Zur Umwandlung temporärer Extraprämien in äquivalente Summenreduktionen

Zur Umwandlung temporärer Extraprämien in äquivalente Summenreduktionen

Von *W. Leimbacher*, Zürich

Herrn Prof. Saxer zum 60. Geburtstag

1. Einleitung

Die Aufgabe, Übersterblichkeiten anstatt durch Extraprämien durch Kürzungen des Todesfallkapitals zu kompensieren, ist in der Literatur unter den verschiedensten Voraussetzungen und Aspekten behandelt worden. Die folgende aus der Praxis des Tarifierungsdienstes hervorgegangene Problemstellung ist unseres Wissens jedoch neu (wenn auch verwandt mit früheren Ansätzen; vgl. z. B. «Die technische Behandlung der gestaffelten multiplikativen Übersterblichkeit» von H. Jecklin, MVSVM 45, p. 415); obschon die vorgeschlagene Lösung vor allem dem Praktiker dient, dürften die verwendeten Approximationen und Schlussfolgerungen auch den Theoretiker interessieren.

2. Problemstellung

Es bezeichne ΔP_m die während m Jahren zahlbare Extraprämie (in Promille des anfänglichen Risikokapitals R), die der Versicherte auf Grund seiner erhöhten Sterblichkeit $q^*_{x+t} = q_{x+t} + \Delta q_{x,t}$ zu entrichten hat. Dabei bedeute q_{x+t} die während der ganzen Dauer gültige «Basissterblichkeit» (z. B. die normale Sterblichkeit q'_{x+t} oder eine multiplikativ erhöhte Anormalensterblichkeit $(1+\alpha)\, q'_{x+t}$); $\Delta q_{x,t}$ ist die während genau m Jahren wirkende Extrasterblichkeit, $\Delta q_{x,t} > 0$ für $t = 0, 1, \ldots, m-1$. In der heutigen Tarifikation anormaler Risiken treten solche temporäre Extraprämien sehr häufig auf, wie z. B. ein Blick in die modernen «Rating Manuals» amerikanischer Gesellschaften zeigt. Die Extraprämie beträgt gewöhnlich $5\,^0/_{00}$, $7{,}5\,^0/_{00}$, oder seltener $10\,^0/_{00}$ und $15\,^0/_{00}$; die Dauer m variiert zwischen 1 und 5 Jahren.

Trotz der wohlbekannten Problematik einer Reduktion des Versicherungsschutzes gerade dann, wenn das Sterberisiko erhöht ist, scheint es in der Praxis aus verschiedenen Gründen oft erwünscht, solche temporäre Extraprämien in gleichwertige Summenstaffelungen von gleicher Dauer umzuwandeln. Es wird deshalb eine einfache Näherungsformel gesucht, die gestattet, die entsprechende Kürzung direkt als Funktion der Extraprämie ΔP_m — und nicht der expliziten, meist nur ungenau bekannten Übersterblichkeit Δq — anzugeben, falls dies überhaupt möglich ist.

3. Voraussetzungen

Bezeichnet λ_t, $t = 0, 1, \ldots, m-1$, den Betrag (in Promille des anfänglichen Risikokapitals R), um den die Versicherungssumme im $(t+1)$-ten Versicherungsjahr gekürzt werden soll, so besteht zwischen ΔP_m und λ_t die Beziehung

$$\Delta P_m \, \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|} = \frac{1}{D^*_x} \sum_{t=0}^{m-1} C^*_{x+t} \, \lambda_t , \tag{1}$$

wobei sich die mit * bezeichneten Grössen auf die Sterblichkeit $q^*_{x+t} = q_{x+t} + \Delta q_{x,t}$ beziehen. Für die Extraprämie ΔP_m gilt exakt:

$$\Delta P_m = \frac{1}{\ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \sum_{t=0}^{m-1} v \, \Delta q_{x,t} \, R_{x+t} \, \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x} , \tag{2}$$

worin R_{x+t} das Risikokapital der betreffenden Versicherung im $(t+1)$-ten Versicherungsjahr bedeutet. Nun ist es aber sinnlos, genauer rechnen zu wollen, als die medizinisch-statistischen Grundlagen es gestatten: In praxi (cf. die erwähnten «Rating Manuals») wird stets eine von Alter und Kombination unabhängige Extraprämie erhoben. ΔP_m wird dann von der Kombination unabhängig, wenn das Risikokapital R_{x+t} konstant angenommen wird; dies ist für den Grossteil der geläufigen Kombinationen desto besser erfüllt, je kleiner m im Verhältnis zur Versicherungsdauer ist. Wir machen deshalb im folgenden stets die

Voraussetzung I:

$$R_{x+t} \underset{x}{\equiv} R = 1, \quad t = 0, 1, \ldots, m-1,$$

und somit

$$\Delta P_m = \frac{1}{\ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \sum_{t=0}^{m-1} v \, \Delta q_{x,t} \, \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x} , \tag{3}$$

(wobei $R = 1$ offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern nur eine Normierung bedeutet).

Weiter wird $\Delta P_{m=1}$ nur dann altersunabhängig, wenn $\Delta q_{x,0}$ konstant angenommen wird, was von vorneherein die Hypothese einer multiplikativen Übersterblichkeit (ob konstant oder abnehmend) ausschliesst. Wir betrachten deshalb im folgenden nur die zwei (auch medizinisch vernünftigen) Fälle:

Voraussetzung IIa:

$$\Delta q_{x,t} \underset{x}{\equiv} \Delta q, \quad t = 0, 1, \ldots, m-1;$$

Voraussetzung IIb:

$$\Delta q_{x,t} \underset{x}{\equiv} \frac{m-t}{m} \Delta q, \quad t = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Man bemerkt, dass die Altersunabhängigkeit von (2) unter Voraussetzung I und IIa exakt erfüllt ist, unter Voraussetzung I und IIb dagegen in guter Näherung (da die Gewichte $\frac{D^*_{x+t}}{D^*_x \ddot{a}^*_{x:\overline{m|}}}$ für kurze Dauern m nicht allzustark mit dem Alter variieren).

Was den Abzug λ_t anbetrifft, kann man z.B. im Falle IIa $\lambda_t = \lambda_0$, und im Falle IIb $\lambda_t = \lambda_0 \frac{m-t}{m}$ setzen; jedoch auch im letztern Fall ist eine konstante Reduktion vertretbar, denn es wird ja, als Alternative zur Staffelung, auch eine konstante und nicht eine mit dem jährlichen Risiko variierende Extraprämie erhoben. Wir betrachten deshalb das Problem ganz allgemein unter

Voraussetzung IIIa:

$$\lambda_t \underset{t}{\equiv} \lambda_0, \quad \text{sowie unter}$$

Voraussetzung IIIb:

$$\lambda_t = \lambda_0 \frac{m-t}{m}, \quad t = 0, 1, \ldots, m-1.$$

4. Näherungsformeln für λ_0

Aus (1) folgt

$$\lambda_0 = \frac{\Delta P_m}{\sum_{t=0}^{m-1} v(q_{x+t} + \Delta q_{x,t}) \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x \ddot{a}^*_{x:\overline{m|}}} \frac{\lambda_t}{\lambda_0}}, \tag{4}$$

woraus sich mit (3) und Voraussetzung IIIa (konstante Kürzung) ergibt

$$\lambda_0^{\mathrm{III\,a}} = \frac{\Delta P_m}{\sum_{t=0}^{m-1} v\, q_{x+t} \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x\, \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} + \Delta P_m}. \tag{5}$$

In erster Näherung ergibt die Summe im Nenner die Jahresprämie für eine temporäre Todesfallversicherung (mit normaler Sterblichkeit); damit ist gezeigt, dass $\lambda_0^{\mathrm{IIIa}}$ nicht wesentlich von der Art und Inzidenz der Übersterblichkeit $\Delta q_{x,t}$, sondern nur von deren Agglomerat ΔP_m abhängt. (Dies wird auch ersichtlich, wenn der Nenner von (4), mit $\lambda_t = \lambda_0$, in $P^*(A^1_{x:\overline{m}|}) = P(A^1_{x:\overline{m}|}) + \Delta P(A^1_{x:\overline{m}|})$ umgeformt wird; werden die Reserven der temporären Todesfallversicherung vernachlässigt, so ist $\Delta P(A^1_{x:\overline{m}|}) = \Delta P_m$ und λ_0 somit von Δq nur mittels ΔP_m abhängig).

Aus (5) folgt nun weiter:

$$\lambda_0^{\mathrm{III\,a}} = \frac{\Delta P_m}{v\, q_{x+T} + \Delta P_m}, \quad 0 < T < m-1, \tag{6}$$

wobei für praktische Zwecke genügend genau

$$\boxed{\lambda_0^{\mathrm{III\,a}} \cong \frac{\Delta P_m}{v\, q_{x+\frac{m-1}{2}} + \Delta P_m}} \tag{7}$$

gesetzt werden darf (siehe Zahlenbeispiele Abschnitt 5).

Für die linear abnehmende Kürzung (Voraussetzung IIIb) zerlegen wir den Nenner von (4) in die beiden Summen

$$S_1 = \sum v\, q_{x+t} \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x\, \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \frac{m-t}{m} \quad \text{und} \quad S_2 = \sum v\, \Delta q_{x,t} \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x\, \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \frac{m-t}{m}.$$

Auf S_1 wenden wir in beiden Fällen IIa und IIb die Näherung

$$S_1 = \frac{m+1}{2m} \sum v\, q_{x+t} \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x\, \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} = \frac{m+1}{2m} v\, q_{x+T}$$

an, welche umso genauer ausfällt, je kleiner $\dfrac{q_x D^*_x - q_{x+m-1} D^*_{x+m-1}}{q_x D^*_x}$ ist.

Wieder werden wir hier $T = \dfrac{m-1}{2}$ setzen dürfen.

Analog erhält man für S_2 im Falle IIa

$$S_2 \cong \frac{m+1}{2m} \Delta P;$$

im Falle IIb dagegen ergibt sich mit den gleichen Mitteln:

$$S_2 = \sum v \Delta q \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \left(\frac{m-t}{m}\right)^2 \lesssim \frac{v \Delta q}{\ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6m^2},$$

$$\Delta P = \sum v \Delta q \frac{D^*_{x+t}}{D^*_x \ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \left(\frac{m-t}{m}\right) \lesssim \frac{v \Delta q}{\ddot{a}^*_{x:\overline{m}|}} \frac{(m+1)m}{2m},$$

und somit

$$S_2 \cong \frac{2m+1}{3m} \Delta P.$$

Fassen wir zusammen, so folgt also aus (4) im Falle der abnehmenden Kürzung IIIb (in etwas schlechterer Näherung als (7), vgl. Zahlenbeispiele Abschnitt 5):

für konstante Extrasterblichkeit

$$\boxed{\lambda_0^{\mathrm{IIIb,\,IIa}} \cong \frac{2m}{m+1} \frac{\Delta P_m}{v\, q_{x+\frac{m-1}{2}} + \Delta P_m}} \tag{8}$$

für linear abnehmende Extrasterblichkeit

$$\boxed{\lambda_0^{\mathrm{IIIb,\,IIb}} \cong \frac{m \Delta P_m}{\frac{m+1}{2} v\, q_{x+\frac{m-1}{2}} + \frac{2m+1}{3} \Delta P_m}} \tag{9}$$

Man bemerkt, dass (7), (8) und (9) für $m = 1$ den exakten Wert

$$\lambda_0 = \frac{\Delta P_1}{v(q_x + \Delta q)}, \quad \Delta P_1 = v \Delta q, \tag{10}$$

liefern. Weiter schliesst man aus (8) und (9), da der erstjährige Abzug nicht grösser als 1 werden kann, dass die Konversion der temporären Extraprämie in eine linear abnehmende Kürzung dann und nur dann möglich ist, wenn ΔP_m kleiner als die Schranke $M_{m,\bar{x}}$, $\bar{x} = x + \frac{m-1}{2}$, ausfällt:

m	$M_{m,\bar{x}} \cong \frac{m+1}{m-1} v q_{\bar{x}}$ im Falle IIa	$M_{m,\bar{x}} \cong \frac{3}{2} \frac{m+1}{m-1} v q_{\bar{x}}$ im Falle IIb
1	∞	∞
2	$3 v q_{\bar{x}}$	$\frac{9}{2} v q_{\bar{x}}$
3	$2 v q_{\bar{x}}$	$3 v q_{\bar{x}}$
4	$\frac{5}{3} v q_{\bar{x}}$	$\frac{5}{2} v q_{\bar{x}}$
5	$\frac{3}{2} v q_{\bar{x}}$	$\frac{9}{4} v q_{\bar{x}}$

Die Umwandlung in eine konstante Kürzung dagegen ist in jedem Falle möglich, wie auch aus (6) hervorgeht.

5. Beispiele

Ausgehend von der Tafel SM 48–53, 3%, $x = 40$, $m = 5$ (für kürzere Dauern werden die Näherungen nur besser!), haben wir im folgenden die exakten und angenäherten Werte entsprechend (7), (8) und (9) zusammengestellt (alle Werte in Promille). Für die konstante Übersterblichkeit wurden die Werte so angenommen, dass die gleichen Extraprämien ΔP_m wie für die abnehmende Sterblichkeit resultieren.

	Konstante Reduktion		Abnehmende Reduktion	
Δq_t, Extrasterblichkeit	9,26	$\left(1 - \frac{t}{5}\right) 15$	4,61	$\left(1 - \frac{t}{5}\right) 7{,}5$
ΔP_5, Extraprämie	8,99	8,99	4,48	4,48
λ_0 exakt	707	707	909	813
λ_0 approximativ nach (7), (8), (9)	708	708	913	814
Fehler in % von λ_0 exakt . . .	0,1	0,1	0,4	0,1

Hieraus ergeben sich folgende Bemerkungen:

Der bei konstanter Reduktion vorzunehmende Abzug ist in der Tat von der Hypothese einer konstanten oder fallenden Übersterblichkeit praktisch unabhängig.

Für die Grösse der abnehmenden Kürzung bewirken in diesem Beispiel die verschiedenen Übersterblichkeitshypothesen einen Unterschied von mehr als 10%; gibt die medizinische Sachlage zu Zweifel über die anzuwendende Hypothese Anlass, so soll eine konstante Reduktion vorgenommen werden, da hier die benützte Hypothese irrelevant ist.

In Anbetracht der notwendigerweise der medizinischen Einschätzung und der mathematischen Basis der Extraprämie inhärenten Ungenauigkeiten sind die Näherungen (7), (8), (9) mehr als genügend; um die in der Praxis üblichen runden Versicherungsbeträge zu erhalten, müssen die Kürzungen ohnehin zweckmässig auf- oder abgerundet werden.