**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

**Swiss Actuaries** 

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 57 (1957)

**Artikel:** Zur Umwandlung temporärer Extraprämien in äquivalente

Summenreduktionen

Autor: Leimbacher, W.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-550802

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 11.12.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Zur Umwandlung temporärer Extraprämien in äquivalente Summenreduktionen

Von W. Leimbacher, Zürich

Herrn Prof. Saxer zum 60. Geburtstag

## 1. Einleitung

Die Aufgabe, Übersterblichkeiten anstatt durch Extraprämien durch Kürzungen des Todesfallkapitals zu kompensieren, ist in der Literatur unter den verschiedensten Voraussetzungen und Aspekten behandelt worden. Die folgende aus der Praxis des Tarifierungsdienstes hervorgegangene Problemstellung ist unseres Wissens jedoch neu (wenn auch verwandt mit früheren Ansätzen; vgl. z. B. «Die technische Behandlung der gestaffelten multiplikativen Übersterblichkeit» von H. Jecklin, MVSVM 45, p. 415); obschon die vorgeschlagene Lösung vor allem dem Praktiker dient, dürften die verwendeten Approximationen und Schlussfolgerungen auch den Theoretiker interessieren.

# 2. Problemstellung

Es bezeichne  $\Delta P_m$  die während m Jahren zahlbare Extraprämie (in Promille des anfänglichen Risikokapitals R), die der Versicherte auf Grund seiner erhöhten Sterblichkeit  $q_{x+t}^* = q_{x+t} + \Delta q_{x,t}$  zu entrichten hat. Dabei bedeute  $q_{x+t}$  die während der ganzen Dauer gültige «Basissterblichkeit» (z. B. die normale Sterblichkeit  $q'_{x+t}$  oder eine multiplikativ erhöhte Anormalensterblichkeit  $(1+\alpha)q'_{x+t}$ );  $\Delta q_{x,t}$  ist die während genau m Jahren wirkende Extrasterblichkeit,  $\Delta q_{x,t} > 0$  für  $t=0,1,\ldots,m-1$ . In der heutigen Tarifikation anormaler Risiken treten solche temporäre Extraprämien sehr häufig auf, wie z. B. ein Blick in die modernen «Rating Manuals» amerikanischer Gesellschaften zeigt. Die Extraprämie beträgt gewöhnlich  $5 \, {}^0/_{00}$ ,  $7,5 \, {}^0/_{00}$ , oder seltener  $10 \, {}^0/_{00}$  und  $15 \, {}^0/_{00}$ ; die Dauer m variiert zwischen 1 und 5 Jahren.

Trotz der wohlbekannten Problematik einer Reduktion des Versicherungsschutzes gerade dann, wenn das Sterberisiko erhöht ist, scheint es in der Praxis aus verschiedenen Gründen oft erwünscht, solche temporäre Extraprämien in gleichwertige Summenstaffelungen von gleicher Dauer umzuwandeln. Es wird deshalb eine einfache Näherungsformel gesucht, die gestattet, die entsprechende Kürzung direkt als Funktion der Extraprämie  $\Delta P_m$  — und nicht der expliziten, meist nur ungenau bekannten Übersterblichkeit  $\Delta q$  — anzugeben, falls dies überhaupt möglich ist.

### 3. Voraussetzungen

Bezeichnet  $\lambda_t$ ,  $t=0,1,\ldots,m-1$ , den Betrag (in Promille des anfänglichen Risikokapitals R), um den die Versicherungssumme im (t+1)-ten Versicherungsjahr gekürzt werden soll, so besteht zwischen  $\Delta P_m$  und  $\lambda_t$  die Beziehung

$$\Delta P_m \ddot{a}_{x:m}^* = \frac{1}{D_x^*} \sum_{t=0}^{m-1} C_{x+t}^* \lambda_t, \tag{1}$$

wobei sich die mit \* bezeichneten Grössen auf die Sterblichkeit  $q_{x+t}^* = q_{x+t} + \Delta q_{x,t}$  beziehen. Für die Extraprämie  $\Delta P_m$  gilt exakt:

$$\Delta P_m = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} \sum_{t=0}^{m-1} v \, \Delta q_{x,t} \, R_{x+t} \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^*}, \tag{2}$$

worin  $R_{x+t}$  das Risikokapital der betreffenden Versicherung im (t+1)-ten Versicherungsjahr bedeutet. Nun ist es aber sinnlos, genauer rechnen zu wollen, als die medizinisch-statistischen Grundlagen es gestatten: In praxi (cf. die erwähnten «Rating Manuals») wird stets eine von Alter und Kombination unabhängige Extraprämie erhoben.  $\Delta P_m$  wird dann von der Kombination unabhängig, wenn das Risikokapital  $R_{x+t}$  konstant angenommen wird; dies ist für den Grossteil der geläufigen Kombinationen desto besser erfüllt, je kleiner m im Verhältnis zur Versicherungsdauer ist. Wir machen deshalb im folgenden stets die

Voraussetzung I:

$$R_{x+t} \equiv R = 1, \quad t = 0, 1, ..., m-1,$$
und somit
$$\Delta P_{m} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{*}} \sum_{t=0}^{m-1} v \, \Delta q_{x,t} \, \frac{D_{x+t}^{*}}{D_{x}^{*}}, \tag{3}$$

(wobei R=1 offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern nur eine Normierung bedeutet).

Weiter wird  $\Delta P_{m=1}$  nur dann altersunabhängig, wenn  $\Delta q_{x,0}$  konstant angenommen wird, was von vorneherein die Hypothese einer multiplikativen Übersterblichkeit (ob konstant oder abnehmend) ausschliesst. Wir betrachten deshalb im folgenden nur die zwei (auch medizinisch vernünftigen) Fälle:

Voraussetzung IIa:

$$\Delta q_{x,t} \equiv \Delta q$$
,  $t = 0, 1, \ldots, m-1$ ;

Voraussetzung IIb:

$$\Delta q_{x,t} \equiv \frac{m-t}{m} \Delta q$$
,  $t = 0, 1, \ldots, m-1$ .

Man bemerkt, dass die Altersunabhängigkeit von (2) unter Voraussetzung I und II a exakt erfüllt ist, unter Voraussetzung I und II b dagegen in guter Näherung (da die Gewichte  $\frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \ddot{a}_{x:\overline{m}|}^*}$  für kurze Dauern m nicht allzustark mit dem Alter variieren).

Was den Abzug  $\lambda_t$  anbetrifft, kann man z.B. im Falle II a  $\lambda_t = \lambda_0$ , und im Falle II b  $\lambda_t = \lambda_0 \frac{m-t}{m}$  setzen; jedoch auch im letztern Fall ist eine konstante Reduktion vertretbar, denn es wird ja, als Alternative zur Staffelung, auch eine konstante und nicht eine mit dem jährlichen Risiko variierende Extraprämie erhoben. Wir betrachten deshalb das Problem ganz allgemein unter

Voraussetzung IIIa:

$$\lambda_t \equiv \lambda_0$$
, sowie unter

Voraus setzung IIIb:

$$\lambda_t = \lambda_0 \frac{m-t}{m}, \quad t = 0, 1, ..., m-1.$$

## 4. Näherungsformeln für $\lambda_0$

Aus (1) folgt

$$\lambda_0 = \frac{\Delta P_m}{\sum_{t=0}^{m-1} v(q_{x+t} + \Delta q_{x,t}) \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \ddot{a}_{x:m}^*} \frac{\lambda_t}{\lambda_0}},$$
(4)

woraus sich mit (3) und Voraussetzung IIIa (konstante Kürzung) ergibt

$$\lambda_0^{\text{IIIa}} = \frac{\Delta P_m}{\sum_{t=0}^{m-1} v \, q_{x+t} \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \, \ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} + \Delta P_m}.$$
 (5)

In erster Näherung ergibt die Summe im Nenner die Jahresprämie für eine temporäre Todesfallversicherung (mit normaler Sterblichkeit); damit ist gezeigt, dass  $\lambda_0^{\text{IIIa}}$  nicht wesentlich von der Art und Inzidenz der Übersterblichkeit  $\Delta q_{x,t}$ , sondern nur von deren Agglomerat  $\Delta P_m$  abhängt. (Dies wird auch ersichtlich, wenn der Nenner von (4), mit  $\lambda_t = \lambda_0$ , in  $P^*(A_{x:\overline{m}}^1) = P(A_{x:\overline{m}}^1) + \Delta P(A_{x:\overline{m}}^1)$  umgeformt wird; werden die Reserven der temporären Todesfallversicherung vernachlässigt, so ist  $\Delta P(A_{x:\overline{m}}^1) = \Delta P_m$  und  $\lambda_0$  somit von  $\Delta q$  nur mittels  $\Delta P_m$  abhängig).

Aus (5) folgt nun weiter:

$$\lambda_0^{\text{III a}} = \frac{\Delta P_m}{v \, q_{x+T} + \Delta P_m}, \quad 0 < T < m-1,$$
 (6)

wobei für praktische Zwecke genügend genau

$$\lambda_0^{\text{III a}} \cong \frac{\Delta P_m}{v \, q_{x + \frac{m-1}{2}} + \Delta P_m} \tag{7}$$

gesetzt werden darf (siehe Zahlenbeispiele Abschnitt 5).

Für die linear abnehmende Kürzung (Voraussetzung IIIb) zerlegen wir den Nenner von (4) in die beiden Summen

$$S_1 = \sum v \, q_{x+t} \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \, \ddot{a}_{x:\overline{m}|}^*} \, \frac{m-t}{m} \quad \text{und} \quad S_2 = \sum v \, \varDelta q_{x,t} \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \, \ddot{a}_{x:\overline{m}|}^*} \, \frac{m-t}{m}.$$

 $\operatorname{Auf} S_1$ wenden wir in beiden Fällen II a und II b<br/> die Näherung

$$S_1 = \frac{m+1}{2m} \sum v \, q_{x+t} \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \ddot{a}_{x:\overline{m}|}^*} = \frac{m+1}{2m} \, v \, q_{x+T}$$

an, welche umso genauer ausfällt, je kleiner  $\frac{q_x D_x^* - q_{x+m-1} D_{x+m-1}^*}{q_x D_x^*} \text{ ist.}$  Wieder werden wir hier  $T = \frac{m-1}{2}$  setzen dürfen.

Analog erhält man für  $S_2$  im Falle II a

$$S_2 \cong \frac{m+1}{2m} \Delta P;$$

im Falle IIb dagegen ergibt sich mit den gleichen Mitteln:

$$\begin{split} S_2 &= \sum v \, \varDelta q \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \, \ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} \left(\frac{m-t}{m}\right)^2 \!\!\! \approx \!\!\! \frac{v \, \varDelta q}{\ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} \, \frac{m(m+1) \, (2m+1)}{6m^2}, \\ \varDelta P &= \sum v \, \varDelta q \, \frac{D_{x+t}^*}{D_x^* \, \ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} \left(\frac{m-t}{m}\right) \!\!\! \approx \!\!\! \frac{v \, \varDelta q}{\ddot{a}_{x:\overline{m}}^*} \, \frac{(m+1) \, m}{2m}, \\ \text{und somit} \\ S_2 &\cong \!\!\! \frac{2m+1}{3m} \, \varDelta P. \end{split}$$

Fassen wir zusammen, so folgt also aus (4) im Falle der abnehmenden Kürzung IIIb (in etwas schlechterer Näherung als (7), vgl. Zahlenbeispiele Abschnitt 5):

für konstante Extrasterblichkeit

$$\lambda_0^{\text{IIIb, IIa}} \cong \frac{2m}{m+1} \frac{\Delta P_m}{v \, q_{x+\frac{m-1}{2}} + \Delta P_m} \tag{8}$$

für linear abnehmende Extrasterblichkeit

$$\lambda_0^{\text{IIIb, IIb}} \cong \frac{m \, \Delta P_m}{\frac{m+1}{2} \, v \, q_{x+\frac{m-1}{2}} + \frac{2m+1}{3} \, \Delta P_m}$$
(9)

Man bemerkt, dass (7), (8) und (9) für m=1 den exakten Wert

$$\lambda_0 = \frac{\Delta P_1}{v(q_x + \Delta q)}, \quad \Delta P_1 = v \, \Delta q, \tag{10}$$

liefern. Weiter schliesst man aus (8) und (9), da der erstjährige Abzug nicht grösser als 1 werden kann, dass die Konversion der temporären Extraprämie in eine linear abnehmende Kürzung dann und nur dann

möglich ist, wenn  $\Delta P_m$  kleiner als die Schranke  $M_{m,\bar{x}}$ ,  $\bar{x}=x+\frac{m-1}{2}$ , ausfällt:

m	$M_{m,ar{x}} \cong rac{m+1}{m-1}  v  q_{ar{x}}$ im Falle IIa	$M_{m,\overline{x}} \cong rac{3}{2} rac{m+1}{m-1} v q_{\overline{x}}$ im Falle II b		
1	∞	<ul> <li>✓</li> <li>✓</li> </ul>		
2	$3vq_{ar x}$	$rac{9}{2}vq_{\overline{x}}$		
3	$2vq_x^-$	$3\ v\ q_{\overline{x}}$		
4	$rac{5}{3}vq_{\overline{x}}$	$rac{5}{2}  v  q_{\overline{x}}$		
5	$rac{3}{2}vq_{\overline{x}}$	$rac{9}{4}vq_{\overline{x}}$		

Die Umwandlung in eine konstante Kürzung dagegen ist in jedem Falle möglich, wie auch aus (6) hervorgeht.

## 5. Beispiele

Ausgehend von der Tafel SM 48–53, 3%, x=40, m=5 (für kürzere Dauern werden die Näherungen nur besser!), haben wir im folgenden die exakten und angenäherten Werte entsprechend (7), (8) und (9) zusammengestellt (alle Werte in Promille). Für die konstante Übersterblichkeit wurden die Werte so angenommen, dass die gleichen Extraprämien  $\Delta P_m$  wie für die abnehmende Sterblichkeit resultieren.

	Konstante Reduktion		Abnehmende Reduktion	
$arDelta q_t$ , Extrasterblichkeit	9,26	$\left  \left(1 - \frac{t}{5}\right) 15 \right $	4,61	$\left  \left( 1 - \frac{t}{5} \right) \right. 7,5$
$\Delta P_{5}$ , Extraprämie	8,99	8,99	4,48	4,48
$\lambda_0$ exakt	707	707	909	813
$\lambda_0$ approximativ nach (7), (8), (9)	708	708	913	814
Fehler in % von $\lambda_0$ exakt	0,1	0,1	0,4	0,1

Hieraus ergeben sich folgende Bemerkungen:

Der bei konstanter Reduktion vorzunehmende Abzug ist in der Tat von der Hypothese einer konstanten oder fallenden Übersterblichkeit praktisch unabhängig.

Für die Grösse der abnehmenden Kürzung bewirken in diesem Beispiel die verschiedenen Übersterblichkeitshypothesen einen Unterschied von mehr als 10%; gibt die medizinische Sachlage zu Zweifel über die anzuwendende Hypothese Anlass, so soll eine konstante Reduktion vorgenommen werden, da hier die benützte Hypothese irrelevant ist.

In Anbetracht der notwendigerweise der medizinischen Einschätzung und der mathematischen Basis der Extraprämie inhärenten Ungenauigkeiten sind die Näherungen (7), (8), (9) mehr als genügend; um die in der Praxis üblichen runden Versicherungsbeträge zu erhalten, müssen die Kürzungen ohnehin zweckmässig auf- oder abgerundet werden.

the state of the s

ratificational grandle, other excitements in equilibrie del antre de les il 791 (1911). perfectione de unifet en depui la moltre mosqual fragil equi is secret e unifet ancie sitte di disc la compani e il compani della compani della compani della compani e il compani della compani della compani del

kindil men ngil salagasi kecil itang gagasan idi en harangin nda panja sagrend pilangil ni 17. Jigi kagpata panganing mendapan dalah kinin kilikapan ilik mengalikan nasa di melapa Angkapata pangan ngapangan pengalah pangan kendapan nasa pangan bengan pangan ngapan nasa pangan nasa Pangan pangan ngapan ngapan nasa kangan nasa pangan ni termini ngapan ngapan nasa nasa nasa nasa nasa nasa nasa

enilii epolookun ilistoor mais keelem takuulet on mais sidaan laikultalista sal.
Teritojaalini eleminaan kali peki ja kun on oli ja salaan kali teritoona kali kun manakiisiona salaan kali kun manakiisiona salaan kali kun on oli ja salaan kali kun on oli ja salaan kali kun oli ja salaan kali ja