3*

| Relative Summenstreuung $\sigma$ | Gewinnfaktor $k'$ in % für | | |
|---|---|---|---|
| | $h = \infty$ | $h = 100$ | $h = 50$ |
| 0 | 99 | 99 | 98 |
| 1 | 96 | 94 | 92 |
| 1,1 | 94 | 89 | 82 |
| 1,2 | 75 | 43 | — |

Die Tabelle 3 zeigt – was zu erwarten war –, dass die Gewinnfaktoren $k'$ abnehmen, je grösser die relative Summenstreuung $\sigma$ ist und je kleiner der Unsicherheitsparameter $h$ angenommen wird. Variationen der Summenstreuung $\sigma$ wirken sich verhältnismässig stärker aus als beim Schwankungsparameter $h$.

Für $\sigma = 1{,}2$ ergeben sich unverhältnismässig kleine Gewinnfaktoren; in der Kolonne $h = 50$ konnte sogar überhaupt kein Wert mehr eingesetzt werden. Dies ist eine Folge davon, dass die bei Prinzip III vorgesehene Sicherheitsmarge in der Überschadenquote eine minimale Tarifmarge erheischt, die bei der hier getroffenen Annahme ($t' = 1{,}2t$), für $\sigma = 1{,}2$ und $h = 50$, nicht erreicht wird. Einige Werte dieser minimalen Tarifmarge sind in der nachstehenden Tabelle 4 zusammengestellt. Diese ergeben sich aus den Formeln (29) für den Sicherheitszuschlag $\lambda^{\mathrm{III}}$ bei einer Schadengrenze $k = 0$ (gewöhnliches Ruinproblem) für den Ausgleichskoeffizienten $R = 0{,}1$.

Die in der Tabelle 4 eingetragene punktierte Linie grenzt das Gebiet der Werte von $\sigma$ und $\chi$ ab, welche bei einer Tarifmarge von höchstens 20 % der theoretischen Nettoprämie $t$ eine sinnvolle Gewinnformel nach Prinzip III für $R = 0{,}1$ ergeben. Der in Tabelle 3 nicht berücksichtigte Wert für $h = 50$ und $\sigma = 1{,}2$ liegt bereits ausserhalb dieses Gebietes.

*Tabelle 4*

| Relative Summenstreuung $\sigma$ | Minimale Tarifmarge $\lambda_0^{III}$ in % von $t$ für $\chi = \frac{t}{h}$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,5 | 1,0 | 2,0 |
| 0 | 5 | 8 | 11 | 18 |
| 0,5 | 7 | 10 | 13 | 20 |
| 1,0 | 11 | 14 | 18 | 26 |
| 1,5 | 20 | 24 | 28 | 37 |
| 2,0 | 36 | 41 | 46 | 60 |
| 3,0 | 192 | 215 | 245 | 338 |

Bei grossen Werten der relativen Summenstreuung $\sigma$ und des Dispersionsexzesses $\chi$ ist unter Umständen eine weit grössere Tarifmarge erforderlich als die in den Tabellen 1 bis 3 angenommene Marge von 20 %. Solche Fälle kommen insbesondere in der Sachversicherung praktisch vor.

*b) Nur negative Schadensummen*

Bei Lebensfall- und Rentenversicherungen hat der Versicherungsträger ein negatives Risiko zu decken, bei dem die Rollen des Versicherten und des Versicherungsträgers gegenüber der positiven Risikodeckung gewissermassen vertauscht erscheinen. Der Versicherer zahlt dem Versicherten laufend eine Risikoprämie und erhält als Gegenleistung im Todesfall des Versicherten das freigewordene Deckungskapital. Man kann daher von einer negativen Risikoprämie und einer negativen Schadensumme oder kurz von einem negativen Risiko sprechen.

Gewinn ergibt sich bei negativem Risiko, wenn die Summe der fällig gewordenen negativen Schadensummen eine gewisse Grenze übersteigt. Die natürliche Gewinnformel bei negativem Risiko lautet daher

$$g = x - k't'.$$

Für die nachstehenden Beispiele werden die gleichen Annahmen benützt, wie für die Beispiele mit positivem Risiko in Tabelle 1. Lediglich die Beziehung zwischen $t$ und $t'$ wird abgeändert in $t = 1{,}2t'$ oder $t' = 0{,}833t$, damit sich eine Tarifmarge zugunsten des Versicherers ergibt.

*Tabelle 5*

| $t$ | $t'$ | Gewinnfaktor $k'$ in % nach Prinzip | | |
|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III |
| 0 | 0 | | | |
| 1 | 0,83 | 317 | 384 | 342 |
| 10 | 8,33 | 124 | 131 | 135 |
| 50 | 41,67 | 103 | 106 | 116 |
| 100 | 83,33 | 101 | 103 | 105 |
| $\infty$ | $\infty$ | 100 | 100 | 100 |

Während bei positivem Risiko die Gewinnfaktoren $k'$ mit steigendem $t$ anwachsen, ergeben sich bei negativem Risiko fallende Faktoren. Bei kleinen Versicherungsbeständen können die Gewinnfaktoren $k'$ mehrere hundert Prozente erreichen. Dies ist verständlich, weil in solchen Fällen nur selten Schadenfälle auftreten, so dass die meisten Versicherungsjahre dem Versicherungsträger Verlust bringen. Die nur in einzelnen Jahren auftretenden Gewinne müssen dann grösstenteils zur Deckung der Verluste in den übrigen Jahren reserviert bleiben.

Für grosse Versicherungsbestände nähert sich der Gewinnfaktor $k'$ von oben her dem Grenzwert von 100 %. Bei positivem Risiko nähern sich die Gewinnfaktoren $k'$ von unten her der gleichen Grenze.

Nach Prinzip I ergeben sich die niedrigsten Faktoren; die bei den Prinzipien II und III eingerechnete Überschaden-Sicherheitsmarge führt – insbesondere für kleine $t$ – zu höheren Gewinnfaktoren $k'$.

Bemerkenswert ist es, dass bei negativem Risiko die Gewinnfaktoren sich weiter von dem für beide Risikoarten geltenden Grenzwert von 100 % entfernen. Für das negative Risiko sind somit bei der Gewinnermittlung verhältnismässig grössere Überschadenquoten in Rechnung zu stellen als für das positive Risiko. Dies ist eine Folge davon, dass die Frequenzfunktion des Gesamtschadens vor dem Grenzwert von 100 % höher verläuft als nach dem Grenzwert.

* * *

Die angegebenen und besprochenen Beispiele vermögen wohl einen ersten Überblick zu geben über die Auswirkungen der vorgeschlagenen Prinzipien für eine risikotheoretisch begründete Gewinnermittlung und den bei der Anwendung dieser Methode auftretenden Problemen. Die benützten Modelle der kollektiven Risikotheorie erlauben es in verhältnismässig einfacher Weise, die besonderen Verhältnisse von Versicherungsbeständen hinsichtlich Bestandesgrösse, Summenstruktur, Kumulrisiko usw. zu berücksichtigen; je nach den konkreten Verhältnissen kann eine geeignete Gewinnformel konstruiert werden; die dann auftretenden Gewinnfaktoren können eindeutig bestimmt werden.

Die geschilderten risikotheoretischen Methoden lassen sich nicht nur auf die Gewinnermittlung an sich, sondern auch auf die Gewinnverteilung bei Gruppen- und anderen Kollektiv-Versicherungen anwenden. Für derartige Anwendungen sei auf die Arbeit [3] verwiesen, in der auch einige Untersuchungen über die Stabilität der Gewinne – je nach den angewendeten Gewinnformeln – dargestellt sind.

# Anhang I

## A. Modelle, welche auf die verallgemeinerte Verteilung (7) führen

### 1. Schwankende Schadenswahrscheinlichkeiten

Die feste erwartungsmässige Schadenzahl $t$ wird ersetzt durch eine veränderliche Schadenzahl $tq$, worin der Faktor $q$ eine zufällige Variable ist, welche der Primärverteilung

$$dH(q) = \frac{h^h e^{-hq} q^{h-1} dq}{\Gamma(h)}$$

folgt. Die Verteilung (7) ergibt sich aus der Verteilung (1) vermittels der Beziehung

$$f(x,t,h) = \int_0^\infty dH(q) f(x,tq) .$$

Für $h = \infty$ geht die Verteilung (7) in die Verteilung (1) über.

## 2. Wahrscheinlichkeitsansteckung

Die aus dem Urnenschema mit Wahrscheinlichkeitsansteckung bei einheitlicher Schadensumme von Polya-Eggenberger abgeleitete Verteilung lautet im Fall der seltenen Ereignisse:

$$f(x,t) = \frac{t(t+d)(t+2d)\ldots\left(t+(x-1)d\right)}{x!\,(1+d)^{-\frac{t}{d}+x}}.$$

Setzt man für den Ansteckungskoeffizienten

$$d = \frac{t}{h} \quad (= \text{Dispersionsexzess}),$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen die auf feste Schadensummen vereinfachte Formel (7).

## 3. Mehrfache Schadenfälle bei einem Schadenereignis

Durch ein Schadenereignis werden $m$ verschiedene Schadenfälle ausgelöst (z.B. $m$ Schäden bei einem Hagelwetter oder $m$ Policen bei einem Todesfall). Die Wahrscheinlichkeit von $m$ Schadenfällen bei einem Ereignis sei durch die Verteilung

$$f(m) = \frac{1}{\ln(1+\chi)}\,\frac{1}{m}\left[\frac{\chi}{1+\chi}\right]^m$$

mit dem Mittelwert

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\,f(m) = \frac{\chi}{\ln(1+\chi)}$$

gegeben. Bei fester erwartungsmässiger Zahl der Schadenereignisse und unter Annahme der oben genannten Verteilung für die mehrfachen Schadenereignisse ergibt sich für die Verteilung des Gesamtschadens $x$ die Verteilung (7), wenn wiederum

$$\chi = \frac{t}{h}$$

gedeutet wird.

## 4. Veränderung der Schadensummenverteilung

Die Verteilung des Gesamtschadens bei festen Schadenswahrscheinlichkeiten (Formel (1))

$$\bar{f}(x,\bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\bar{t}}\,\bar{t}^r}{r!}\,\bar{s}^{*r}(x)\,,$$

mit den Elementen

$$\bar{t} = \frac{t\ln(1+\chi)}{\chi}$$

und

$$\bar{s}(x) = \frac{1}{\ln(1+\chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{\chi}{1+\chi}\right]^r \frac{s^{*r}(x)}{r}\,,$$

ist identisch mit der verallgemeinerten Verteilung

$$f(x,t,h) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h+r-1}{r} \left[\frac{t}{t+h}\right]^r \left[\frac{h}{t+h}\right]^h s^{*r}(x)$$

mit den Elementen $t,s(x)$ und $h$. Daraus lässt sich schliessen, dass bei Anwendung der verallgemeinerten Verteilung im Rahmen von an sich festen Schadenswahrscheinlichkeiten das Risiko mitberücksichtigt ist, dass die Rechnungselemente $t$ und $s(x)$ sich bis zu den in den obigen Formeln gegebenen Grenzen ändern können.

## 5. Nicht hinreichend bekannte Schadenswahrscheinlichkeiten

Bei nicht hinreichend bekannter Schadenswahrscheinlichkeit ist man gezwungen, die Prämie mehr oder weniger gefühlsmässig zu schätzen. Bei diesem Vorgehen muss man die Möglichkeit von Fehlschätzungen in Kauf nehmen. Rechnet man beispielsweise mit der falschen Prämie $tq$ an Stelle der richtigen Prämie $t$ und nimmt man an, der relative Fehler $q$ folge der Primärverteilung unter Ziffer 1, so erhält man für die Verteilung des Gesamtschadens $x$ die Formel

$$f(x,t,h) = \int_0^{\infty} dH(q)\, f(x,tq,\infty)\,,$$

welche gemäss Interpretation 1 auf die verallgemeinerte Verteilung (7)

führt. In diesem Fall hat $h$ den Charakter eines Unsicherheitsparameters, der je nach dem Grad der Unsicherheit bei der Prämienabschätzung passend festzusetzen ist.

## B. Veränderliche Schadensummenverteilungen

Es kommt vor, dass die Schadensummenverteilung $s(x)$ sich mehr oder weniger sprunghaft ändert. Solche Schwankungen können entweder für sich allein oder auch in Verbindung mit Schwankungen in den Schadenswahrscheinlichkeiten auftreten. Beispielsweise können folgende Modellfälle auftreten:

Fall I: Der feste Erwartungswert $t$ wird ersetzt durch einen schwankenden Erwartungswert $tq$, wobei der Faktor $q$ der Primärverteilung unter A 1 folgt. Die Schadensummenverteilung bleibt fest. Dieser Fall führt auf die verallgemeinerte Verteilung (7).

Fall II: Der Erwartungswert $t$ bleibt fest. Die einzelnen Summen $x$ der Schadensummenverteilung werden ersetzt durch proportional schwankende Summen $xq$, wobei der Faktor $q$ der Primärverteilung

$$dH(m) = \frac{m^m e^{-mq} q^{m-1} dq}{\Gamma(m)} \quad \text{folgt.}$$

Fall III: Sowohl der Erwartungswert $t$ als auch die Schadensummen $x$ sind schwankend. Die Schwankungen erfolgen *unabhängig* voneinander nach den Primärverteilungen unter A 1 und B II.

Fall IV: Wie Fall III; die relativen Schwankungen des Erwartungswertes $t$ und der Schadensummenverteilung $s(x)$ genügen beide der gleichen Primärverteilung und erfolgen parallel zueinander, das heisst, der Erwartungswert $t$ und die Schadensumme $x$ gehen gleichzeitig in $tq$ und $xq$ über.

In diesen vier Modellfällen genügen die beiden ersten Momente der Verteilung des Gesamtschadens den nachstehenden Formeln (Annahme $S_1 = 1$).

| Fall | Erwartungswert | Streuungsquadrat |
|---|---|---|
| I | $t$ | $t(S_2+\chi)$ |
| II | $t$ | $tS_2\left(1+\frac{1}{m}\right)$ |
| III | $t$ | $t\left(S_2+\chi+\frac{S_2}{m}\right)$ |
| IV | $t\left(1+\frac{1}{h}\right)$ | $t\,\frac{S_2(h+2)(h+1)+\chi(h+1)(4h+6)}{h^2}$ |

Transformation der Rechnungseinheit im Fall IV $x^* = \dfrac{x}{1+\frac{1}{h}}$

| | | |
|---|---|---|
| IV* | $t$ | $t\left(S_2\frac{h+2}{h+1}+\chi\frac{4h+6}{h+1}\right)$ |

Alle vier Fälle führen im Vergleich zum klassischen Modell (Streuungsquadrat $= tS_2$) zu einer Erhöhung des Streuungsquadrates, und zwar am stärksten beim Fall IV. Grundsätzlich ist die Streuungsformel in allen vier Fällen gleich aufgebaut. Man kann daher in erster Näherung lediglich mit dem Fall I rechnen, den Schwankungsparameter $h$ jedoch so festsetzen, dass die Streuung den «richtigen» Wert annimmt. Die verallgemeinerte Verteilung (7) folgt dann in erster Näherung der «richtigen» Verteilung.

Eine derartige Vereinfachung berücksichtigt allerdings nur die Streuung und vernachlässigt allfällige Unterschiede in den höheren Momenten. Solche Unterschiede, die sich gegebenenfalls auf Grund komplizierterer Modelle abschätzen lassen, können durch eine passende Transformation der Schadensummenverteilung $s(x)$ berücksichtigt werden. Beispielsweise könnte $s(x)$ so transformiert werden, dass die beiden ersten Momente ihren Wert beibehalten, das dritte Moment jedoch passend erhöht wird. Auf diese und ähnliche Weise lässt sich die Verteilung des Gesamtschadens $x$ wohl stets mit Hilfe der verallgemeinerten Verteilung (7) hinreichend genau annähern. Damit ist nicht nur eine realistische Erfassung der gegebenen Verhältnisse gewährleistet, sondern es wird auch ein Formelapparat der praktischen Anwendung zugeführt, welche für diese Zwecke gerade noch einfach genug ist.

# Anhang II

*Tafel der Esscher-Funktion $E(y)$*

| $y$ | $10^5\,E(y)$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| −1.4 | 244 928 | 248 796 | 252 743 | 256 772 | 260 885 | 265 084 | 269 371 | 273 748 | 278 218 | 282 783 |
| −1.3 | 210 262 | 213 425 | 216 652 | 219 944 | 223 302 | 226 728 | 230 223 | 233 788 | 237 426 | 241 138 |
| −1.2 | 181 803 | 184 408 | 187 064 | 189 771 | 192 531 | 195 344 | 198 212 | 201 137 | 204 120 | 207 161 |
| −1.1 | 158 281 | 160 441 | 162 641 | 164 883 | 167 167 | 169 493 | 171 862 | 174 277 | 176 738 | 179 247 |
| −1.0 | 138 714 | 140 516 | 142 351 | 144 219 | 146 120 | 148 055 | 150 026 | 152 034 | 154 079 | 156 161 |
| −0.9 | 122 334 | 123 847 | 125 386 | 126 952 | 128 546 | 130 167 | 131 817 | 133 496 | 135 205 | 136 944 |
| −0.8 | 108 538 | 109 815 | 111 114 | 112 435 | 113 779 | 115 146 | 116 536 | 117 949 | 119 386 | 120 847 |
| −0.7 | 96 848 | 97 933 | 99 036 | 100 157 | 101 297 | 102 456 | 103 634 | 104 831 | 106 047 | 107 282 |
| −0.6 | 86 888 | 87 815 | 88 757 | 89 714 | 90 686 | 91 673 | 92 676 | 93 695 | 94 730 | 95 781 |
| −0.5 | 78 353 | 79 150 | 79 959 | 80 780 | 81 613 | 82 459 | 83 318 | 84 190 | 85 075 | 85 974 |
| −0.4 | 71 001 | 71 689 | 72 387 | 73 095 | 73 813 | 74 542 | 75 282 | 76 033 | 76 795 | 77 568 |
| −0.3 | 64 636 | 65 233 | 65 838 | 66 451 | 67 073 | 67 704 | 68 345 | 68 995 | 69 654 | 70 322 |
| −0.2 | 59 096 | 59 616 | 60 143 | 60 678 | 61 221 | 61 771 | 62 328 | 62 893 | 63 466 | 64 047 |
| −0.1 | 54 253 | 54 709 | 55 171 | 55 639 | 56 114 | 56 595 | 57 082 | 57 576 | 58 076 | 58 583 |
| −0.0 | 50 000 | 50 401 | 50 808 | 51 220 | 51 637 | 52 059 | 52 487 | 52 920 | 53 359 | 53 803 |
| 0.0 | 50 000 | 49 604 | 49 212 | 48 825 | 48 443 | 48 066 | 47 694 | 47 325 | 46 962 | 46 603 |
| 0.1 | 46 248 | 45 897 | 45 551 | 45 209 | 44 871 | 44 536 | 44 206 | 43 880 | 43 558 | 43 239 |
| 0.2 | 42 924 | 42 613 | 42 305 | 42 001 | 41 700 | 41 403 | 41 109 | 40 819 | 40 532 | 40 248 |
| 0.3 | 39 968 | 39 690 | 39 416 | 39 144 | 38 876 | 38 611 | 38 349 | 38 089 | 37 833 | 37 579 |
| 0.4 | 37 328 | 37 079 | 36 834 | 36 591 | 36 351 | 36 113 | 35 878 | 35 645 | 35 415 | 35 187 |



| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 34 962 | 34 739 | 34 518 | 34 300 | 34 084 | 33 870 | 33 659 | 33 449 | 33 242 | 33 037 |
| 0.6 | 32 834 | 32 633 | 32 434 | 32 237 | 32 043 | 31 850 | 31 659 | 31 470 | 31 283 | 31 097 |
| 0.7 | 30 914 | 30 732 | 30 552 | 30 374 | 30 198 | 30 023 | 29 850 | 29 679 | 29 509 | 29 342 |
| 0.8 | 29 175 | 29 010 | 28 847 | 28 686 | 28 526 | 28 367 | 28 210 | 28 054 | 27 900 | 27 747 |
| 0.9 | 27 596 | 27 446 | 27 298 | 27 150 | 27 005 | 26 860 | 26 717 | 26 576 | 26 435 | 26 296 |
| 1.0 | 26 157 | 26 021 | 25 886 | 25 751 | 25 618 | 25 486 | 25 355 | 25 226 | 25 097 | 24 970 |
| 1.1 | 24 844 | 24 719 | 24 595 | 24 472 | 24 350 | 24 229 | 24 109 | 23 991 | 23 873 | 23 756 |
| 1.2 | 23 640 | 23 526 | 23 412 | 23 299 | 23 187 | 23 076 | 22 966 | 22 857 | 22 749 | 22 641 |
| 1.3 | 22 535 | 22 429 | 22 325 | 22 221 | 22 118 | 22 016 | 21 914 | 21 814 | 21 714 | 21 615 |
| 1.4 | 21 517 | 21 420 | 21 323 | 21 228 | 21 133 | 21 038 | 20 945 | 20 852 | 20 760 | 20 669 |
| 1.5 | 20 578 | 20 488 | 20 399 | 20 310 | 20 223 | 20 135 | 20 049 | 19 963 | 19 878 | 19 793 |
| 1.6 | 19 709 | 19 626 | 19 543 | 19 461 | 19 380 | 19 299 | 19 219 | 19 139 | 19 060 | 18 982 |
| 1.7 | 18 904 | 18 827 | 18 750 | 18 674 | 18 598 | 18 523 | 18 449 | 18 375 | 18 301 | 18 228 |
| 1.8 | 18 156 | 18 084 | 18 013 | 17 942 | 17 871 | 17 802 | 17 732 | 17 663 | 17 595 | 17 527 |
| 1.9 | 17 460 | 17 393 | 17 326 | 17 260 | 17 194 | 17 129 | 17 065 | 17 000 | 16 937 | 16 873 |
| 2.0 | 16 810 | 16 748 | 16 686 | 16 624 | 16 563 | 16 502 | 16 441 | 16 381 | 16 322 | 16 262 |
| 2.1 | 16 203 | 16 145 | 16 087 | 16 029 | 15 972 | 15 915 | 15 858 | 15 802 | 15 746 | 15 691 |
| 2.2 | 15 636 | 15 581 | 15 526 | 15 472 | 15 419 | 15 365 | 15 312 | 15 259 | 15 207 | 15 155 |
| 2.3 | 15 103 | 15 052 | 15 001 | 14 950 | 14 900 | 14 849 | 14 800 | 14 750 | 14 701 | 14 652 |
| 2.4 | 14 603 | 14 555 | 14 507 | 14 459 | 14 412 | 14 365 | 14 318 | 14 271 | 14 225 | 14 179 |
| 2.5 | 14 133 | 14 088 | 14 042 | 13 998 | 13 953 | 13 908 | 13 864 | 13 820 | 13 777 | 13 734 |
| 2.6 | 13 690 | 13 647 | 13 605 | 13 562 | 13 520 | 13 478 | 13 437 | 13 395 | 13 354 | 13 313 |
| 2.7 | 13 273 | 13 232 | 13 192 | 13 152 | 13 112 | 13 072 | 13 033 | 12 994 | 12 955 | 12 916 |
| 2.8 | 12 878 | 12 840 | 12 802 | 12 764 | 12 726 | 12 689 | 12 652 | 12 615 | 12 578 | 12 541 |
| 2.9 | 12 505 | 12 469 | 12 433 | 12 397 | 12 361 | 12 326 | 12 290 | 12 255 | 12 221 | 12 186 |

| $y$ | $10^5\,E(y)$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3 | 12 | 151 | *816 | *498 | *196 | **908 | 10 | 635 | 373 | 124 | *886 | *659 |
| 4 | 09 | 441 | 233 | 033 | *841 | *657 | 08 | 480 | 310 | 147 | *990 | *838 |
| 5 | 07 | 692 | 551 | 415 | 284 | 157 | 07 | 034 | *916 | *801 | *690 | *582 |
| 6 | 06 | 478 | 377 | 279 | 184 | 091 | 06 | 002 | *914 | *830 | *747 | *667 |
| 7 | 05 | 589 | 513 | 440 | 368 | 298 | 05 | 229 | 163 | 098 | 034 | *973 |
| 8 | 04 | 912 | 853 | 796 | 740 | 685 | 04 | 631 | 579 | 527 | 477 | 428 |
| 9 | 04 | 380 | 333 | 287 | 242 | 198 | 04 | 154 | 112 | 070 | 030 | *990 |

| $y$ | $10^5\,E(y)$ | $y$ | $10^5\,E(y)$ |
|---|---|---|---|
| 10.0 | 03 951 | 20.0 | 01 990 |
| 11.0 | 03 597 | 25.0 | 01 593 |
| 12.0 | 03 302 | 30.0 | 01 328 |
| 13.0 | 03 051 | 40.0 | 00 997 |
| 14.0 | 02 835 | 50.0 | 00 798 |
| 15.0 | 02 648 | 100.0 | 00 399 |

$$\lim_{y \to \infty} y\,E(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.398\,942$$

## Literaturverzeichnis


[1] *H. Ammeter,* Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. Mitteilungen 1949.

[2] – Anwendungen der kollektiven Risikotheorie auf Probleme der Risikopolitik in der Sachversicherung. XV. Internat. Kongress der Versicherungsmathematiker 1957.

[3] – A rational experience rating technique for group insurance on the risk premium basis. XV. Internat. Kongress der Versicherungsmathematiker 1957.

[4] *H. Cramér,* Collective risk theory. A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes. Jubilee Volume of Försäkringsaktiebolaget Skandia, Stockholm 1955.

[5] *F. Esscher,* On the probability function in the collective theory of risk. Skand. Aktuarietidskrift 1932.

[6] *S. Täcklind,* Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables. Skand. Aktuarietidskrift 1942.


Für weitere Literaturangaben sei auf die Arbeit [4] und den Literaturbericht über die kollektive Risikotheorie (Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 1956, Band III) verwiesen.