Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 57 (1957)

Artikel: Reserveberechnung nach t-Gruppen

Autor: Jecklin, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550726

B

Wissenschaftliche Mitteilungen

Reserveberechnung nach t-Gruppen

Von *H. Jecklin*, Zürich

Herrn Prof. W. Saxer zum 60. Geburtstag

Seit längerer Zeit hat sich der Verfasser mit dem Problem der globalen Reserveberechnung nach Gruppen gleicher abgelaufener Dauer t beschäftigt. In der Tat erscheint eine Gruppierung der Policen nach gleicher verflossener Dauer sinnvoll und zweckmässig. Auf diese Weise bleiben die Versicherungen gleichen Zugangsjahres in einer Gruppe, d. h. in natürlicher Zusammenfassung, beisammen, und es wird die fortlaufende Numerierung der Policen nicht durch eine Aussortierung und Gruppierung nach anderen Gesichtspunkten, wie z. B. Geburtsjahr oder restliche Versicherungsdauer, gestört. Es lassen sich zudem die Gruppen der einzelnen Zugangsjahre in ihrer Fortentwicklung einfach verfolgen, was insbesondere auch bezüglich der Stornostatistik und der Gewinnbeteiligungsprobleme wertvoll ist.

Bei seinen Untersuchungen wurde Verfasser vielfach durch Mitarbeiter (insbesondere H. Zimmermann, P. Strickler, W. Leimbacher) wesentlich unterstützt. In der vorliegenden Arbeit soll in kurzer Zusammenfassung ein Überblick über das Erreichte gegeben, und es sollen des weiteren neue Möglichkeiten erwähnt werden. Dabei haben wir uns mehr auf die Belange der Praxis ausgerichtet, es darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass sich im Zusammenhang mit den verschiedenen Reserveberechnungsmöglichkeiten auch sehr interessante theoretische Aspekte ergeben haben und sich sicher auch weiterhin ergeben werden.

Zwecks numerischer Illustration der folgenden Ausführungen haben wir in Tabelle I des Anhanges ad hoc eine Gruppe von zehn gemischten Versicherungen mit unterschiedlichem Eintrittsalter x, verschiedener Versicherungsdauer n und ungleicher Versicherungssumme S zusammengestellt. Alle Rechnungsbeispiele betreffen diese Gruppe, und als

Rechnungsgrundlage wurde durchwegs die schweizerische Volkssterbetafel S.M. 1939/1944 zu $2\frac{1}{2}\%$ verwendet. Die einzelne Versicherung markieren wir mit dem Index i.

Alle nachfolgend behandelten Methoden sind approximative Verfahren. Sie liefern also, im Gegensatz etwa zur Altenburgerschen Hilfszahlenmethode, nicht das genaue Total der die Gruppe bildenden Einzelreserven, sondern einen Näherungswert. In Tabelle IV des Anhanges haben wir die Globalreserven unserer Beispielgruppe der Tabelle I nach den verschiedenen Methoden für $t = 5, 10$ und 15 zusammengestellt.

1. *t*-Methode

Diese Methode bildet gewissermassen das Gegenstück zur Lidstoneschen Z-Methode. Bei letzterer wird nach gleicher restlicher Versicherungsdauer gruppiert, bei der t-Methode nach gleicher verflossener Dauer. Sodann basiert die Z-Methode auf der prospektiven Reserveformel, die t-Methode dagegen auf der retrospektiven Reserveformel. Beiden Methoden aber ist gemeinsam, dass auf ein durchschnittliches Alter der Versicherten abgestellt wird. Als globale Reserveformel einer t-Gruppe haben wir:

$$\sum^{i} S_{i\,t}V_i \sim \frac{N_{\bar{x}} - N_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum^{i} S_i P_i - \frac{M_{\bar{x}} - M_{\bar{x}+t}}{D_{\bar{x}+t}} \sum^{i} S_i \,.$$

In dieser Formel, welche keiner langatmigen Erklärungen bedarf, bezeichnet S die Versicherungssumme, P der Prämiensatz pro Summeneinheit, $\bar{x}$ das durchschnittliche Eintrittsalter der Gruppe, welch letzteres in jedem Reserveberechnungszeitpunkt t neu zu bestimmen ist. Das Hauptproblem liegt hier in der Bestimmung des Durchschnittsalters $\bar{x}$.

Bei nach Makeham ausgeglichenen Sterbetafeln kann $\bar{x}$ gewonnen werden aus der Bestimmungsgleichung

$$c^{\bar{x}} \sum^{i} S_i = \sum^{i} S_i \, c^{x_i} \,.$$

Wie Verfasser dargelegt hat [1], ist es jedoch keineswegs nötig, dass Makehamsche Tafelausgleichung vorliegt. Sofern die Sterbenswahrscheinlichkeiten für das in Betracht fallende Intervall der Eintrittsalter monotonen Verlauf haben, kann $\bar{x}$ bestimmt werden aus

$$q_{\bar{x}} \sum^{i} S_i = \sum^{i} S_i \, q_{x_i} \,.$$

Andernfalls kann man auf einfache Weise eine Hilfsfunktion $g(x)$ konstruieren, welche die Bestimmung von $\bar{x}$ erlaubt aus der Gleichung

$$g(\bar{x}) \sum^{i} S_i = \sum^{i} S_i \, g(x_i) \,.$$

Wir haben seinerzeit eine Tabelle der Hilfsfunktion $g(x)$ auf Basis der Sterbetafel S.M. 1933/1937 berechnet [2]; diese Tafel lässt sich aber bedenkenlos auch verwenden, wenn als Rechnungsgrundlage eine ähnliche moderne Tafel benutzt wird. Wir haben daher genannte Tabelle für unser Zahlenbeispiel benutzt; die nötigen Einzeldaten für die Anwendung der t-Methode finden sich in Tabelle II des Anhanges, und es ergibt sich daher zur Berechnung von $\bar{x}$ in unserem Falle

$$g(\bar{x}) = \frac{2506{,}8}{390\,000} = 6{,}43\,{}^0/_{00}\,,$$

was bei Nachschlagen in besagter Tabelle [2] einem $\bar{x} = 42{,}5$ entspricht.

Bei der t-Methode kann eine Gruppe gemischte Versicherungen, Erlebensfallversicherungen, temporäre und lebenslängliche Todesfallversicherungen umschliessen. Die Methode wurde insbesondere von H. Ruch und von W. Maurer weiter ausgebaut und verfeinert [3], hat sich in der Praxis bestens bewährt und wird auch durch Lehrbücher vermittelt [4]. Notwendig zu ihrer Handhabung ist, dass pro Einzelversicherung die Versicherungssumme S_i, die Prämie $S_i P_i$ und ein Hilfswert $S_i\, g(x_i)$ bekannt sind (bei Abwandlung der Methode [3] eventuell noch ein zweiter Hilfswert).

2. *F*-Methode

Dieses Verfahren basiert auf der Tatsache, dass sich finanz-mathematische und versicherungstechnische Funktionen besonders gut für die hyperbolische Interpolation eignen [5]. Es wird davon ausgegangen, dass die Reservekurve der Einzelversicherung sich genähert interpolieren lasse durch den Ast einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten. Wir haben dann die Approximation

$${}_tV_{x\overline{n}|} \sim \frac{t}{F\,n - (F-1)\,t}\,.$$

Hiebei ist F eine Konstante, die sich aus einer Reserveposition ${}_\alpha V_{x\overline{n}|}$ mit $0 < \alpha < n$ bestimmen lässt nach der Relation

$$F = \frac{(1 - {}_\alpha V)\,\alpha}{{}_\alpha V\,(n-\alpha)}\,,$$

was sich für $\alpha = \dfrac{n}{2}$ vereinfacht zu $F = \dfrac{1}{{}_\alpha V} - 1\,.$

Für eine Gruppe von Versicherungen mit gleicher abgelaufener Dauer t haben wir demnach

$$\sum^i S_{i\,t}V_i = \sum^i \frac{t\,S_i}{F_i\,n_i - t(F_i - 1)},$$

was sich nach Einführung der Hilfsgrössen $\frac{1}{F\,n} = G$ und $\frac{F-1}{(F\,n)^2} = H$ überführen lässt in die Näherung

$$\sum^i S_{i\,t}V_i \sim \frac{t\sum^i S_i\,G_i}{1 - t\,\frac{\sum^i S_i\,H_i}{\sum^i S_i\,G_i}}.$$

Bezüglich der näheren Begründung dieser Approximationsformel verweisen wir auf frühere Publikationen in dieser Zeitschrift [6] und auf anderweitige Literatur [7]. Doch wollen wir festhalten, dass bei der F-Methode von zwei wesentlich verschiedenen Approximationsmöglichkeiten Gebrauch gemacht wird; einmal wird die Einzelreserve approximiert, und sodann ist die Globalreserve ein genähertes Total der approximativen Einzelreserven. Die Tatsache, dass die F-Methode trotzdem ganz ausgezeichnet funktioniert, hat zu sehr interessanten theoretischen Untersuchungen Anlass gegeben [8].

Für die praktische Anwendung der F-Methode ist notwendig, dass pro Einzelversicherung die zwei Hilfswerte $S_i G_i$ und $S_i H_i$ bekannt sind. Bezüglich unseres Rechenbeispieles sind diese Daten in Tabelle II zusammengestellt.

Man könnte die F-Methode ein Analogieverfahren nennen. In der Tat operiert man nicht mit versicherungstechnischen Funktionen, sondern mit Hilfsmitteln der analytischen Geometrie und der Analysis. Aus diesem Grunde kann bei der F-Methode eine Versicherungsgruppe gleicher verflossener Dauer t ganz beliebig zusammengesetzt sein bezüglich der verwendeten Sterbetafeln, des technischen Zinsfusses, der Eintrittsalter x, der Versicherungsdauern n und weitgehend auch bezüglich der Versicherungskombinationen. In dieser Hinsicht ist die F-Methode ganz ausserordentlich leistungsfähig und dürfte kaum von einem andern Verfahren geschlagen werden.

Ein weiterer Vorteil der F-Methode gegenüber den hier besprochenen Methoden besteht darin, dass sie sowohl für Berechnung von Einzelals von Gruppen-Reserven geeignet ist.

3. Φ-Methode

Es handelt sich hiebei um eine Abwandlung der F-Methode. Der Gedanke liegt nahe, bei einigermassen stabilen Reservegruppen den in der Globalformel der F-Methode auftretenden Quotienten $\dfrac{\sum_i S_i H_i}{\sum_i S_i G_i}$, der eigentlich jährlich zu bilden wäre, ein für allemal durch einen Durchschnittswert Φ zu ersetzen. Verfasser hat auf diese Eventualität bereits früher hingewiesen [9]. In einer unveröffentlichten Diplomarbeit der Universität Rom hat G. Bruckmann Plausibilitätserwägungen für die Quasikonstans dieses Wertes Φ angestellt. Die Frage kann endgültig nur durch empirische Erfahrungen geklärt werden. Bei der Schweizerischen Rückversicherungs-Gesellschaft werden die Reserven des Neuzuganges ab 1951 nach der F-Methode ermittelt, und es hat sich gezeigt, dass bei den einzelnen t-Gruppen der Wert des vorgenannten Quotienten von Jahr zu Jahr nur ganz unbedeutenden Schwankungen unterliegt. Es wäre demnach wohl möglich, die Globalreserve einer t-Gruppe nach folgender Formel zu berechnen:

$$\sum_i S_{i\,t}V_i \sim \frac{t}{1-t\Phi} \sum_i S_i G_i ,$$

wobei die $S_i G_i$ die gleichen Hilfswerte sind wie bei der F-Methode. Nun erhebt sich jedoch die Frage, wie dieser Φ-Wert einfach bestimmt werden kann. Die Bestimmungsmethode soll nicht nur einfach und hinreichend genau sein, sie soll auch erlauben, in beliebigen Zeitabständen zu prüfen, ob der Wert beibehalten werden kann oder zu korrigieren ist. Die Lösung kann vor allem nicht darin bestehen, den Quotienten $\dfrac{\sum_i S_i H_i}{\sum_i S_i G_i}$ einmal zu bestimmen und in der Folge als Φ-Wert beizubehalten. Denn wenn die Hilfswerte $S_i H_i$ schon bekannt sind, dann wäre nicht einzusehen, weshalb sie nicht weiterhin verwendet werden sollten.

Man kann vorgenannten Quotienten als eine mit den Gewichten $S_i G_i$ gewogene Mittelbildung der Grössen $\dfrac{F_i - 1}{F_i n_i}$ auffassen, denn es ist

$$\frac{\sum SH}{\sum SG} = \frac{\sum S \dfrac{F-1}{(Fn)^2}}{\sum SG} = \frac{\sum SG \dfrac{F-1}{Fn}}{\sum SG} .$$

Man kann sodann annehmen, dass bei nicht ganz abenteuerlicher Zusammensetzung einer t-Gruppe dieser Mittelwert nicht stark ändert, wenn anstelle der Gewichte $S_i G_i$ einfach die S_i gesetzt werden; dann hat man

$$\Phi = \frac{\sum^i S_i H_i}{\sum^i S_i G_i} \sim \frac{\sum S \frac{F-1}{Fn}}{\sum S} = \frac{\sum^i \frac{S_i}{n_i} - \sum^i S_i G_i}{\sum S_i}.$$

Die Hilfswerte $S_i H_i$ sind also hier nicht mehr vonnöten, dagegen braucht man die Grössen $\frac{S_i}{n_i}$. Für unser Rechenbeispiel sind diese Grössen in Tabelle III notiert. Wir erhalten numerisch:

$$\Phi \sim \frac{19\,937 - 15\,218{,}8}{390\,000} = 12{,}1\,^0/_{00},$$

wogegen der genaue Φ-Wert nach den Angaben der Tabelle II

$$\Phi = \frac{185{,}765}{15\,218{,}18} = 12{,}206\,^0/_{00}$$

betragen würde. Bei unserem zahlenmässigen Beispiel für die Φ-Methode haben wir mit $\Phi = 12{,}1\,^0/_{00}$ gerechnet.

Wenn man in der Praxis neben jedem Hilfswert $S_i G_i$ noch den Wert $\frac{S_i}{n_i}$ festhalten wollte, so käme das darauf hinaus, anstelle des Hilfswertes $S_i H_i$ einen andern, allerdings einfacheren einzuführen. Das ist jedoch nicht nötig; es ist keine grosse Sache, innerhalb einer Gruppe die Summen der Versicherungen gleicher Dauer n, bezeichnen wir sie mit $S_{i,n}$, zu Subtotalen $\sum^i S_{i,n}$ zusammenzufassen, und es ist dann in symbolischer, aber ohne weiteres verständlicher Darstellung

$$\sum^i \frac{S_i}{n_i} = \sum^n \frac{1}{n} \sum^i S_{i,n}.$$

Dabei umfasst also die Summierung $\sum^n$ nur so viele Summanden, als verschiedene Versicherungsdauern n in der Gruppe vorhanden sind.

Ein anderes Prozedere zur Bestimmung eines approximierten Φ-Wertes stützt sich auf den Gedanken, auf den Wert $\frac{H}{G}$ abzustellen, welcher der die t-Gruppe repräsentierenden Durchschnittskombination entspricht. Zu diesem Zwecke muss man das durchschnittliche Eintrittsalter $\bar{x}$ und die durchschnittliche Dauer $\bar{n}$ kennen. Was das erstere anbetrifft, ist in diesem Falle eine zu grosse Genauigkeit nicht vonnöten, da die Reservekurven, zumindest bei gemischten Versicherungen, für gleiche Dauer n, aber ungleiches x, nicht stark differieren. Man kann daher in gewichteter arithmetischer Mittelung setzen

$$\bar{x} = \frac{\sum^i S_i\, x_i}{\sum^i S_i}.$$

Ein analoges Vorgehen zur Ermittelung von $\bar{n}$ würde jedoch zu ganz unbrauchbaren Resultaten führen. Wir greifen zurück auf den Grundgedanken der F-Methode und setzen voraus, dass sich die Reserven durch gleichseitige Hyperbeln darstellen lassen. Wollen wir die t-Gruppe durch eine Durchschnittskombination repräsentieren, so muss gelten

$$\frac{t}{\bar{F}\,\bar{n} - (\bar{F}-1)\,t} \sum^i S_i = \sum^i \frac{t\,S_i}{F_i\, n_i - (F_i - 1)\,t}.$$

Die durchschnittliche Dauer $\bar{n}$ ändert sich kaum, wenn die Reserven linear ansteigen. Bei linearem Anstieg ist aber $F = 1$, und die Gleichung reduziert sich auf

$$\frac{1}{n} \sum^i S_i = \sum^i \frac{S_i}{n_i}, \text{ also ist } \bar{n} = \frac{\sum^i S_i}{\sum^i \frac{S_i}{n_i}},$$

d. h. $\bar{n}$ ist das mit den Summen gewichtete harmonische Mittel der n_i.

Die Grösse $\frac{\sum^i S_i}{n_i}$ kennen wir bereits, und für unser Rechenbeispiel haben wir

$$\bar{n} = \frac{390\,000}{19\,937} = 19{,}56.$$

Für das zugehörige $\bar{x}$ erhalten wir in vorgenannter gewichteter arithmetischer Mittelbildung

$$\bar{x} = \frac{16\,090\,000}{390\,000} = 41{,}26 \sim 41.$$

Nun ist nach den hier von uns verwendeten Grundlagen für eine gemischte Versicherung

x	n	$G\,^0/_{00}$	$H\,^0/_{00}$	$\frac{H}{G}$
41	19	40,42	0,4935	0,01221
41	20	38,03	0,4553	0,01197

Interpoliert auf $n = 19{,}56$ ergibt sich $\Phi \sim \frac{H}{G} = 12{,}1\,^0/_{00}$, also der gleiche Wert wie beim erstgenannten Verfahren.

Um entscheiden zu können, welchem Verfahren zur Bestimmung des Φ-Wertes der Vorzug zu geben ist, bedarf es weiterer Untersuchungen. Es will uns scheinen, dass das zweite Verfahren den Vorzug verdient.

Die Φ-Methode hat gegenüber der F-Methode den Vorteil, dass, wie erwähnt, pro Police mit einem einzigen Hilfswert, und zwar dem gleichen $S_i G_i$ wie bei der F-Methode, auszukommen ist. Dagegen müssen, wegen des Φ-Wertes, alle Versicherungen einer Gruppe auf gleichen Grundlagen basieren, was praktisch zumeist ohnehin der Fall ist.

Noch auf einen wesentlichen Punkt ist hinzuweisen. Bei der F-Methode haben wir approximierte Einzelreserven und approximierte Summenbildung derselben. Bei der Φ-Methode ist die Summenbildung exakt, dafür zeigen die Einzelreserven grössere Abweichungen gegenüber ihren genauen Werten als bei der F-Methode. Das kommt eben daher, dass anstelle der individuellen Quotienten $\frac{H_i}{G_i}$ mit dem Durchschnittswert Φ gerechnet wird. Die Φ-Methode kann also zur Berechnung von Einzelreserven nicht in Frage kommen, dafür ist sie einfacher für die globale Berechnung.

4. φ-Methode

Es liegt kein zwingender Grund vor, sich bei der Approximation von Reservekurven auf gleichseitige Hyperbeln zu beschränken. So kann man, in Superposition einer Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel, den Ansatz machen [9]

$$_tV_{\overline{xn}|} \sim t\,\frac{1-C}{n} + C\left(\frac{1}{n} - \varphi\right)\frac{t}{1-\varphi t},$$

nach welcher Formel, wenn einmal die Konstanten C und φ aus zwei Reservepositionen bestimmt sind, sich ausgezeichnete Näherungen der Einzelreserve ergeben [10]. Dagegen zeitigt der Ausbau zu einem Globalverfahren in Analogie zur F-Methode keine befriedigenden Resultate.

Wenn dagegen φ nicht eine die Einzelreserve charakterisierende Konstante, sondern vielmehr ein pro t-Gruppe gültiger Durchschnittswert sein soll, so kann man eine Globalformel aufstellen von folgender Gestalt [11]:

$$\sum^i S_{i\,t}V_i \sim t \sum^i S_i g_i + \frac{t}{1-\varphi t} \sum^i S_i h_i,$$

wobei

$$g_i = \frac{1-C_i}{n_i}, \quad h_i = C_i\left(\frac{1}{n_i} - \varphi\right), \quad C = \frac{1-\varphi\alpha}{\varphi\alpha(n-\alpha)}(\alpha - n_\alpha V).$$

Die φ-Methode steht und fällt mit einer guten Wahl des Wertes φ, was jedoch keine ganz einfache Sache ist. P. Strickler hat diesbezügliche Untersuchungen veröffentlicht [11], und es kann als Faustregel gelten $\varphi = \frac{i}{3} + 0{,}005$, wenn i der technische Zinssatz ist. Bei den für unser Rechenbeispiel gewählten Grundlagen ist $i = 0{,}025$, also wäre $\varphi \sim 13{,}5$ Promille zu setzen. Genauerweise muss aber φ auch von der Verteilung der Eintrittsalter und Versicherungsdauern abhängig sein, man muss sich aber vor zu hoher Ansetzung von φ hüten. Für unser numerisches Beispiel, für welches die Daten aus Tabelle III zu ersehen sind, scheint in Anbetracht des eher hohen durchschnittlichen Eintrittsalters die Wahl $\varphi = 15\,^0/_{00}$ als angemessen.

Die Approximation der Einzelreserven kann nach der φ-Methode naturgemäss nicht so gut sein wie bei der F-Methode, eben weil φ ein Durchschnittswert ist. Dafür stellt die Globalreserve, wie bei der Φ-Methode, das exakte Total der genäherten Einzelreserven dar. Anderseits tritt auch hier gegenüber der F-Methode die Einschränkung ein, dass alle Versicherungen einer t-Gruppe auf gleichen Rechnungsgrundlagen basieren müssen.

In Zusammenhang mit der φ-Methode haben sich sehr interessante theoretische Fragen ergeben, welche möglicherweise auch für die Praxis nicht bedeutungslos sind. Da ist einmal die Frage, ob es möglich ist, Sterbetafeln so auszugleichen, dass die Reservekurven zwangsläufig Hyperbeln sind [12]. Von dieser Frage ausgehend hat Verfasser gezeigt, dass es unter gewissen Voraussetzungen sogar möglich ist, Globalreserven in praktisch genügender Genauigkeit zu approximieren ohne Benützung von Kommutationszahlen oder Sterbetafel, allein mit Hilfe einfacher algebraischer Formeln [10]. In nahem Zusammenhang mit diesen Theoremen steht sodann die Frage der Darstellbarkeit der Leibrenten durch Zeitrentenwerte, welche bereits Anlass zu hochinteressanten Untersuchungen gegeben hat [13].

5. *n*-Methode

Der F-Methode und mit ihr verwandten Verfahren wird möglicherweise mancherseits ein gewisses Misstrauen entgegengebracht, wenn auch ganz zu Unrecht, weil hier die altvertrauten Pfade der klassischen Versicherungstechnik verlassen werden. Die t-Methode, wiewohl auf klassischem Boden stehend, basiert auf der retrospektiven Reserveformel, wogegen vielfach nur die prospektive Berechnungsweise als voll kreditwürdig erachtet wird. Hier tritt, gewissermassen als Dienst am Kunden, die n-Methode in die Lücke; sie geht von der klassischen prospektiven Reserveformel aus, bei Gruppierung nach gleicher verflossener Dauer t. Dies ist aber nur möglich, wenn ausser auf ein durchschnittliches Alter $\bar{x}$ auch noch auf eine durchschnittliche Versicherungsdauer $\bar{n}$ abgestellt wird. Als globale Reserveformel haben wir dann:

$$\sum^i S_i\,{}_tV_i \sim A_{\bar{x}+t,\overline{\bar{n}-t}|} \sum^i S_i - \ddot{a}_{\bar{x}+t,\overline{\bar{n}-t}|} \sum^i S_i P_i =$$
$$= \sum^i S_i - \left(d \sum^i S_i + \sum^i S_i P_i\right) \ddot{a}_{\bar{x}+t,\overline{\bar{n}-t}|}.$$

Bezüglich der Ermittlung des Durchschnittsalters $\bar{x}$ und der Durchschnittsdauer $\bar{n}$ erübrigen sich weitere Ausführungen; $\bar{x}$ wird mittels Hilfswerten $g(x)$ bestimmt, wie bei der t-Methode, und $\bar{n}$ ist das mit den Summen gewichtete harmonische Mittel der n_i, wie wir ihm bei der Bestimmung des Φ-Wertes begegnet sind. Für unser numerisches Beispiel (n-Methode I) ist darum $\bar{x} = 42{,}5$, $\bar{n} = 19{,}56$ gesetzt.

Übrigens ist unmittelbar einzusehen, dass die mittlere Versicherungsdauer $\bar{n}$ einer t-Gruppe durch harmonische Mittelbildung bestimmt werden muss. Denn bei linearem Anstieg ist die Reserve einer Versicherung im Zeitpunkt t offenbar $t\dfrac{S_i}{n_i}$, also für eine Gruppe von Versicherungen unterschiedlicher Dauer $t\dfrac{\sum S_i}{\sum n_i}$. Soll dieses Reservetotal gleich sein der Reserve einer Police mit der Versicherungssumme $\sum S_i$ und einer mittleren Dauer $\bar{n}$, so muss gelten $t\sum\dfrac{S_i}{n_i} = t\dfrac{\sum S_i}{\bar{n}}$, d.h. $\bar{n}$ ist das gewogene harmonische Mittel der n_i. Der Durchhang der effektiven Reservekurven gegenüber linearem Anstieg ist bezüglich der mittleren Dauer kaum von Einfluss.

Wie aus der Globalformel ohne weiteres ersichtlich ist, ist die n-Methode in bezug auf die Zusammensetzung einer t-Gruppe die eingeschränkteste von allen vorbesprochenen Methoden. Jede Gruppe muss bezüglich Grundlagen und auch Versicherungsart (im vorliegenden Falle gemischte Versicherung) homogen sein.

Statt, wie in voriger Globalformel, auf den Rentenwert abzustellen, kann man sich auch direkt auf den der Durchschnittskombination entsprechenden Reservesatz stützen, also

$$\sum^i S_i \, {}_tV_i \sim {}_tV_{\overline{x},\overline{n}|} \sum^i S_i \, .$$

Für das numerische Beispiel (mit n-Methode II bezeichnet) haben wir wieder $\overline{x} = 42{,}5$, $\overline{n} = 19{,}56$ angesetzt.

Nun kann aber der Reservesatz bei gegebenem $\overline{n}$ für kleine Variation von $\overline{x}$ nicht stark ändern. So haben wir z. B. für

x	n	${}_5V_{x\overline{n}|}$	${}_{10}V_{x\overline{n}|}$	${}_{15}V_{x\overline{n}|}$
41	19,56	209,81 ‰	444,31 ‰	712,08 ‰
42	19,56	209,64 ‰	443,85 ‰	711,29 ‰
43	19,56	209,53 ‰	443,39 ‰	710,41 ‰

Das legt den Gedanken nahe, als $\overline{x}$ einfach das mit den Summen gewichtete arithmetische Mittel der x_i zu setzen. Für unser numerisches Beispiel ergibt dies, wie bereits bekannt, $\overline{x} = 41$. Mit diesem $\overline{x}$ und mit $\overline{n} = 19{,}56$ ergeben sich die in der Tabelle IV unter n-Methode III aufgeführten Resultate. Auf diese Art und Weise ist es möglich, das Reservetotal einer t-Gruppe ohne Mitführung irgendwelcher Hilfswerte sehr einfach zu ermitteln. Die arithmetische Mittelung der x_i lässt sich, wenn keine raffinierten Rechengeräte zur Verfügung stehen, zur Not mit Hilfe einer gewöhnlichen Additionsmaschine bewerkstelligen, und ebenso die harmonische Mittelung der n_i, wenn zur Arbeitserleichterung die Subtotale der Versicherungssummen von Policen gleicher Versicherungsdauer gebildet werden.

Es mag ein Zufall sein, dass in der Zusammenstellung unserer zahlenmässigen Beispiele in Tabelle IV die n-Methode III die besten Ergebnisse zeitigt, es möge aber auch ein gutes Omen sein. Auf jeden Fall scheint es uns wünschenswert, dass über die n-Methode weitere Untersuchungen angestellt werden. Dabei wären folgende Punkte zu klären:

a) Eignung anderer Kombinationen als gemischte Versicherung für die Methode;

b) Einfluss der Rechnungsgrundlagen (Sterbetafel, Zinsfuss);

c) Einfluss der Zusammensetzung einer t-Gruppe (Verteilung der S_i, der x_i und insbesondere der n_i).

Die Vornahme dieser Untersuchungen dürfte sich lohnen. Denn wenn sie zufriedenstellend ausfallen, so ist mit der n-Methode ein Reserveberechnungsverfahren in die Hand gegeben, das an Einfachheit nicht zu überbieten ist. In der letztangeführten Gestalt

$$\sum^i S_{i\,t}V_i \sim {}_tV_{\overline{\overline{x},\overline{n}}|} \sum^i S_i$$

kann ja die Globalreserve ohne Hilfswerte und ohne Prämiensumme gerechnet werden, und zwar nach frei zu wählenden Rechnungsgrundlagen. Änderung von Sterbetafel oder Zinsfuss in der Reserveberechnung eines bestehenden Portefeuilles würden überhaupt kein Problem bilden, geschweige irgendwelche zusätzliche Arbeit verursachen.

Literaturverzeichnis

[1] *H. Jecklin:* Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t-Methode. MVSVM, Band 42, Heft 1.

– Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit als Hilfsgrösse zur Bestimmung des technischen Durchschnittsalters von Personengruppen in der Lebensversicherung. Blätter für Versicherungsmathematik, Band 4, Heft 6.

[2] – Grundsätzliche Bemerkungen zur t-Methode. MVSVM, Band 49, Heft 2.

[3] *H. Ruch:* Eine Variation der t-Methode. MVSVM, Band 48, Heft 2, und Band 49, Heft 2.

W. Maurer und *M. Boss:* Eine verfeinerte t-Methode. MVSVM, Band 54, Heft 1.

[4] *E. Zwinggi:* Versicherungs-Mathematik, Birkhäuser, Basel 1945, S. 103–105.

W. Saxer: Versicherungs-Mathematik I, Springer, Berlin 1955, S. 120/121.

[5] *H. Jecklin* und *H. Zimmermann:* Eine praktische Interpolationsformel. MVSVM, Band 48, Heft 2.

[6] – Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation. MVSVM, Band 50, Heft 2.

– Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation (F-Methode). MVSVM, Band 51, Heft 1.

– Weitere Ergänzungen zur F-Methode der Reserveberechnung. MVSVM, Band 51, Heft 2.

[7] *W. Saxer:* Versicherungs-Mathematik I, Springer, Berlin 1955, S. 123–129.
M. T. L. Bizley und *A. E. Lacey:* Approximate Valuation of Life assurance and annuity contracts, University Press Cambridge 1954, S. 93–97.

[8] *D. Bierlein:* Optimalmethoden für die Summenapproximation in Jecklins *F*-Methode. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band II, Heft 3. 1955
C. Boehm: Vergleich der verschiedenen Methoden zur Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsbestandes. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band I, Heft 4.
E. Franckx: La méthode de Jecklin pour le calcul de réserves. Bull. de l'Ass. Royale des Act. Belges, N° 56.

[9] *H. Jecklin* und *P. Strickler:* Eine Variante zur *F*-Methode der Reserveberechnung. MVSVM, Band 54, Heft 1.

[10] *H. Jecklin:* Varia zur hyperbolischen Interpolation von Reservekurven. MVSVM, Band 56, Heft 1.

[11] *P. Strickler:* Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der φ-Methode. MVSVM, Band 54, Heft 2.

[12] *H. Jecklin:* Über die Möglichkeit, Sterbetafeln so auszugleichen, dass die Reservekurven generell hyperbolisch sind. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik. Band II, Heft 3.

[13] *H. Jecklin* und *W. Leimbacher:* Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte gestattet. MVSVM, Band 53, Heft 2.
P. Leepin: Sterbegesetze, welche eine exakte Darstellung der Leibrentenwerte durch Zeitrenten erlauben. MVSVM, Band 54, Heft 2.
E. Rufener: Sterbegesetze, für welche sich der Leibrentenwert durch Zeitrenten darstellen lässt. MVSVM, Band 54, Heft 2.
– Überlebensordnungen, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt. MVSVM, Band 55, Heft 3.

Anhang

Tabelle I

Portefeuille-Beispiel Rechnungsgrundlagen SM 39/44 à $2\frac{1}{2}$ %

x	n	S	${}_5V_{x\overline{n}\rvert}\,^0/_{00}$	${}_{10}V_{x\overline{n}\rvert}\,^0/_{00}$	${}_{15}V_{x\overline{n}\rvert}\,^0/_{00}$	$S\,{}_5V$	$S\,{}_{10}V$	$S\,{}_{15}V$
30	25	10 000	152,38	325,28	520,17	1 523,8	3 252,8	5 201,7
28	22	20 000	178,83	382,95	615,37	3 576,6	7 659,–	12 307,4
35	20	50 000	203,98	433,90	695,13	10 199,–	21 695,–	34 756,5
40	20	30 000	204,38	432,48	692,36	6 131,4	12 974,4	20 770,8
45	15	60 000	286,69	613,34	1 000,—	17 201,4	36 800,4	60 000,–
39	21	20 000	192,84	407,40	650,69	3 856,8	8 148,–	13 013,8
50	20	40 000	204,89	427,92	681,19	8 195,6	17 116,8	27 247,6
43	22	100 000	182,51	383,95	610,06	18 251,–	38 395,–	61 006,–
41	19	50 000	217,18	460,42	739,06	10 859,–	23 021,–	36 953,–
45	20	10 000	204,07	430,51	687,94	2 040,7	4 305,1	6 879,4
		390 000				81 835,3	173 367,5	278 136,2

Tabelle II

x	n	$P_{x\overline{n}\rvert}\,^0/_{00}$	$S\,P$	$g(x)\,^0/_{00}$	$S\,g(x)$	$G\,^0/_{00}$	$H\,^0/_{00}$	SG	SH
30	25	31,02	310,20	3,43	34,3	28,94	0,3200	289,4	3,200
28	22	35,82	716,40	3,22	64,4	33,87	0,3923	677,4	7,846
35	20	40,98	2 049,—	4,19	209,5	38,34	0,4471	1 917,–	22,355
40	20	42,31	1 269,30	5,50	165,–	38,09	0,4536	1 142,7	13,608
45	15	59,45	3 567,—	7,60	456,–	53,19	0,7167	3 191,4	43,002
39	21	39,85	797,—	5,18	103,6	35,92	0,4202	718,4	8,404
50	20	47,93	1 917,20	11,05	442,–	37,41	0,4709	1 496,4	18,836
43	22	39,60	3 960,—	6,64	664,–	33,87	0,3923	3 387,–	39,230
41	19	45,04	2 252,—	5,84	292,–	40,42	0,4935	2 021,–	24,675
45	20	44,49	444,90	7,60	76,–	37,81	0,4609	378,1	4,609
			17 283,—		2 506,8			15 218,8	185,765

Tabelle III

x	n	$S\,x\,10^{-4}$	$\frac{1}{n}\,{}^0/_0$	$\frac{S}{n}\,10^{-3}$	$g\,{}^0/_{00}$	$h\,{}^0/_{00}$	Sg	Sh
30	25	30	4	0,400	12,2856	17,3215	122,856	173,215
28	22	56	4,545	0,909	11,9056	22,4736	238,112	449,472
35	20	175	5	2,500	12,5435	26,2196	627,175	1 310,980
40	20	120	5	1,500	11,7385	26,7831	352,155	803,493
45	15	270	6,667	4,000	7,6087	45,7702	456,522	2 746,212
39	21	78	4,762	0,952	12,0283	24,3805	240,566	487,610
50	20	200	5	2,000	9,1545	28,5919	366,180	1 143,676
43	22	430	4,545	4,545	11,8415	22,5166	1 184,150	2 251,166
41	19	205	5,263	2,631	11,1412	29,6641	557,060	1 483,205
45	20	45	5	0,500	10,6225	27,5643	106,225	275,643
		1 609		19,937			4 251,001	11 124,672

Tabelle IV

Vergleichende Zusammenstellung

	$t = 5$	$\varDelta\,{}^0/_0$	$t = 10$	$\varDelta\,{}^0/_0$	$t = 15$	$\varDelta\,{}^0/_0$
Individuelle Rechnung	81 835,–		173 368,–		278 136,–	
t-Methode	81 770,–	—0,08	173 082,–	—0,16	277 349,–	—0,28
F-Methode	81 040,–	—0,97	173 347,–	—0,01	279 446,–	+0,47
Φ-Methode	80 994,–	—1,03	173 138,–	—0,13	278 903,–	+0,28
φ-Methode	81 388,–	—0,55	173 388,–	+0,01	279 081,–	+0,34
n-Methode I . . .	81 656,–	—0,22	172 954,–	—0,24	277 198,–	—0,34
n-Methode II . . .	81 739,–	—0,12	173 012,–	—0,21	277 231,–	—0,33
n-Methode III . . .	81 826,–	—0,01	173 277,–	—0,05	277 711,–	—0,15