# Ansätze für die Gewinnermittlung nach der kontinuierlichen Methode

# Ansätze für die Gewinnermittlung nach der kontinuierlichen Methode

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Die Zerlegung des Gewinnes in seine Komponenten (Zinsgewinn, Risikogewinn, Verwaltungskostengewinn) wird in der Literatur bei Wahl der *diskontinuierlichen* Methode allgemein erschöpfend dargestellt. Kaum behandelt dagegen ist die Berechnung der Gewinne, wenn der Tarifaufbau nach der *kontinuierlichen* Methode erfolgt; meist begnügt man sich damit, die Formeln für Prämien und Deckungskapitalien herzuleiten, und tritt auf die Ermittlung der Überschüsse kaum oder gar nicht ein [1]. Wir wollen im folgenden, im Sinne eines *Beispiels für das methodische Vorgehen*, das Schema für die Zerlegung und Berechnung der Gewinne aus der gemischten Versicherung darlegen, wenn Prämien und Reserven nach dem kontinuierlichen Verfahren angesetzt sind und zudem angenommen wird, dass die Prämien nur bis zum Todestag des Versicherten als geschuldet gelten. Prämien und Deckungskapital haben wir für diese besondere Versicherungsform bereits abgeleitet [2]; wir können so unmittelbar an frühere Ergebnisse anschliessen.

## 1. Nettoprämie und Nettodeckungskapital [3]

Für den Beginn der Ableitung setzen wir voraus, der Versicherte entrichte stetig die Prämie $\overline{P}_x$. Im Falle des Todes, spätestens nach $n$ Jahren, werde die Summe «1» fällig (gemischte Versicherung).

[1]) Eine Ausnahme bildet die Untersuchung von *W. Bütler:* Die Ermittlung der Sterblichkeits- und Invalidierungsgewinne nach der kontinuierlichen Methode. Diss. Basel 1950.

[2]) Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 52, 1952, S. 153–160.

[3]) Wir stellen hier, ohne die Ableitungen zu wiederholen, alle für die Weiterführung benötigten Beziehungen zusammen; für Einzelheiten vgl. 2).

Wir bezeichnen für den rechnungsmässigen Ablauf der Ereignisse wie folgt:

$\delta$ bzw. $i$: Zinsintensität bzw. Zinssatz (wobei $e^{\delta} = 1 + i$),
$\mu_x$ bzw. $q_x$: Sterbeintensität bzw. einjährige Sterbewahrscheinlichkeit,
${}_t\overline{V}_x$: Nettodeckungskapital im Zeitpunkt $t$.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir vorübergehend ${}_t\overline{V}_x = \overline{V}(0)$, ${}_{t+1}\overline{V}_x = \overline{V}(1)$ und $x + t = y$ ein, wobei $t$ ganzzahlig sein soll.

Für den Zeitabschnitt $t$ bis $t+1$ gilt mit den gewählten Bezeichnungen die Beziehung

$$\overline{V}(0)\, e^{\delta} + \overline{P}_x \int_0^1 e^{\delta(1-\zeta)} \frac{l_{y+\zeta}}{l_y}\, d\zeta - \int_0^1 e^{\delta(1-\zeta)} \frac{l_{y+\zeta}\,\mu_{y+\zeta}}{l_y}\, d\zeta - \frac{l_{y+1}}{l_y}\, \overline{V}(1) = 0. \tag{1}$$

Zur Auswertung von (1) nehmen wir an, die Sterbewahrscheinlichkeit verlaufe innerhalb des Intervalls $t$ bis $t+1$ linear; es ist also zu setzen

$$\frac{l_{y+\zeta}}{l_y} = 1 - {}_{\zeta}q_y = 1 - \zeta\, q_y;$$

daraus folgt für $\mu_{y+\zeta} = \dfrac{q_y}{1-\zeta\, q_y}$, und (1) geht über in

$$\left[\overline{V}(0) + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}\right] e^{\delta} - q_y \left[\bar{s}_{\overline{1}|} + \overline{P}_x \int_0^1 \zeta\, e^{\delta(1-\zeta)}\, d\zeta\right] - (1-q_y)\, \overline{V}(1) = 0. \tag{2}$$

Wir kürzen ab mit

$$\int_0^1 \zeta\, e^{\delta(1-\zeta)}\, d\zeta = \frac{e^{\delta} - 1 - \delta}{\delta^2} = \frac{i - \delta}{\delta^2} = k_1; \tag{3}$$

dann lässt sich (2) schreiben als

$$\left[\overline{V}(0) + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}\right] e^{\delta} - q_y \left[\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \overline{P}_x\right] - (1-q_y)\, \overline{V}(1) = 0. \tag{4}$$

Beziehung (4) stellt eine lineare Differenzengleichung für das Deckungskapital dar, kann somit einfach aufgelöst werden. Nimmt man ${}_0\overline{V}_x = 0$ an und beachtet, dass ${}_n\overline{V}_x = 1$ sein muss, so folgt aus der Lösung von (4) für $\overline{P}_x$ die Formel

$$\overline{P}_x = \frac{{}_nE_x + \bar{s}_{\overline{1|}}\,{}_{|n}A_x}{\bar{a}_{\overline{1|}}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - k_1\,{}_{|n}A_x} = \frac{\tilde{A}_{x:\overline{n|}}}{\tilde{a}_{x:\overline{n|}}}, \tag{5}$$

wobei $k_1$ aus (3) berechenbar, ferner $\bar{a}_{\overline{1|}} = \dfrac{1-e^{-\delta}}{\delta} = \dfrac{iv}{\delta}$ und $\bar{s}_{\overline{1|}} = e^{\delta}\,\bar{a}_{\overline{1|}} = (1+i)\,\bar{a}_{\overline{1|}} = \dfrac{i}{\delta}$ ist.

In Wirklichkeit kann der Versicherte nicht die «stetige» Prämie zahlen, sondern einen Beitrag, der an zum voraus festgelegten Terminen «diskontinuierlich» fällig ist. Nimmt man an, der Versicherte entrichtet bei jährlicher Prämienzahlung den Beitrag $\overline{P}_x\,\bar{a}_{\overline{1|}}$ und setzt zugleich fest, dass im Todesfalle während des Versicherungsjahres «nicht verbrauchte Teile» der bezahlten Prämie einschliesslich Zins zurückerstattet werden, so kann die Deckungskapitalberechnung für ganzzahlige $t$ vorgenommen werden wie wenn $\overline{P}_x$ einginge; $\overline{P}_x\,\bar{a}_{\overline{1|}}$ ist also die $\overline{P}_x$ völlig äquivalente «diskontinuierliche» Jahresprämie. Der Rückerstattungsbetrag bei Ableben im Zeitpunkt $t+h\,(0<h<1)$ ist gleich [1])

$$R_h = e^{\delta h}\,\overline{P}_x\,(\bar{a}_{\overline{1|}} - \bar{a}_{\overline{h|}}); \tag{6}$$

für ganzzahlige $t$ gilt für das Deckungskapital die Beziehung (retrospektiv)

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}_x &= \frac{1}{v^t\,l_{x+t}} \sum_{\tau=0}^{t-1} v^{\tau}\,l_{x+\tau}\left\{\overline{P}_x\left[\bar{a}_{\overline{1|}} - v k_1\,q_{x+\tau}\right] - v\,\bar{s}_{\overline{1|}}\,q_{x+\tau}\right\} = \\ &= \frac{1}{D_{x+t}}\left\{\overline{P}_x\left[\bar{a}_{\overline{1|}}(N_x - N_{x+t}) - k_1(M_x - M_{x+t})\right] - \bar{s}_{\overline{1|}}(M_x - M_{x+t}\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

oder (prospektiv)

$$\begin{aligned} {}_t\overline{V}_x &= {}_{n-t}E_{x+t} + \bar{s}_{\overline{1|}}\,{}_{|n-t}A_{x+t} - P_x\left[\bar{a}_{\overline{1|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - k_1\,{}_{|n-t}A_{x+t}\right] = \\ &= \tilde{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_x\,\tilde{a}_{x+t:\overline{n-t|}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dabei ist nach dem «diskontinuierlichen Schema» $D_x = v^x\,l_x$ und $C_x = v^{x+1}\,l_x\,q_x$.

---

[1]) Für die Praxis genügt die aus (6) hervorgehende Näherung

$$\begin{aligned} R_h = e^{\delta h}\,\overline{P}_x\,\bar{a}_{\overline{1|}}\left(1 - \frac{\bar{a}_{\overline{h|}}}{\bar{a}_{\overline{1|}}}\right) &\sim (1+ih)\,\overline{P}_x\,\bar{a}_{\overline{1|}}\left(1 - \frac{\delta h - + \ldots}{\delta - + \ldots}\right) \sim \\ &\sim (1+ih)\,(1-h)\,\overline{P}_x\,\bar{a}_{\overline{1|}}. \end{aligned}$$

## 2. Tarifprämie

Überlegungen und Annahmen gleicher Art, wie sie zur Darstellung der Nettoprämie verwendet worden sind, führen auch zur Tarifprämie. Es sei $\bar{\pi}_x$ die *stetig* zahlbare Tarifprämie, basierend auf den Verwaltungskosten $\alpha, \beta, \gamma$ und Gewinnzuschlägen nach einem mechanischen Gewinnplan. Der Gewinnanteil werde mit der Prämie verrechnet, ferner soll er über ein Versicherungsjahr unverändert bleiben. An sich könnte man auch einen stetig oder unterjährig variablen Gewinnanteil ansetzen, aber es ist naheliegend, den auszuschüttenden Überschussanteil nur in jährlichen Intervallen ändern zu lassen; das Prinzip der kontinuierlichen Methode wird davon nicht berührt. – Wir bezeichnen mit $\Delta_\tau$ den Bruchteil der Tarifprämie, der im Versicherungsjahr $\tau$ bis $\tau+1$ als Gewinn rechnungsmässig vergütet wird.

Die Belastung durch die Todes- und Erlebensfallsumme «1» beträgt $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$; näherungsweise ist $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ gleich ${}_nE_x + \bar{s}_{\overline{1}|}\,{}_{|n}A_x$. Dazu kommt die Belastung aus Abschlusskosten mit $\alpha$ und laufenden Kosten mit $\gamma\bar{a}_{x:\overline{n}|}$, wobei diese näherungsweise gleich $\gamma(\bar{a}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - k_1\,{}_{|n}A_x)$ ist. Die Kosten $\beta$ erfassen wir zusammen mit der Prämie und Gewinnanteilen.

Der Barwert aller für das Versicherungsjahr $\tau$ bis $\tau+1$ fälligen Gewinnanteile ist gleich $\dfrac{D_{x+\tau}}{D_x}\Delta_\tau\bar{\pi}_x\bar{a}_{x+\tau:\overline{1}|}$; mit den früheren Näherungen folgt daraus

$$\frac{D_{x+\tau}}{D_x}\Delta_\tau\bar{\pi}_x\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x+\tau:\overline{1}|} - k_1\,{}_{|1}A_{x+\tau}\right] = \frac{\bar{\pi}_x}{D_x}\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\Delta_\tau D_{x+\tau} - k_1\Delta_\tau C_{x+\tau}\right].$$

Für den Barwert aller Überschussanteile finden wir [1])

$$\bar{\pi}_x\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\Delta_\tau D_{x+\tau}}{D_x} - k_1\sum_{\tau=0}^{n-1}\frac{\Delta_\tau C_{x+\tau}}{D_x}\right],$$

wofür wir vereinfachend schreiben,

$$\bar{\pi}_x\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\Delta) - k_1\,{}_{|n}A_x(\Delta)\right].$$

---

[1]) Zur numerischen Auswertung lassen sich ohne weiteres die höheren Summen der diskontierten Zahlen der Lebenden und Gestorbenen einführen. Wenn z.B.

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \ldots = \Delta_{h-1} = 0,\quad \Delta_h = b_0,\quad \Delta_{h+1} = b_0 + b_1,\quad \Delta_{h+2} = b_0 + 2b_1,$$

(lineare Steigerung), so wird

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\Delta) = \frac{1}{D_x}\left\{b_0(N_{x+h} - N_{x+n}) + b_1\left[S_{x+h+1} - S_{x+n} - (n-h-1)N_{x+n}\right]\right\}.$$

Damit lässt sich der Barwert der Tarifprämien unter Abzug der Gewinnanteile und unter Verrechnung von $\beta$ darstellen als

$$(1-\beta)\,\overline{\pi}_x\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\Delta)\right)-k_1\left({}_{|n}A_x-{}_{|n}A_x(\Delta)\right)\right]. \qquad (9)$$

Schliesslich folgt für $\overline{\pi}_x$ die Beziehung

$$\overline{\pi}_x=\frac{{}_nE_x+\bar{s}_{\overline{1}|}\,{}_{|n}A_x+\alpha+\gamma\left(\bar{a}_{\overline{1}|}\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-k_1\,{}_{|n}A_x\right)}{(1-\beta)\left[\bar{a}_{\overline{1}|}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(\Delta)\right)-k_1\left({}_{|n}A_x-{}_{|n}A_x(\Delta)\right)\right]}, \qquad (10)$$

oder symbolisch durch die stetigen Versicherungswerte ausgedrückt,

$$\overline{\pi}_x=\frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-\beta)\left[\bar{a}_{x:\overline{n}|}-\bar{a}_{x:\overline{n}|}(\Delta)\right]}. \qquad (11)$$

Sofern der Versicherte bei jährlicher Beitragszahlung den Barwert $\overline{\pi}_x\bar{a}_{\overline{1}|}$ entrichtet, ist beim Ableben im Zeitpunkt $\tau+h$ die Rückerstattung

$$R_{\tau+h}=e^{\delta h}(1-\Delta_\tau)\,\overline{\pi}_x(\bar{a}_{\overline{1}|}-\bar{a}_{\overline{h}|})\sim(1+ih)(1-h)(1-\Delta_\tau)\,\overline{\pi}_x\bar{a}_{\overline{1}|} \quad (12)$$

fällig.

## 3. Zerlegung der Gewinne, wenn Nettoprämie entrichtet und Nettodeckungskapital zurückgestellt

Der guten Übersichtlichkeit halber behandeln wir zuerst den Fall der Nettoprämie und Nettodeckungskapital-Reservierung; Überschüsse entstehen aus dem bessern Verlauf der Sterblichkeit und infolge der höheren Verzinsung.

Der effektive Ablauf der Ereignisse sei gemessen durch $\mu'_x$ und $\delta'$ bzw. durch $q'_x$ und $i'$. Sofern der Versicherte wiederum den Beitrag $\overline{P}_x\bar{a}_{\overline{1}|}$ entrichtet, so besteht die folgende, auf ihre Richtigkeit ohne weiteres prüfbare Beziehung für den *Gewinn* $G$,

$$G=\left[\overline{V}(0)+\overline{P}_x\bar{a}_{\overline{1}|}\right]e^{\delta'}-\int_0^1 e^{\delta'(1-\zeta)}\frac{l'_{y+\zeta}\mu'_{y+\zeta}}{l'_y}\left[1+e^{\delta\zeta}\,\overline{P}_x(\bar{a}_{\overline{1}|}-\bar{a}_{\overline{\zeta}|})\right]d\zeta-\frac{l'_{y+1}}{l'_y}\overline{V}(1). \qquad (13)$$

Für die Berechnung der im Todesfall zu zahlenden Prämienrückerstattung gilt zwangsläufig der rechnungsmässige Zinssatz $\delta$ und nicht der effektive $\delta'$.

Die Auswertung von (13) erfolgt unter den gleichen Annahmen wie die Auflösung von (1). Es ist $\bar{s}'_{\overline{1}|} = \int\limits_0^1 e^{\delta'(1-\zeta)}\, d\zeta = \frac{i'}{\delta'}$; zusätzlich tritt

$$\int\limits_0^1 e^{-(\delta'-\delta)\zeta}\, \bar{a}_{\overline{\zeta}|}\, d\zeta = \frac{1}{\delta}\left[\int\limits_0^1 e^{-(\delta'-\delta)\zeta}\, d\zeta - \int\limits_0^1 e^{-\delta'\zeta}\, d\zeta\right] = \frac{1}{\delta}\,(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \bar{a}'_{\overline{1}|}) = u'_1$$

auf. Mit diesen Abkürzungen wird der Gewinn

$$G = [\bar{V}(0) + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\, e^{\delta'} - q'_y\,[\bar{s}'_{\overline{1}|} + e^{\delta'}\, \bar{P}_x(\bar{a}_{\overline{1}|}\, \bar{a}''_{\overline{1}|} - u'_1)] - (1 - q'_y)\, \bar{V}(1)\,. \quad (14)$$

Subtrahiert man davon die Identität (4), d. h.

$$[\bar{V}(0) + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\, e^{\delta} - q_y\,[\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \bar{P}_x] - (1 - q_y)\, \bar{V}(1) = 0\,,$$

so folgt

$$G = [\bar{V}(0) + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\,(e^{\delta'} - e^{\delta}) + q_y\,[\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \bar{P}_x - \bar{V}(1)] -$$
$$- q'_y \left[\bar{s}'_{\overline{1}|} + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}\, e^{\delta'} \left(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right) - \bar{V}(1)\right]. \quad (15)$$

Mit $e^{\delta'} - e^{\delta} = i' - i$ ist offensichtlich, dass das erste Glied in (15), nämlich

$$[\bar{V}(0) + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\,(i' - i) \quad (16)$$

den *Zinsengewinn*, Wert Ende Versicherungsjahr, darstellt. Der Rest

$$q_y\,[\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \bar{P}_x - \bar{V}(1)] - q'_y \left[\bar{s}'_{\overline{1}|} + \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}\, e^{\delta'} \left(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right) - \bar{V}(1)\right] \quad (17)$$

ist identisch mit dem *Sterblichkeitsgewinn.* Dass in (17) Glieder auftreten, welche die effektive Verzinsung $\delta'$ enthalten, rührt von der Wahl der kontinuierlichen Methode her [1]); die Todesfallzahlungen sind stetig und nicht rechnungsmässig am Ende des Versicherungsjahres fällig.

[1]) Die gleiche Erscheinung findet man bei der diskontinuierlichen Methode, wenn die Zerlegung auf Grund des ausreichenden Deckungskapitals und der ausreichenden Prämie vorgenommen wird; in diesem Fall wird ein Teil der Leistungen (Unkosten) zu Beginn des Versicherungsjahres zahlbar, was zum Auftreten von $i'$ im Ausdruck für den Unkostengewinn führt.

Der *Sterblichkeitsgewinn* allein soll nunmehr für einen Versicherungsbestand dargestellt werden. Dabei wird von der Berücksichtigung des Stornos als Ausscheidungsursache abgesehen; wir dürfen dies tun, weil es sich um die Darlegung des Prinzips handelt und nicht um die Wiedergabe eines vollständigen Rechenschemas [1]).

Zu Beginn des Versicherungsjahres sei der Bestand $S(x,t)$ vorhanden; $x$ bedeutet das Abschlussalter, $t$ die (ganze) Zahl der abgelaufenen Versicherungsjahre. Durch Tod soll die Summe $T(x,t)$ abgehen; somit ist $S(x,t+1) = S(x,t) - T(x,t)$ [2]). Ferner ist $T(x,t) = S(x,t)\, q'_{x+t}$.

Für die Risikoprämie des ganzen Bestandes folgt aus (17)

$$S(x,t)\, q_{x+t}\left[\bar{s}_{\overline{1|}} + k_1\, \overline{P}_x - {}_{t+1}\overline{V}_x\right]$$

oder unter Beachtung von (4)

$$S(x,t)\left[{}_t\overline{V}_x + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1|}}\right](1+i) - S(x,t)\, {}_{t+1}\overline{V}_x. \tag{18}$$

In gleicher Weise kann für die Risikoschadensumme geschrieben werden

$$S(x,t)\, q'_{x+t}\left[\bar{s}'_{\overline{1|}} + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1|}} e^{\delta'}\left(\bar{a}''_{\overline{1|}} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1|}}}\right) - {}_{t+1}\overline{V}_x\right] =$$

$$= T(x,t)\, \bar{s}'_{\overline{1|}} + T(x,t)\, \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1|}}\left[e^{\delta'}\left(\bar{a}''_{\overline{1|}} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1|}}}\right)\right] - T(x,t)\, {}_{t+1}\overline{V}_x. \tag{19}$$

Die Beziehungen (18) und (19) lassen erkennen, dass folgende Grössen statistisch zu erfassen sind:

*a)* $S(x,t)\, {}_t\overline{V}_x$: Deckungskapital auf Beginn Versicherungsjahr des Bestandes Beginn Versicherungsjahr.

*b)* $S(x,t)\, \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1|}}$: Prämieneinnahme, nach der gewählten Konzeption auf den Beginn des Versicherungsjahres fallend.

*c)* $S(x,t)\, {}_{t+1}\overline{V}_x$: Deckungskapital auf Ende Versicherungsjahr des Bestandes Beginn Versicherungjahr.

*d)* $T(x,t)$: Todesfallsummen (ohne Prämienrückerstattungen).

---

[1]) Sofern der Beitrag $\overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1|}}$ beträgt, d.h. jährliche Prämienzahlung gilt, darf man nach Zahlung der Prämie eine regelmässige Verteilung der Stornofälle voraussetzen; auch dürfte man annehmen, dass die Stornofälle alle auf Ende des Versicherungsjahres, d.h. bei Fälligkeit einer neuen Prämie, statthaben. Beide Ansätze erlauben eine verhältnismässig einfache Ausdehnung des beschriebenen Schemas.

[2]) Neuzugänge auf Beginn des Versicherungsjahres sind in $S(x,t)$ enthalten; Abläufe auf Ende Versicherungsjahr sind in $S(x,t+1)$ zu belassen.

*e)* $T(x,t)\,\overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}$: Auf Todesfälle entfallende Prämieneinnahme.

*f)* $T(x,t)\,{}_{t+1}\overline{V}_x$: Durch Tod freiwerdendes Deckungskapital Ende Versicherungsjahr.

Daneben treten einige Hilfswerte (welche u.a. die Prämienrückerstattung enthalten) auf, die unveränderlich, d.h. unabhängig von $x$ und $t$ sind, somit erst gesamthaft in die Rechnung eingehen können.

## 4. Zerlegung der Gewinne, wenn Tarifprämie entrichtet und Nettodeckungskapital zurückgestellt

Vom einfachen Schema nach Ziffer 3 ausgehend, ist es nun leicht, den allgemeinen Fall zu behandeln. Es soll die Tarifprämie entrichtet und das Nettodeckungskapital zurückgestellt werden.

Zuerst ist es notwendig, die Tarifprämie $\bar{\pi}_x$ in ihre Teile zu zerlegen. Aus (11) folgt

$$\bar{\pi}_x = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{\alpha + \gamma\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} + \beta\,\bar{\pi}_x(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{a}_{x:\overline{n}|}(\varDelta))}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} + \bar{\pi}_x \frac{\bar{a}_{x:\overline{n}|}(\varDelta)}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}. \qquad (20)$$

Darin bedeutet $\dfrac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = \overline{P}_x$ die Nettoprämie; der Rest ist gleich dem Verwaltungskosten- und Gewinnzuschlag und sei mit $\overline{Z}_x$ bezeichnet. Sofern man $\overline{Z}_x$ kennen muss, wird man diese Grösse als Differenz $\bar{\pi}_x - \overline{P}_x$ einführen.

Der Versicherte soll $\bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|}$ entrichten, wobei jedesmal die rechnungsmässigen Gewinnanteile abgehen [1]). Der effektive verbrauchte Zuschlag sei $\overline{Z}'_x(\tau)$, wobei wir unterstellen, dass $\beta'$ und $\gamma'$ für ein ganzes Versicherungsjahr gelten; somit ist $\overline{Z}'_x(\tau)$ für das Versicherungsjahr $\tau$ konstant.

Die (13) entsprechende Gewinngleichung nimmt die Gestalt an

$$G = [\overline{V}(0) + \bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\, e^{\delta'} - \int_0^1 e^{\delta'(1-\zeta)} \frac{l'_{y+\zeta}\,\mu'_{y+\zeta}}{l'_y} [1 + e^{\delta\zeta}(1-\varDelta_\tau)\,\bar{\pi}_x(\bar{a}_{\overline{1}|} - \bar{a}_{\overline{\zeta}|})]\, d\zeta -$$

$$- \overline{Z}'_x(\tau) \int_0^1 e^{\delta'(1-\zeta)} \frac{l'_{y+\zeta}}{l'_y}\, d\zeta - \frac{l'_{y+1}}{l'_y}\, \overline{V}(1). \qquad (21)$$

---

[1]) Es wird also angenommen, dass «Gewinne» nur aus dem Verlauf der Sterblichkeit, der Zinserträgnisse und der Verwaltungskosten entstehen, nicht aber aus einer Abänderung des mechanischen Gewinnplanes.

Gleichung (21) mit den schon früher gebrauchten Annahmen ausgewertet führt auf

$$G = [\overline{V}(0) + \bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\, e^{\delta'} - \overline{Z}'_x(\tau)\, \bar{s}'_{\overline{1}|} - \tag{22}$$
$$- q'_y \left[\bar{s}'_{\overline{1}|} + (1-\Delta_\tau)\, \bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|} e^{\delta'} \left(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right) - \overline{Z}'_x(\tau)\, k_1\right] - (1-q'_y)\, \overline{V}(1)\,.$$

Subtrahiert man davon neuerdings die Identität (4) und ersetzt im ersten Glied von (22) die Tarifprämie $\bar{\pi}_x$ durch $\overline{P}_x + \overline{Z}_x$, so bleibt

$$G = [\overline{V}(0) + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\,(i'-i) + q_y [\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \overline{P}_x - \overline{V}(1)] - \tag{23}$$
$$- q'_y \left[\bar{s}'_{\overline{1}|} + (1-\Delta_\tau)\, \bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|} e^{\delta'} \left(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right) - \overline{Z}'_x(\tau)\, k_1 - \overline{V}(1)\right] + [\overline{Z}_x \bar{a}_{\overline{1}|} e^{\delta'} - \overline{Z}'_x(\tau)\, \bar{s}'_{\overline{1}|}]\,.$$

In (23) stellt

*a)* $[\overline{V}(0) + \overline{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}]\,(i'-i)$ den *Zinsengewinn*,

*b)* $q_y [\bar{s}_{\overline{1}|} + k_1 \overline{P}_x - \overline{V}(1)] -$

$$- q'_y \left[\bar{s}'_{\overline{1}|} + (1-\Delta_\tau)\, \bar{\pi}_x \bar{a}_{\overline{1}|} e^{\delta'} \left(\bar{a}''_{\overline{1}|} - \frac{u'_1}{\bar{a}_{\overline{1}|}}\right) - \overline{Z}'_x(\tau)\, k_1 - \overline{V}(1)\right]$$

den *Sterblichkeitsgewinn* und

*c)* $\overline{Z}_x \bar{a}_{\overline{1}|}(1+i') - \overline{Z}'_x(\tau)\, \bar{s}'_{\overline{1}|}$ den *Aufschlagsgewinn* dar.

Es ist kaum nötig, das Schema für die Ermittlung der Sterblichkeitsgewinne abzuleiten; man kann in allen Teilen gleich vorgehen wie in Ziffer 3.

Abschliessend stellt sich die Frage, ob die Wahl der kontinuierlichen Methode zu einem weniger handlichen Rechenapparat führt als die Annahme des diskontinuierlichen Verfahrens. Die Frage darf verneint werden, sofern die Voraussetzungen über den Verlauf der Grundgrössen zweckmässig getroffen werden und man den etwas längern Weg zum Gewinnen der Rechenregeln nicht als störend empfindet.