Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 56 (1956)

Artikel: Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen

Autor: Loeffel, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966842

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen

Von *H. Loeffel*, Zürich

Einleitung

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Verteilung einer stochastischen Variablen durch die zugehörige Verteilungsfunktion gegeben. Die Fourier-Stieltjessche Transformierte dieser Funktion, die sogenannte charakteristische Funktion ist durch A. Cauchy [1][1]) im Jahre 1853 eingeführt worden. In etwas abgeänderter Form erscheint sie bereits früher als erzeugende Funktion von P. S. Laplace [2]. 1920 hat dann P. Lévy [3] durch zwei fundamentale Sätze die Theorie der charakteristischen Funktionen verankert. Es sind dies die sogenannte Lévysche Umkehrformel und der Kontinuitätssatz. Dieser ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung verschiedener Konvergenzfragen, insbesondere des klassischen zentralen Grenzwertsatzes.

Die ursprüngliche Fassung des Kontinuitätssatzes wurde von H. Cramér, V. Glivenko und D. Dugué dahin abgeändert, dass sie über die Art der Konvergenz der Folge der charakteristischen Funktionen keinerlei Voraussetzungen machten, hingegen über das Verhalten der Grenzfunktion. So hat D. Dugué im Jahre 1955 bewiesen, dass es genügt, den Realteil der Grenzfunktion als stetig im Nullpunkt vorauszusetzen.

Auch in der sogenannten Arithmetik der Wahrscheinlichkeitsgesetze hat sich die Theorie der charakteristischen Funktionen als fruchtbar erwiesen. Hier handelt es sich darum, abzuklären, ob sich eine gegebene charakteristische Funktion als endliches oder unendliches Produkt von charakteristischen Funktionen darstellen lässt. A. Khintchine hat zur allgemeinen Theorie einen wesentlichen Beitrag geleistet.

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis auf Seite 384.

Von P. Lévy stammt die geschlossene Darstellung einer charakteristischen Funktion, die zur Klasse der unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsgesetze gehört. Die klassischen Verteilungen von Gauss und Poisson wurden insbesondere von D. A. Raikov, H. Cramér und D. Dugué untersucht.

Es ist nun von grossem Interesse, zu wissen, wann eine vorgelegte Funktion eine charakteristische Funktion ist. S. Bochner hat bereits 1932 gezeigt, dass jede positiv-definitive Funktion, die im Nullpunkt den Wert 1 annimmt, eine charakteristische Funktion ist. Khintchine und Cramér stellten notwendige und hinreichende Bedingungen auf, die aber in der Praxis schwer anzuwenden sind. Zugänglichere Kriterien für spezielle Funktionsklassen stammen von J. Marcinkiewicz, A. Wintner und D. Dugué für analytische charakteristische Funktionen. E. Lukacs und O. Szàsz haben sich in letzter Zeit um die Diskussion einiger rationaler charakteristischer Funktionen verdient gemacht. Endlich soll noch die einfache hinreichende Bedingung von G. Pólya erwähnt werden, wonach gewisse reelle, konvexe Funktionen (sogenannte Pólyafunktionen) charakteristische Funktionen sind.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir eine Integraltransformation, die einer Gesamtheit von charakteristischen Funktionen eine neue charakteristische Funktion zuordnet. Diese wird von M. Loève als «gewichtete» charakteristische Funktion bezeichnet und spielt im Zusammenhang mit gewissen Konvergenzsätzen abhängiger stochastischer Variablen eine Rolle.

In einem ersten Teil wird die allgemeine Theorie begründet und dann für die spezielle Gesamtheit der zu einer festen charakteristischen Funktion im engern Sinne ähnlichen charakteristischen Funktionen angewandt. Die von M. Girault in einem ganz andern Zusammenhange hergeleitete Integraltransformation einer charakteristischen Funktion erfährt eine eingehende Behandlung. Im folgenden wird die Giraultsche Transformation verallgemeinert. Dabei gelingt es, eine einparametrige Schar (Scharparameter: $0 < p < \infty$) von neuen Verteilungsfunktionen (die sogenannten p-Verteilungsfunktionen) herzuleiten. Diese erweisen sich für $0 < p \leqq 1$ als unimodal mit Vertex Null. Die sinngemässe Erweiterung der p-Verteilungen auf negative Werte des Parameters liefert uns eine einfache Integraltransformation, die eine bestimmte Klasse von reellen Funktionen in Pólyafunktionen überführt. Abschliessend wird gezeigt, dass schwache, bzw. vollständige Konvergenz

einer Folge von Verteilungsfunktionen äquivalent ist mit schwacher bzw. vollständiger Konvergenz der zugehörigen p-Verteilungsfunktionen. Ein Teil genannter Konvergenzaussage lässt sich alsdann wesentlich verallgemeinern.

Ein Teil der Resultate der vorliegenden Arbeit wurde bereits in zwei Comptes-rendus-Noten der Akademie von Paris veröffentlicht [12].

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Saxer, für die wertvollen Ratschläge während der Ausführung der Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Ebensolchen Dank schulde ich auch den Herren Prof. Dr. E. Specker (ETH), Prof. Dr. D. Dugué (Sorbonne) und Prof. Dr. M. Loève (University of California) für ihre Anregungen und ihr Interesse, das sie an meiner Arbeit bekundeten.

§ 1. Folgen von charakteristischen Funktionen

Bevor wir zum Thema dieses Paragraphen übergehen, seien noch einige wichtige Definitionen vorausgeschickt.

Definition I.

Unter einer allgemeinen Verteilungsfunktion $F(x)$ verstehen wir eine nicht abnehmende, linksstetige Funktion, wobei $0 \leqq F(x) \leqq 1$ in $-\infty \leqq x \leqq +\infty$.

Aus obiger Definition folgt die Existenz der folgenden Grenzwerte:

$$F(x+0) = \lim_{x_n \downarrow x} F(x_n), \qquad F(x-0) = \lim_{x_n \uparrow x} F(x_n),$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x), \qquad F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x);$$

x heisst ein Stetigkeitspunkt bzw. Unstetigkeitspunkt von $F(x)$, je nachdem $F(x+0) - F(x-0) = 0$ oder > 0.

Für die Anwendungen besonders wichtig ist der Fall

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1. \tag{1.1}$$

Wir nennen dann $F(x)$ schlechthin Verteilungsfunktion.

Definition II.

Unter der charakteristischen Funktion $\varphi(z)$, die zur Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört, verstehen wir die Fourier-Stieltjessche Transformierte bezüglich $F(x)$:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dF(x), \qquad -\infty < z < +\infty. \tag{1.2}$$

Dabei ist der Riemann-Stieltjessche Integralbegriff zugrunde gelegt.

Ist $F(x)$ eine allgemeine Verteilungsfunktion, so nennen wir $\varphi(z)$ die allgemeine charakteristische Funktion.

Bekanntlich ist durch die allgemeine charakteristische Funktion $\varphi(z)$ die zugehörige allgemeine Verteilungsfunktion bis auf eine additive Konstante bestimmt. Setzen wir aber fest, dass:

$$F(-\infty) = 0, \tag{1.3}$$

so ist $F(x)$ durch $\varphi(z)$ eindeutig bestimmt.

In den nun folgenden Ausführungen handelt es sich, wenn nicht besonders vermerkt, um gewöhnliche charakteristische Funktionen.

Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften von $\varphi(z)$:

a) $\varphi(z)$ ist eine stetige Funktion für $-\infty < z < +\infty$.

b) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(-z) = \overline{\varphi(z)}$ für alle z, wobei wir unter $\overline{\varphi(z)}$ den konjugiert komplexen Wert von $\varphi(z)$ verstehen.

c) $|\varphi(z)| \leqq 1$, $-\infty \leqq z \leqq +\infty$.

d) Eine charakteristische Funktion ist dann und nur dann reell, wenn sie zu einer symmetrischen Verteilungsfunktion gehört [4, S. 51].

e) Wenn $\varphi(z)$ eine charakteristische Funktion ist, dann auch $[\varphi(z)]^n$ für jede natürliche Zahl n.

f) Gehört $\varphi(z)$ zu einem unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsgesetz, dann ist $[\varphi(z)]^c$ für jede positive Zahl c eine charakteristische Funktion.

g) Die normierte Linearkombination von charakteristischen Funktionen ist wieder eine charakteristische Funktion. Ausführlicher:

Seien $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$ n charakteristische Funktionen, dann ist auch

$$\Phi_n(z) = c_1 \varphi_1(z) + c_2 \varphi_2(z) + \ldots + c_n \varphi_n(z)$$

mit $c_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ eine charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion $G_n(x)$ gehört:

$$G_n(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + \ldots + c_n F_n(x).$$

h) wenn $\varphi(z)$ eine charakteristische Funktion darstellt, so gilt dasselbe für $\varphi(z.\alpha)$ wobei $-\infty < \alpha < +\infty$.

Satz 1.

Sei $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z), \ldots$ eine unendliche Folge von charakteristischen Funktionen. Dann ist auch

$$\Phi(z) = c_1 \varphi_1(z) + \ldots + c_n \varphi_n(z) + \ldots \tag{1.4}$$

eine charakteristische Funktion, mit $c_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ und $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = 1$, und gehört zur Verteilungsfunktion $G(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i F_i(x)$.

Beweis: $\Phi(z) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(z)$, wobei $\Phi_n(z) = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(z)$.

$\Phi_n(z)$ ist aber nach *g)* für jedes n eine charakteristische Funktion. Da $|c_i \varphi_i(z)| \leqq c_i$, folgt nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, dass (1.4) gleichmässig in z gegen eine stetige Funktion $\Phi(z)$ konvergiert. Nach dem Kontinuitätssatz folgt endlich, dass $\Phi(z)$ eine charakteristische Funktion ist.

Anwendung:

Wenn $\varphi(z)$ eine charakteristische Funktion ist, dann auch

$$\Phi(z) = \exp\left[\varphi(z) - 1\right] \tag{1.5}$$

und gehört zu einem unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsgesetz.

Beweis:

$$\Phi(z) = \frac{1}{e}\left\{1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \ldots + \frac{\varphi_n}{n!} + \ldots\right\}.$$

Aus dieser Reihenentwicklung folgt die Behauptung nach Eigenschaft *e)* und Satz 1. Ausserdem gilt:

$$\Phi(z) = \left[\exp\left\{\frac{1}{n}(\varphi-1)\right\}\right]^n = [\varphi_n^*(z)]^n, \text{ für } n = 1, 2, \cdots,$$

wobei $\varphi_n^*(z) = \exp\left\{\frac{1}{n}(\varphi-1)\right\}$ für jedes n eine charakteristische Funktion ist. Aus der Definition der unendlich teilbaren Gesetze folgt, dass $\Phi(z)$ auch dazu gehört.

Beispiele: $\qquad -\infty < a < +\infty$

$$\varphi(z) = \cos(az), \quad \Phi(z) = \exp[\cos(az) - 1],$$
$$\varphi(z) = e^{iaz}, \quad \Phi(z) = \exp[e^{iaz} - 1], \quad \text{Poisson-Verteilung.}$$

§ 2. Integraltransformation einer Gesamtheit von charakteristischen Funktionen

Die eingangs behandelte Transformation einer unendlichen Folge von charakteristischen Funktionen durch Reihenbildung führt uns notwendigerweise zur Transformation einer Gesamtheit von charakteristischen Funktionen (abhängig von einem Parameter) durch Integration nach diesem Parameter.

Satz 1.

Voraussetzung:

a) $\varphi(z,\alpha)$ ist für jeden Wert des Parameters α $(a \leqq \alpha \leqq b)$ eine charakteristische Funktion.

b) $\varphi(z,\alpha)$ ist für jeden endlichen Wert von z eine stetige Funktion in der Variablen α.

c) $V(\alpha)$ ist eine nicht abnehmende, linksstetige beschränkte Funktion in $[a,b]$.

Wenn $F(x,\alpha)$ die zu $\varphi(z,\alpha)$ gehörige Verteilungsfunktion darstellt, dann ist nach Definition:

$$\varphi(z,\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dF_x(x,\alpha).$$

Behauptung:

$$\Phi(z) = \frac{1}{V(b)-V(a)} \int_a^b \varphi(z,\alpha)\, dV(\alpha) \tag{2.1}$$

ist auch eine charakteristische Funktion und gehört zur Verteilungsfunktion:

$$G(x) = \frac{1}{V(b)-V(a)} \int_a^b F(x,\alpha)\, dV(\alpha)\,. \tag{2.2}$$

Bevor wir den Beweis durchführen, sei noch vermerkt, dass M. Loève [5] auf die Möglichkeit einer Transformation durch Integration nach einem Parameter hingewiesen hat. Auf den nähern Sachverhalt geht er aber nicht ein. In [5a] S. 379 hebt er allgemein die Bedeutung solcher Untersuchungen (im Zusammenhang mit Grenzwertsätzen abhängiger Variablen) hervor.

Beweis:

Für jedes feste z ist $\varphi(z,\alpha)$ nach Voraussetzung eine stetige Funktion von α im Intervall $[a,b]$. Deshalb existiert nach einem bekannten Satze [6, S. 7] das Riemann-Stieltjessche Integral (2.1) und definiert eine wohlbestimmte Funktion $\Phi(z)$.

Die n-te Riemannsche Summe, die wir mit $\Phi_n(z)$ bezeichnen, heisst:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{V(b)-V(a)} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(z,b_i)\,[V(a_{i+1})-V(a_i)] \tag{2.3}$$

mit $a_0 = a$, $a_n = b$ und $a_i \leqq b_i \leqq a_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

$\Phi_n(z)$ ist für jedes n eine charakteristische Funktion. Bezeichnen wir mit δ das Maximum von $(a_{i+1}-a_i)$, $i = 0, 1, \ldots, (n-1)$, so folgt:

$$\Phi(z) = \lim_{\delta \to 0} \Phi_n(z)\,. \tag{2.4}$$

Um zu zeigen, dass auch $\Phi(z)$ eine charakteristische Funktion ist, genügt es auf Grund des Kontinuitätssatzes, deren Stetigkeit im Nullpunkt nachzuweisen.

Das heisst, es muss gelten:

$$\lim_{z \to 0} \Phi(z) = \Phi(0) = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{z \to 0} [\Phi(z)-1] = 0\,.$$

Diese Relation bedeutet aber nichts anderes, als dass für eine beliebige Nullfolge $\{z_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) - 1 = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) - 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{V(b) - V(a)} \int_a^b [\varphi(z_n,\alpha) - 1]\, dV(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(\alpha)\, dV(\alpha)$$

$$\text{mit } g_n(\alpha) = \frac{\varphi(z_n,\alpha) - 1}{V(b) - V(a)}.$$

Um den Grenzübergang ausführen zu können, benützen wir das

Theorem von Lebesgue:

Sei die Funktionenfolge $\{g_n(\alpha)\}$ in $[a,b]$ gleichmässig beschränkt und $V(\alpha)$ eine nicht abnehmende, beschränkte Funktion in $[a,b]$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\alpha) = g(\alpha)$ für fast alle $\alpha \in [a,b]$, d. h. bis auf eine Menge vom V-Mass Null, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(\alpha)\, dV(\alpha) = \int_a^b g(\alpha)\, dV(\alpha). \tag{2.5}$$

Dabei ist der Lebesgue-Stieltjessche Integralbegriff zugrunde gelegt.

Bemerkung:

Das Theorem von Lebesgue gilt nicht nur für ein Intervall, sondern für eine allgemeine V-messbare Punktmenge E.

In (2.1) haben wir allerdings das Integral im Riemann-Stieltjesschen Sinne genommen. Dieses existiert dann bekanntlich auch im Sinne von Lebesgue und hat den gleichen Wert.

Da $|\varphi(z_n,\alpha)| \leqq 1$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $a \leqq \alpha \leqq b$, und

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(z_n,\alpha) - 1}{V(b) - V(a)} = g(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } \alpha \in [a,b],$$

folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(z) - 1 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(\alpha)\, dV(\alpha) = \int_a^b 0\, dV(\alpha) = 0;$$

$\Phi(z)$ ist also stetig im Nullpunkt und somit eine charakteristische Funktion, quod erat demonstrandum.

Zur charakteristischen Funktion $\varphi(z,b_i)$ gehört die Verteilungsfunktion $F(x,b_i)$, die eindeutig bestimmt ist auf Grund von (1.1). Deshalb ist der charakteristischen Funktion $\Phi_n(z)$ die folgende Verteilungsfunktion zugeordnet:

$$G_n(x) = \frac{1}{V(b) - V(a)} \sum_{i=0}^{n-1} F(x,b_i) \left[V(a_{i+1}) - V(a_i)\right]. \tag{2.6}$$

Nach dem eben Bewiesenen strebt $\Phi_n(z)$ für jede α-Einteilung gegen die charakteristische Funktion $\Phi(z)$. Nach dem Kontinuitätssatz konvergiert somit die Folge der zugehörigen Verteilungsfunktionen $G_n(x)$ für jede α-Einteilung gegen die Grenzverteilungsfunktion $G(x)$. Diese ist der charakteristischen Funktion $\Phi(z)$ zugehörig. Mit andern Worten: Sei x ein Stetigkeitspunkt von $G(x)$, dann strebt die Riemannsche Summe (2.6) für jede α-Einteilung gegen den wohlbestimmten Wert $G(x)$. Damit ist aber gezeigt, dass das Integral (2.2) für jeden Stetigkeitspunkt von $G(x)$ einen Sinn hat.

Bemerkung:

Satz 1 gilt auch für eine Gesamtheit von allgemeinen charakteristischen Funktionen, für die gilt:

$$\varphi(0,\alpha) = c \leqq 1, \qquad \text{für } a \leqq \alpha \leqq b.$$

Die zu $\varphi(z,\alpha)$ gehörige allgemeine Verteilungsfunktion ist dann nach (1.3) eindeutig bestimmt.

Beziehung zwischen den Momenten

Mit $m_{i,\alpha}$ bezeichnen wir das i-te Moment des Wahrscheinlichkeitsgesetzes $F(x,\alpha)$ bezüglich des Nullpunktes:

$$m_{i,\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \, dF_x(x,\alpha). \tag{2.7}$$

Voraussetzung:

a) $m_{i,\alpha}$ existiert für jedes $\alpha \in [a,b]$ und $i = 1, 2, \ldots, k$ [d.h. die Integrale (2.7) konvergieren absolut].

b) $m_{i,\alpha}$ ist V-integrierbar nach α für jeden Index i.

Behauptung:

Es existieren auch die Momente M_i der transformierten Verteilung $G(x)$, und es gilt:

$$M_i = \frac{1}{V(b)-V(a)} \int_a^b m_{i,\alpha}\, dV(\alpha)\,, \tag{2.8}$$

$i = 1, 2, \ldots, k$ wenn k gerade; $i = 1, 2, \ldots, (k-1)$ wenn k ungerade.

Beweis:

Da die ersten k Momente des durch $\varphi(z,\alpha)$ repräsentierten Wahrscheinlichkeitsgesetzes existieren, hat bekanntlich $\varphi(z,\alpha)$ die folgende Taylor-Entwicklung:

$$\varphi(z,\alpha) = 1 + i\, m_{1,\alpha}\, z - m_{2,\alpha} \frac{z^2}{2} + \ldots + i^k\, m_{k,\alpha} \frac{z^k}{k!} + z^k\, \omega_\alpha(z)\,, \tag{2.9}$$

wobei noch gilt: $\lim\limits_{z \to 0} \omega_\alpha(z) = 0\,,$ für alle $\alpha \in [a,b]$. (2.9 a)

Durch Integration nach α folgt nun:

$$[V(b) - V(a) = C].$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{C} \int_a^b \varphi(z,\alpha)\, dV(\alpha) =$$

$$\frac{1}{C}\left[\int_a^b dV(\alpha) + iz \int_a^b m_{1,\alpha}\, dV(\alpha) + \ldots + i^k \frac{z^k}{k!} \int_a^b m_{k,\alpha}\, dV(\alpha) + z^k \int_a^b \omega_\alpha(z)\, dV(\alpha)\right] =$$

$$= 1 + i\, A_1 z + \ldots + i^k \frac{z^k}{k!} A_k + z^k\, \Omega(z)\,, \tag{2.10}$$

wobei

$$A_i = \frac{1}{C} \int_a^b m_{i,\alpha}\, dV(\alpha) \text{ und } \Omega(z) = \frac{1}{C} \int_a^b \omega_\alpha(z)\, dV(\alpha)\,.$$

Nach (2.9a) und dem Theorem von Lebesgue folgt ausserdem:

$$\lim_{z \to 0} \Omega(z) = 0\,.$$

Nach R. Fortet [7] wissen wir:

Hat eine charakteristische Funktion die Form:

$$\Phi(z) = 1 + i A_1 z + \ldots + i^k \frac{z^k}{k!} A_k + z^k \Omega(z),$$

mit reellen A_i und $\Omega(z) \to 0$, wenn $z \to 0$, so folgt die Existenz der $(k-1)$ ersten Momente (bezüglich des Nullpunktes) M_i. Wenn k gerade ist, existiert auch M_k und es gilt:

$$M_i = A_i = \frac{1}{V(b) - V(a)} \int_a^b m_{i,\alpha}\, dV(\alpha), \qquad \text{q. e. d.}$$

In einem zweiten Beweis ändern wir die Voraussetzung b) ab, indem wir jetzt fordern:

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \varphi(z,\alpha), \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{2.11}$$

ist eine V-integrierbare Funktion in α für jedes z, $|z| \leqq \varrho$.

Mit Hilfe dieser neuen Voraussetzung lässt sich die Fallunterscheidung k gerade bzw. ungerade, umgehen.

Beweis: Wir führen zuerst einige Abkürzungen ein.

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \varphi(z,\alpha) = \varphi_k(z,\alpha), \qquad \frac{\partial}{\partial z^k} \Phi(z) = \Phi_k(z),$$

dann folgt: $\quad \varphi_k(0,\alpha) = i^k m_{k,\alpha}, \qquad \Phi_k(0) = i^k M_k, \qquad |z| \leqq \varrho,$

$$\Phi_1(z) - \frac{1}{C} \int_a^b \varphi_1(z,\alpha)\, dV(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{C} \int_a^b \left[\frac{\varphi(z+h,\alpha) - \varphi(z,\alpha)}{h} - \varphi_1(z,\alpha) \right] dV(\alpha).$$

Sei nun $\{h_n\}$ eine beliebige Nullfolge für $n \to \infty$, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(z+h_n,\alpha) - \varphi(z,\alpha)}{h_n} - \varphi_1(z,\alpha) = \lim_{n \to \infty} g_n(\alpha) = 0 \quad \text{für alle } \alpha,$$

Ausserdem ist $|g_n(\alpha)| \leqq K_1$ für $\alpha \in [a,b]$; somit folgt nach dem Theorem von Lebesgue:

$$\Phi_1(z) - \frac{1}{C} \int_a^b \varphi_1(z,\alpha)\, dV(\alpha) = 0.$$

Mit der gleichen Beweismethode kommt man sukzessive bis zur k-ten Ableitung und erhält endlich:

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{C} \int_a^b \varphi_k(z,\alpha)\, dV(\alpha)\,,$$

oder wenn wir $z = 0$ setzen:

$$M_k = \frac{1}{C} \int_a^b m_{k,\alpha}\, dV(\alpha)\,, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 3. Beweis eines Satzes von Bochner

Satz 1 von § 2 kann auf unendliche α-Intervalle wie folgt verallgemeinert werden:

Voraussetzung:

a) $V(\alpha)$ ist eine nicht abnehmende, linksstetige, beschränkte Funktion in $a \leqq \alpha \leqq \infty$.

b) $\varphi(z,\alpha)$ ist für jedes $\alpha \in [a,\infty]$ mit Ausnahme von abzählbar vielen eine charakteristische Funktion. Dabei dürfen die Ausnahmewerte nicht mit den Unstetigkeitsstellen von $V(\alpha)$ zusammenfallen.

c) $\varphi(z,\alpha)$ ist für jedes z eine stetige Funktion in α.

Behauptung:

Es ist auch

$$\Phi(z) = \frac{1}{V(\infty) - V(a)} \int_a^\infty \varphi(z,\alpha)\, dV(\alpha) \tag{3.1}$$

eine charakteristische Funktion.

Beweis:

Man kann leicht zeigen, dass das Integral (3.1) für jedes feste z existiert und somit den Grenzwert von Riemannschen Summen darstellt. Diese sind charakteristische Funktionen, denn bei der Einteilung des α-Intervalles können die Zwischenpunkte b_i $(a_i \leqq b_i \leqq a_{i+1})$ so gewählt werden, dass sie nicht mit den Ausnahmewerten unter *b)*

zusammenfallen. Weiter ist nach dem Theorem von Lebesgue $\Phi(z)$ wiederum eine stetige Funktion im Nullpunkt. Damit folgt obige Behauptung.

Anwendung:

S. Bochner hat in [8] ohne Beweis angegeben, dass jede Funktion der folgenden Gestalt eine charakteristische Funktion ist:

$$H(z) = \exp\left[-z^2 g(|z|)\right], \qquad g(z) = \int_0^\infty \frac{dV(\alpha)}{z^2+\alpha^2}, \tag{3.2}$$

wobei $V(\alpha)$ Bedingung *a)* erfüllt.

Beweis:

$$z) = \exp\left\{\int_0^\infty \left[-1+\frac{\alpha^2}{z^2+\alpha^2}\right] dV(\alpha)\right\} = \exp\left\{-[V(\infty)-V(0)]+\int_0^\infty \frac{dV(\alpha)}{1+\left(\frac{z}{\alpha}\right)}\right.$$

Wir setzen:

$$V(\infty)-V(0) = k, \qquad \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{dV(\alpha)}{1+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2} = h(z),$$

somit folgt:

$$H(z) = \exp\left\{k\left[h(z)-1\right]\right\}. \tag{3.3}$$

Bekanntlich ist

$$\varphi(z,\alpha) = \frac{1}{1+\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2}$$

für $0<\alpha\leqq\infty$ eine charakteristische Funktion, die zum Typus der sogenannten Laplace-Verteilung gehört. $\varphi(z,\alpha)$ ist für alle z eine stetige Funktion in α $(0\leqq\alpha\leqq\infty)$, wenn wir $\varphi(0,0)=1$ definieren. Es ist deshalb erlaubt, Formel (3.1) anzuwenden, und wir finden, dass $h(z)$ eine charakteristische Funktion ist.

Nach (1.5) ist auch $H(z)$ eine charakteristische Funktion, denn $\exp\left[h(z)-1\right]$ gehört zu einem unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsgesetz, quod erat demonstrandum.

$H(z)$ kann auch dann noch eine charakteristische Funktion sein, wenn $k\to\infty$, sofern dabei $H(z)$ eine im Nullpunkt stetige Funktion ist.

Dies ist der Fall für: $V(\alpha) = \alpha^p, \quad 0 < p < 2;$

$$dV(\alpha) = p\,\alpha^{p-1}\,d\alpha; \qquad g(z) = p\int_0^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{z^2+\alpha^2}\,d\alpha;$$

$$A > 0; \qquad \int_A^\infty \frac{\alpha^{p-1}}{z^2+\alpha^2}\,d\alpha \leqq \int_A^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3-p}} \text{ existiert, da } 3-p>1;$$

$$z \neq 0; \qquad \int_0^A \frac{\alpha^{p-1}}{z^2+\alpha^2}\,d\alpha < \frac{1}{z^2}\int_0^A \alpha^{p-1}\,d\alpha = \frac{A^p}{z^2 p};$$

ausserdem: $z^2 g(z) \to 0$, wenn $z \to 0$; denn $\lim\limits_{z\to 0} \displaystyle\int_0^A \frac{d\alpha}{1+\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2} = 0$

nach dem Satz von Lebesgue, da $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{1+\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2} \to 0$ für alle $0 < \alpha \leqq A$.

Spezialfall: $V(\alpha) = \alpha.$

$$(z) = \exp\left[-\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2}\right] = \exp\left[-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha}{|z|}\right)|z|\right]\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} = \exp\left(-\frac{\pi}{2}|z|\right).$$

Dies ist die charakteristische Funktion, welche zur sogenannten Cauchy-Verteilung gehört.

§ 4. Transformation von Girault

Wir gehen aus von Formel (2.1) und setzen:

$$\varphi(z,\alpha) = \varphi(z\cdot\alpha), \; V(\alpha) = \alpha, \quad a = 0, \; b = 1. \tag{4.1}$$

Dies ist offenbar erlaubt, denn $\varphi(z\cdot\alpha)$ ist eine in z und α stetige Funktion.

$$\Phi(z) = \int_0^1 \varphi(z\cdot\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi(u)\,du. \tag{4.2}$$

Die zu $\Phi(z)$ gehörige Verteilungsfunktion $G(x)$ berechnet sich nach (2.2) wie folgt:

$$G(x) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{\alpha}\right) d\alpha. \tag{4.3}$$

(4.2) wurde von M. Girault in [9] mit Hilfe einer zweidimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung hergeleitet.

Satz 1.

Die Transformation (4.2) ist ein-eindeutig und aus $\Phi(z) \equiv \varphi(z)$ folgt $\varphi(z) \equiv 1$ und umgekehrt.

Beweis:

a) Sei
$$\Phi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi_1(u)\,du = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi_2(u)\,du,$$

dann folgt für $z \neq 0$

$$0 \equiv \int_0^z [\varphi_1(u) - \varphi_2(u)]\,du,$$

und durch Differentiation nach der obern Grenze z:

$$0 \equiv \varphi_1(z) - \varphi_2(z).$$

Für $z = 0$ ist aber: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \Phi(0) = 1$, q. e. d.

b) Sei
$$\varphi(z) \equiv \frac{1}{z}\int_0^z \varphi(u)\,du,$$

für $z \neq 0$ ist die rechte Seite der Gleichheit differenzierbar, somit auch die linke; es folgt:

$\varphi(z) \equiv z\,\varphi'(z) + \varphi(z)$, dann folgt $\varphi'(z) \equiv 0$ für alle $z \neq 0$, d. h.

$$\varphi(z) \equiv C = \varphi(0) = 1.$$

Nach (4.3) lässt sich $G(x)$ explizit berechnen. Dabei machen wir die Variablensubstitution $\frac{x}{\alpha} = u$, so dass die Fallunterscheidung $x > 0$ und $x < 0$ nötig ist.

$$G(x) = \begin{cases} x\displaystyle\int_x^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du, & x > 0 \\ -x\displaystyle\int_\infty^x \frac{F(u)}{u^2}\,du, & x < 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Aus der Darstellung (4.4) ersieht man ohne weiteres, dass $G(x)$ für alle $x \neq 0$ stetig ist. Dagegen kann $G(x)$ im Nullpunkt eine Unstetigkeit haben, wenn $F(x)$ daselbst auch eine hat. Noch präziser:

$$G(+0) = F(+0)\,,\; G(-0) = F(-0)\,. \tag{4.5}$$

Beweis:

Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Gleichheit, da derjenige für die zweite ganz analog verläuft.

$$x > 0\,, \quad G(x) = x \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du = x\left[\int_x^A \frac{F(u)}{u^2}\,du + \int_A^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du\right] \leqq$$

$$x\left[F(A+0)\int_x^A \frac{du}{u^2} + 1\int_A^\infty \frac{du}{u^2}\right] = x\left[F(A+0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{A}\right) + \frac{1}{A}\right].$$

Sei A fest und strebe x gegen $+0$:

$G(+0) \leqq F(A+0)$ für jedes $A > 0$, wenn auch $A \to +0$,

so erhält man: $G(+0) \leqq F(+0)$, andererseits gilt aber:

$$G(x) \geqq x\,F(x+0)\int_x^\infty \frac{du}{u^2} = F(x+0)\,.$$

Für $x \to +0$ $\qquad G(+0) \geqq F(+0)\,,$ $\qquad$ q. e. d.

Verhalten im Unendlichen

(4.2) gilt auch im Falle, dass $\varphi(0) = F(\infty) - F(-\infty) \neq 1$, und wir erhalten:

$$G(+\infty) = F(+\infty)\,, \quad G(-\infty) = F(-\infty)\,. \tag{4.6}$$

Den Beweis können wir uns schenken, da er sich wieder durch elementare Abschätzungen ergibt.

Wenn $\varphi(0) = 1$, kann man leicht die folgenden Ungleichungen herleiten:

$$\begin{aligned} x > 0\,, &\quad 1 \geqq G(x) \geqq F(x+0)\,; \\ x < 0\,, &\quad 0 \leqq G(x) \leqq F(x-0)\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Kurve $G(x)$ verläuft somit für $x > 0$ immer oberhalb der Kurve $F(x)$ und für $x < 0$ immer unterhalb derselben.

Untersuchung der ersten Ableitung

Sei $x > 0$ ein Stetigkeitspunkt von $F(x)$, dann gilt:

$$G'(x) = \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du - \frac{F(x)}{x} = \frac{G(x) - F(x)}{x}. \tag{4.8}$$

An einer Stelle x, wo $F(x+0) \neq F(x-0)$, existiert eine Rechts- bzw. Linksableitung. Wir kennzeichnen sie mit «+» bzw. «—» und erhalten:

$$G'_+(x) = \frac{G(x) - F(x+0)}{x}, \quad G'_-(x) = \frac{G(x) - F(x-0)}{x}. \tag{4.8a}$$

Für $x < 0$ erhält man die gleichen Beziehungen wie unter (4.8) bzw. (4.8a).

Im übrigen ist $G'(x)$ für $x > 0$ eine nicht zunehmende und für $x < 0$ eine nicht abnehmende Funktion von x.

Beweis für $x > 0$:

$$> 0, \quad G'(x) - G'(x+\Delta) = \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du - \frac{F(x)}{x} - \int_{x+\Delta}^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du + \frac{F(x+\Delta)}{x+\Delta}$$

$$= \int_x^{x+\Delta} \frac{F(u)}{u^2}\,du - \frac{F(x)}{x} + \frac{F(x+\Delta)}{x+\Delta} \geqq \frac{F(x)\,\Delta}{x(x+\Delta)} + \frac{xF(x+\Delta) - (x+\Delta)F(x)}{x(x+\Delta)}$$

$$= \frac{xF(x+\Delta) - xF(x)}{x(x+\Delta)} = \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{x+\Delta} \geqq 0.$$

Verhalten der Ableitung im Nullpunkt

Wir untersuchen die Rechtsableitung im Nullpunkt, die wie folgt definiert ist:

$$G'_+(0) = \lim_{x \to +0} \frac{G(x) - G(+0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^2}\,du - F(+0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \int_x^\infty \frac{F(u) - F(+0)}{u^2}\,du,$$

$G'_+(0)$ existiert dann und nur dann, wenn

$$\int_0^1 \frac{F(u)-F(+0)}{u^2}\,du \tag{4.9}$$

existiert.

Im folgenden werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Verteilungsfunktion $F(x)$ angegeben, damit das Integral (4.9) existiert.

Behauptung:

$$f(u) = F(u)-F(+0) = o(u), \quad \text{für } u \to +0, \tag{4.10}$$

ist eine notwendige Bedingung für die Existenz von (4.9).

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es zu einem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $a < b < \delta$:

$$\int_a^b \frac{f(u)}{u^2}\,du < \varepsilon .$$

Sei nun $0 < s < r$ und $r = 3s < \delta$, dann gilt unter Benützung der Tatsache, dass $f(u)$ eine nicht abnehmende Funktion ist:

$$\varepsilon > \int_s^r \frac{f(u)}{u^2}\,du > \frac{f(s)}{r}\int_s^r \frac{du}{u} = \frac{f(s)}{3s}\log\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{f(s)}{3s}\log 3 > \frac{1}{3}\cdot\frac{f(s)}{s},$$

q. e. d.

Bemerkung:

(4.10) ist keine hinreichende Bedingung, wie das Beispiel

$$f(u) = \frac{u}{|\log u|}$$

sofort zeigt.

Dagegen ist die folgende Bedingung hinreichend:

$$f(u) = 0(u^{1+\varepsilon}), \quad u \to +0, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.11}$$

Folgerung:

Die Existenz von $F'_+(0)$ genügt nicht für diejenige von $G'_+(0)$. Analoge Resultate wie die obigen gelten für die Linksableitung $G'_-(0)$.

Definition:

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ heisst unimodal mit Vertex a, wenn $F(x)$ konvex ist für $x < a$ und konkav für $x > a$.

Satz 2.

Einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsgesetz $F(x)$ wird durch die Integraltransformation (4.4) ein neues Gesetz $G(x)$ zugeordnet, das unimodal mit Vertex Null ist.

In diesem Zusammenhang sei auch auf die Arbeit [9a, S. 157] verwiesen.

§ 5. Anwendungen und Beispiele zur Giraultschen Transformation

G. Pólya [10] hat gezeigt, dass jede Funktion $\varphi(z)$ mit den folgenden Eigenschaften eine charakteristische Funktion ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(z) \text{ ist eine reelle, stetige Funktion für } -\infty \leqq z \leqq \infty; & & \\ \varphi(0) = 1, & \varphi(-z) = \varphi(z), & \lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = 0; \\ \varphi(z) \text{ konvex für } z > 0; & & \end{array}\right\} \quad (5.1)$$

$\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = 0$ kann durch die weniger einschränkende Bedingung

$$\varphi(z) \geqq 0, \quad \text{für } z > 0, \qquad (5.1\text{a})$$

ersetzt werden.

Denn wenn $\varphi(z)$ die Bedingungen (5.1) erfüllt, dann ist $\varphi(z)$ eine charakteristische Funktion und somit auch alle Funktionen der Gestalt:

$$p\,\varphi(z) + q \quad \text{mit} \quad p > 0, \quad q > 0 \quad \text{und} \quad p + q = 1.$$

Bemerkung:

Eine Funktion, die (5.1) bzw. (5.1a) erfüllt, nennen wir eine Pólyafunktion und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung eine Pólyaverteilung.

Aus der letzten Forderung in (5.1) folgt bekanntlich, dass $\varphi(z)$ (mit eventueller Ausnahme des Nullpunktes) eine Rechts- bzw. Linksableitung besitzt.

Satz 1.

Wenn $\varphi(z)$ eine Pólyafunktion ist, dann auch $\Phi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \varphi(u)\,du$.

Beweis:

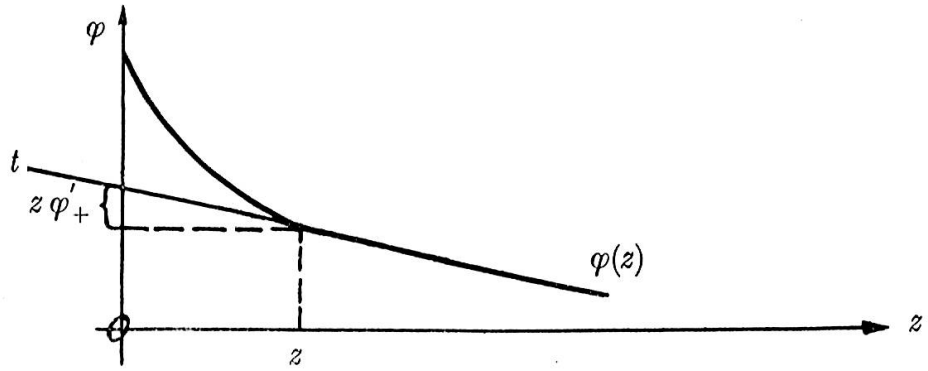
$$z>0, \quad \Phi'(z) = \frac{z\,\varphi(z) - \int_0^z \varphi(u)\,du}{z^2} \leqq 0, \quad \Phi'_+(0) = \frac{\varphi'_+(0)}{2}.$$

Durch eine kleine Rechnung erhält man für die Rechtsableitung von $\Phi'(z)$:

$$\Phi''_+(z) = \frac{2}{z^3}\left(\frac{1}{2}z^2\varphi'_+ - z\,\varphi + \int_0^z \varphi(u)\,du\right) \geqq 0$$

(siehe Figur).

Für $\Phi''_-(z)$ ergibt sich ein entsprechender Ausdruck.



Wir geben nun eine Klasse von unimodalen Pólyafunktionen an:

$$\varphi(z,a) = \left(\frac{1}{1+|z|}\right)^a, \quad 0 \leqq a \leqq 1. \tag{5.2}$$

Beweis:

$$z>0, \quad \varphi'(z) = -a(1+z)^{-a-1} < 0, \quad \varphi''(z) = a(a+1)(1+z)^{-a-2} > 0.$$

Im weitern existiert eine Darstellung der Form:

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \psi(u)\,du,$$

wobei $\psi(u)$ eine charakteristische Funktion ist, denn für $z>0$ gilt:

$$\psi(z) = [z\,\varphi(z)]' = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1+z)^a}\right] = \frac{1}{(1+z)^a}\left(1-\frac{az}{1+z}\right) = \frac{1}{(1+z)^a}\,g(z,a).$$

$g(z,a)$ ist aber eine Pólyafunktion für $0 \leqq a \leqq 1$, denn es gilt:

$$g(z,a) \geqq 0, \qquad g'(z) = \frac{-a}{(1+z)^2} < 0, \qquad g''(z) > 0.$$

$\psi(z)$ ist somit als Produkt von zwei charakteristischen Funktionen wieder eine charakteristische Funktion, quod erat demonstrandum.

Graphische Methode für die Giraultsche Transformation im Falle einer verallgemeinerten Binominalverteilung

Die Verteilungsfunktion $F(x)$, die zu einer verallgemeinerten Binomialverteilung gehört, ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqq b_1 \\ p_1', & b_1 < x \leqq b_2 \\ & \vdots \\ \sum_{k=1}^{i} p_k', & b_i < x \leqq b_{i+1} \\ & \vdots \\ \sum_{k=1}^{l} p_k', & b_l < x \leqq 0 \\ \sum_{k=1}^{l} p_k' + p_0, & 0 < x \leqq a_1 \\ \sum_{k=1}^{l} p_k' + \sum_{k=0}^{i} p_k, & a_i < x \leqq a_{i+1} \\ \sum_{k=1}^{l} p_k' + \sum_{k=0}^{r-1} p_k, & a_{r-1} < x \leqq a_r \\ 1, & x > a_r \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} p_k' > 0, & k = 1, \ldots, l \\ p_k > 0, & k = 0, \ldots, r \\ \sum_{k=1}^{l} p_k' + \sum_{k=0}^{r} p_k = 1 & \end{array} \tag{5.3}$$

Zur Bestimmung der transformierten Verteilungsfunktion $G(x)$ gehen wir aus von den Formeln (4.4):

$$G(x) \equiv 0, \qquad \text{für } x \leqq b_1.$$

$$b_1 \leqq x \leqq b_2, \qquad G(x) = -x \int_{b_1}^{x} \frac{p_1'}{u^2}\, du = (-x)\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{x}\right) p_1',$$

$G(x)$ ist eine Gerade mit der Steigung $m_1' = -\dfrac{p_1'}{b_1}$.

m_1' ist aber nach (4.8a) auch gleich der Rechtsableitung von $G(x)$ im Punkte $x = b_1$, in der Tat:

$$G'_+(b_1) = \frac{0 - p_1'}{b_1} = -\frac{p_1'}{b_1}.$$

$G(x)$ stellt, wie man leicht einsieht, einen Streckenzug dar. Die einzelnen Strecken können mit Hilfe von (4.8a) sukzessive konstruiert werden. Z. B. gibt

$$G'_+(b_2) = \frac{G(b_2) - F(b_2 + 0)}{b_2}$$

die Steigung des Geradenstückes zwischen b_2 und b_3. Schliesslich erreicht man den Punkt $x = b_l$. Da $F(-0) = G(-0)$ lässt sich der Streckenzug bis zum Nullpunkt ergänzen. In analoger Weise gilt für positive Werte von x:

$$G(x) \equiv 1, \qquad \text{für } x \geqq a_r.$$

$$a_{r-1} \leqq x \leqq a_r, \qquad G(x) = x \left[\int_x^{a_r} \frac{\sum_1^l p_k' + \sum_0^{r-1} p_k}{u^2} du + \int_{a_r}^{\infty} \frac{du}{u^2} \right]$$

$$= x \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_r} \right) \left(\sum_1^l p_k' + \sum_0^{r-1} p_k \right) + \frac{1}{a_r} \right],$$

dies ist wiederum eine Gerade mit der Steigung m_r:

$$m_r = \frac{1 - \sum_1^l p_k' - \sum_0^{r-1} p_k}{a_r} = \frac{p_r}{a_r} = G'_-(a_r),$$

$$G'(a_{r-1}) = \frac{G(a_{r-1}) - F(a_{r-1} - 0)}{a_{r-1}} \quad \text{usw.}$$

Wegen $F(+0) = G(+0)$ kann der Streckenzug auch von der positiven Seite gegen den Nullpunkt ergänzt werden.

Im Falle der eben besprochenen verallgemeinerten Binomialverteilung lassen sich aus Tabelle 1 besonders schön die wesentlichen Eigenschaften der transformierten Verteilungsfunktion $G(x)$ ablesen: $G(x)$ ist nämlich, mit eventueller Ausnahme des Nullpunktes, überall stetig, konkav für $x > 0$ und konvex für $x < 0$.

Wir wollen nun zwei Beispiele von allgemeineren Verteilungsfunktionen auf die Giraultsche Transformation hin näher untersuchen.

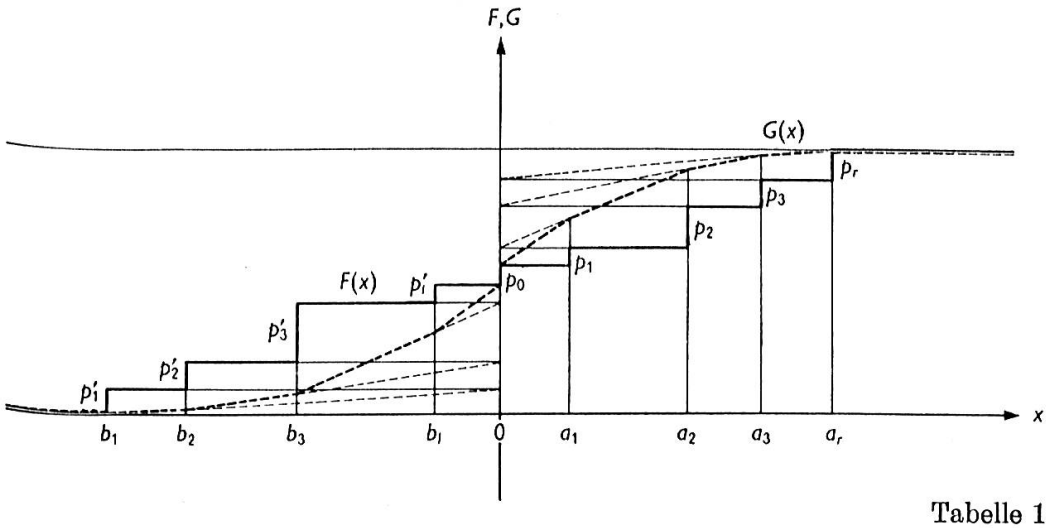


Tabelle 1

1. Beispiel:

Hier betrachten wir eine durchwegs stetige Verteilungsfunktion, die wie folgt definiert ist:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geqq 3a \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x-a}{a} & 2a \leqq x \leqq 3a \\ \frac{1}{2} & a \leqq x \leqq 2a \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a} & 0 \leqq x \leqq a \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases} \qquad a > 0$$

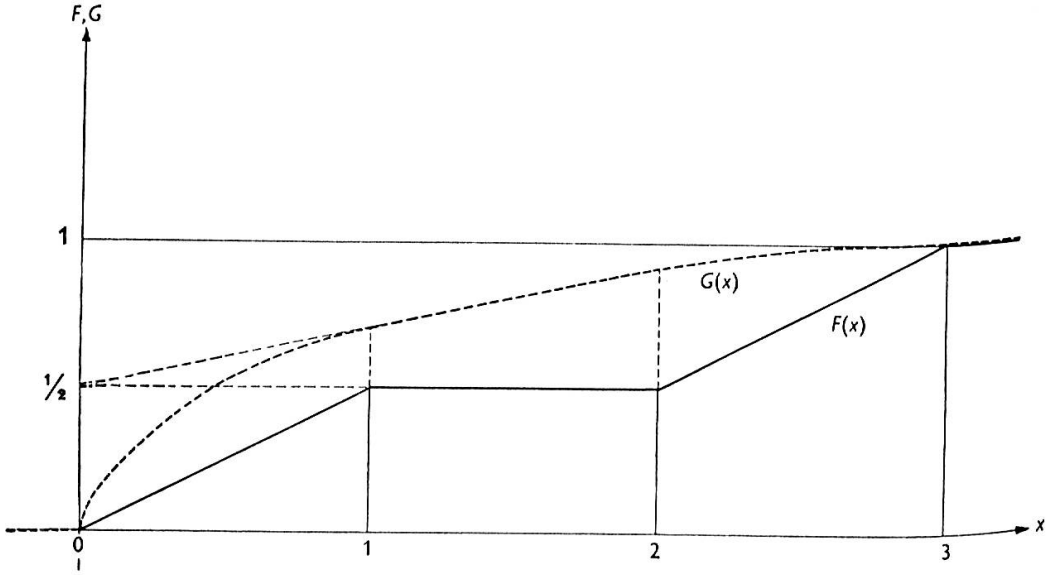
Durch elementare Rechnung erhält man:

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x \geqq 3a \\ \frac{x}{2a}(\log 3a - \log x) + \frac{x}{2a} - \frac{1}{2} & 2a \leqq x \leqq 3a \\ \frac{x}{2a}(\log 3a - \log 2a) + \frac{1}{2} & a \leqq x \leqq 2a \\ \frac{x}{2a}(\log a - \log x) + \frac{x}{2a}(1 + \log 3a - \log 2a) & 0 \leqq x \leqq a \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

$G'(x)$ ist für $x \neq 0$ stetig und im Intervall $(a, 2a)$ konstant. Dies muss auch so sein, denn $F(x)$ ist daselbst auch überall stetig.

$$G'_+(0) = \infty, \qquad G'_-(0) = 0.$$

Zum nähern Verlaufe der Kurve $G(x)$ siehe Tabelle 2.



$a = 1$ Tabelle 2

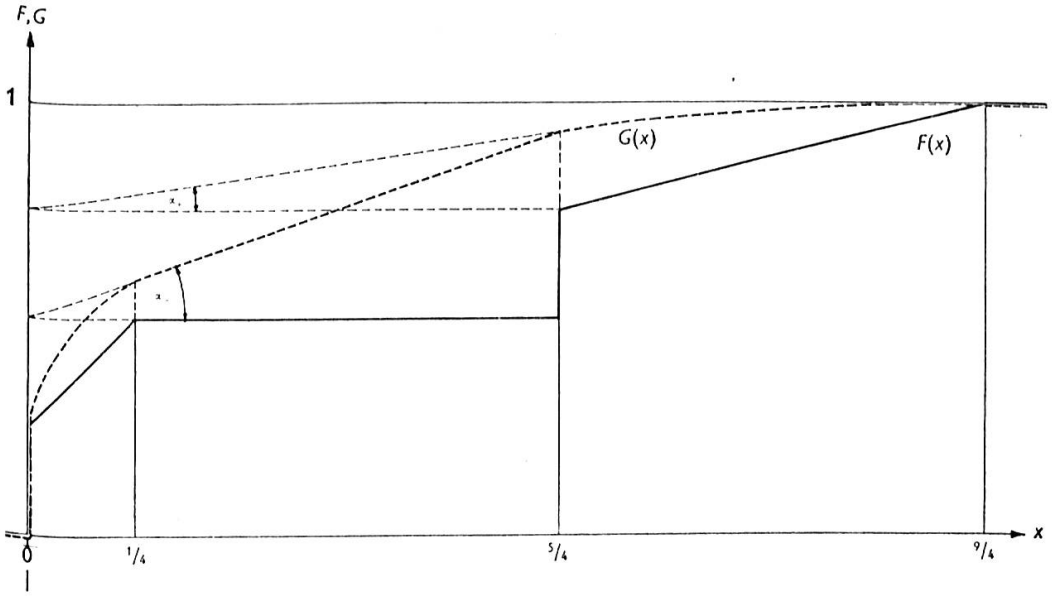
2. Beispiel:

$F(x)$ besitze an den Stellen $x = 0$ und $x = \frac{5}{4}$ Unstetigkeiten und sei sonst wie folgt definiert:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ x + \frac{1}{4} & 0 < x \leqq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4}(x + \frac{7}{4}) & \frac{5}{4} < x \leqq \frac{9}{4} \\ 1 & x \geqq \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x \geqq \frac{9}{4} \\ \frac{x}{4}(\log \frac{9}{4} - \log x + 1) + \frac{7}{16} & \frac{5}{4} \leqq x \leqq \frac{9}{4} \\ x\left[\frac{1}{4}(\log \frac{9}{4} - \log \frac{5}{4}) + \frac{1}{5}\right] + \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4} \\ x\left[\log \frac{1}{4} - \log x + \frac{1}{4}(\log \frac{9}{4} - \log \frac{5}{4}) + \frac{6}{5}\right] + \frac{1}{4} & 0 < x \leqq \frac{1}{4} \\ 0 & x \leqq 0 \end{cases}$$

Beachte in Tabelle 3 die Konstruktion bzw. Berechnung der Rechts- und Linksableitung von $G(x)$ im Unstetigkeitspunkt $x = \frac{5}{4}$.



$$G(x) = \begin{cases} x \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{F(u)}{u^2}\, du, & x > 0 \\ -x \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{F(u)}{u^2}\, du, & x < 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_+ &= \frac{G(\frac{5}{4}) - F(\frac{5}{4}+0)}{\frac{5}{4}} \\ \operatorname{tg} \alpha_- &= \frac{G(\frac{5}{4}) - F(\frac{5}{4}-0)}{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Tabelle 3

§ 6. Verallgemeinerungen der Giraultschen Transformation

Sei $\varphi(z)$ eine charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört. Dann ist nach (2.1) bzw. (2.2) auch

$$\Phi^{(p)}(z) = \int_0^1 \varphi(z \cdot \alpha)\, d(\alpha^p), \quad 0 < p < \infty, \tag{6.1}$$

eine charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion $G^{(p)}(x)$ gehört, wobei:

$$G^{(p)}(x) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{\alpha}\right) d(\alpha^p). \tag{6.2}$$

$F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ hat für jedes $x \neq 0$, als Funktion von α betrachtet, $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$, höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten. Ausserdem ist α^p für jedes $p > 0$ eine stetige Funktion in $[0,1]$. Somit existiert das Integral (6.2) im Riemannschen Sinne für jedes $x \neq 0$.

Durch (6.2) wird also einer Verteilungsfunktion $F(x)$ eine einparametrige Schar $G^{(p)}(x)$ von neuen Verteilungsfunktionen zugeordnet. Wir nennen sie die p-Verteilungsfunktionen.

Die Giraultsche Transformation ergibt sich als der Spezialfall $p = 1$. (6.1) lässt sich mit der Variablensubstitution $z \cdot \alpha = u$ wie folgt umformen:

$$\Phi^{(p)}(z) = \begin{cases} \dfrac{p}{z^p} \displaystyle\int_0^z \varphi(u)\, u^{p-1}\, du\,, & z > 0\,; \\[2ex] \dfrac{-p}{(-z)^p} \displaystyle\int_0^z \varphi(u)\, (-u)^{p-1}\, du\,, & z < 0\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

Analog folgt aus (6.2) mit $\dfrac{x}{\alpha} = u$:

$$G^{(p)}(x) = \begin{cases} p\, x^p \displaystyle\int_x^\infty \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du\,, & x > 0\,; \\[2ex] p\, (-x)^p \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{F(u)}{(-u)^{p+1}}\, du\,, & x < 0\,. \end{cases} \tag{6.4}$$

$G^{(p)}(x)$ ist eine stetige Verteilungsfunktion für $x \neq 0$. Im Nullpunkt gilt wieder wie in (4.5):

$$G^{(p)}(+0) = F(+0)\,, \qquad G^{(p)}(-0) = F(-0)\,. \tag{6.5}$$

(6.4) kann auch auf eine allgemeine Verteilungsfunktion angewandt werden. Dann gilt:

$$G^{(p)}(+\infty) = F(+\infty)\,, \qquad G^{(p)}(-\infty) = F(-\infty)\,. \tag{6.6}$$

Den Beweis obiger Relationen geben wir in einem andern Zusammenhange am Ende von § 7.

Aus (6.4) folgt noch ohne weiteres:

$$\begin{aligned} G^{(p)}(x) &\geqq p\, x^p F(x+0) \int_x^\infty \frac{du}{u^{p+1}} = F(x+0)\,, & x > 0\,; \\ G^{(p)}(x) &\leqq p\, (-x)^p F(x-0) \int_{-\infty}^x \frac{du}{(-u)^{p+1}} = F(x-0)\,, & x < 0\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Weiter besitzt $G^{(p)}(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt von $F(x)$ eine erste Ableitung:

$$\frac{d}{dx} G^{(p)}(x) = p \frac{G^{(p)}(x) - F(x)}{x}, \qquad x \neq 0. \tag{6.8}$$

In einem Unstetigkeitspunkte von $F(x)$ existiert eine Rechts- bzw. Linksableitung von $G^{(p)}(x)$. Im Nullpunkt brauchen dieselben jedoch nicht immer zu existieren. Man kann leicht zeigen dass:

$$\lim_{x \to +0} x^{p-1} \int_x^\infty \frac{F(u) - F(+0)}{u^{p+1}} du = A < \infty \tag{6.9}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $G_+^{(p)\prime}(0)$ ist.

Sei $x \neq 0$ ein Stetigkeitspunkt von $F(x)$, dann folgt nach (6.8):

$$F(x) = \frac{1}{p} \left[p\, G^{(p)}(x) - x\, G^{(p)\prime}(x) \right]. \tag{6.10}$$

F(x) ist somit in jedem Stetigkeitspunkt durch $G^{(p)}(x)$ eindeutig bestimmt. Da wir $F(x)$ wie immer als linksstetig voraussetzen, besteht also zwischen $F(x)$ und $G^{(p)}(x)$ eine ein-eindeutige Beziehung.

Bemerkung über unimodale Verteilungen

Wir haben bereits gezeigt, dass die Verteilungsfunktion $G^{(1)}(x)$ unimodal mit Vertex Null ist.

In der Folge geben wir eine neue Klasse von unimodalen Verteilungsfunktionen an:

Satz 1.

Sei $F(x)$ eine beliebige Verteilungsfunktion. Dann ist die Gesamtheit der durch (6.4) definierten Verteilungsfunktionen $G^{(p)}(x)$ für alle p $(0 < p < 1)$ unimodal mit Vertex Null.

Bevor wir den Beweis durchführen, sei noch vermerkt, dass man durch einfache Beispiele zeigen kann, dass obiger Satz im Falle $p > 1$ nicht mehr richtig ist.

Beweis:

Wir beschränken uns auf den Beweis der Konkavität für $x > 0$. Die Konvexität für $x < 0$ beweist sich ganz analog.

a) $x > 0$ derart, dass $F(x+0) - F(x-0) > 0$, dann folgt nach (6.4):

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{d_+}{dx} G^{(p)}(x) = p\, x^{p-1} \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du - \frac{F(x+0)}{x}.$$

Eine entsprechende Relation ergibt sich für die Linksableitung. Durch Differenzenbildung folgt dann:

$$\frac{1}{p}\left[\frac{d_+}{dx} G^{(p)}(x) - \frac{d_-}{dx} G^{(p)}(x)\right] = \frac{F(x-0) - F(x+0)}{x} \leqq 0.$$

b) Seien nun $x > 0$ und $(x+\Delta)$, $\Delta > 0$ Stetigkeitspunkte von $F(x)$.

Zu zeigen:
$$D = \frac{d}{dx} G^{(p)}(x+\Delta) - \frac{d}{dx} G^{(p)}(x) \leqq 0,$$

$$D = p(x+\Delta)^{p-1} \int_{x+\Delta}^\infty \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du - \frac{F(x+\Delta)}{x+\Delta} - p\, x^{p-1} \int_x^\infty \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du + \frac{F(x)}{x} =$$

$$= -p\, x^{p-1} \int_x^{x+\Delta} \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du + p\left[(x+\Delta)^{p-1} - x^{p-1}\right] \int_{x+\Delta}^\infty \frac{F(u)}{u^{p+1}}\, du - \frac{F(x+\Delta)}{x+\Delta} + \frac{F(x)}{x}.$$

Da nach Voraussetzung $0 < p < 1$ ist obige Summe kleiner als:

$$x^{p-1} F(x) \int_x^{x+\Delta} \frac{du}{u^{p+1}} + p\left[(x+\Delta)^{p-1} - x^{p-1}\right] F(x+\Delta) \int_{x+\Delta}^\infty \frac{du}{u^{p+1}} - \frac{F(x+\Delta)}{x+\Delta} + \frac{F(x)}{x} =$$

$$= \left[F(x) - F(x+\Delta)\right] \left(\frac{x}{x+\Delta}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{x+\Delta} \leqq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Verhalten der $G^{(p)}(x)$ für grosse Werte des Parameters p

Sei $F(x)$ eine nicht unimodale Verteilungsfunktion. Es gibt dann eine Schranke $A > 0$, derart, dass für $p > A$ alle $G^{(p)}(x)$ nicht unimodal sind.

Beweis:

Gäbe es keine solche Schranke A, so könnte man eine unbeschränkt wachsende Folge $\{p_n\}$ von Parameterwerten angeben, für die $G^{(p_n)}(x)$ unimodal wäre. Nach einem Satze von Lapin [4, Seite 160] müsste dann

$$\lim_{n \to \infty} G^{(p_n)}(x) = G(x)$$

auch unimodal sein.

Andererseits ist aber $G(x)$ gleich der ursprünglichen Verteilungsfunktion $F(x)$, denn:

$$\lim_{p \to \infty} \Phi^{(p)}(z) = \varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dF(x).$$

Nach (6.3):

$$\Phi^{(p)}(z) = \frac{p}{z^p} \int_0^{z-\delta} \varphi(u)\, u^{p-1}\, du + \frac{p}{z^p} \int_{z-\delta}^{z} \varphi(u)\, u^{p-1}\, du; \quad z > 0, \quad \delta > 0.$$

Beim zweiten Integral auf der rechten Seite benützen wir den 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung. Dazu zerlegen wir $\varphi(u)$ in Real- und Imaginärteil:

$$\varphi(u) = \Re\, \varphi(u) + i\, \Im\, \varphi(u) = r(u) + i\, h(u),$$

$$\Phi^{(p)}(z) = \frac{p}{z} \int_0^{z-\delta} \varphi(u) \left(\frac{u}{z}\right)^{p-1} du + \frac{p}{z^p} \left[r(z - \vartheta_1 \delta) + i\, h(z - \vartheta_2 \delta)\right] \int_{z-\delta}^{z} u^{p-1}\, du,$$

ϑ_1 und ϑ_2 sind Zahlen zwischen null und eins. Für noch so kleines $\delta > 0$ gilt daher:

$$\lim_{p \to \infty} \Phi^{(p)}(z) = r(z - \vartheta_1 \delta) + i\, h(z - \vartheta_2 \delta),$$

dann folgt

$$\lim_{p \to \infty} \Phi^{(p)}(z) = r(z) + i\, h(z) = \varphi(z), \qquad \text{q. e. d.}$$

Beziehung zwischen den Momenten

Sei m_k das k-te Moment bezüglich Nullpunkt der Verteilung, die zur charakteristischen Funktion $\varphi(z)$ gehört. Ebenso $M_{k,p}$ das k-te Moment von $\Phi^{(p)}(z)$.

Satz 2.

Aus der Existenz von m_k (k natürliche Zahl) folgt diejenige von $M_{k,p}$ für jedes $0 < p < \infty$, und es gilt:

$$M_{k,p} = \frac{p}{k+p} m_k. \tag{6.12}$$

Beweis:

k-tes Moment von $\varphi(z \cdot \alpha) = m_{k,\alpha} = \alpha^k m_k$.

Da Voraussetzung (2.11) erfüllt ist, folgt gemäss (2.8):

$$M_{k,p} = m_k \int_0^1 \alpha^k \, d(\alpha^p) = p \, m_k \int_0^1 \alpha^{p+k-1} \, d\alpha = \frac{p}{k+p} m_k.$$

Überdies gilt: $$\lim_{p \to \infty} M_{k,p} = m_k.$$

In einem folgenden Satz werden wir die Invarianzeigenschaft der Pólyafunktionen bei der Transformation (4.2), verallgemeinern.

Satz 3.

Wenn $\varphi(z)$ für $z \neq 0$ eine stetig differenzierbare Pólyafunktion ist, dann ist die durch (6.3) definierte charakteristische Funktion eine zweimal stetig differenzierbare Pólyafunktion.

Beweis:

Nach (6.3) $$\Phi^{(p)}(z) = \frac{p}{z^p} \int_0^z \varphi(u) \, u^{p-1} \, du, \quad 0 < p < \infty;$$

$$z > 0, \quad z^p \frac{d}{dz} \Phi^{(p)}(z) + p \, z^{p-1} \Phi^{(p)}(z) = p \, \varphi(z) \, z^{p-1},$$

dann folgt

$$\frac{d}{dz} \Phi^{(p)}(z) = \frac{p \, z^p \, \varphi(z) - p^2 \int_0^z \varphi(u) \, u^{p-1} \, du}{z^{p+1}} \leqq \frac{p \, z^p \, \varphi(z) - \varphi(z) \, p^2 \int_0^z u^{p-1} \, du}{z^{p+1}} = 0;$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \Phi^{(p)}(z) = \frac{1}{z^{2p+2}} \left[p \, z^{2p+1} \varphi'(z) - p(p+1) \, z^{2p} \varphi(z) + p^2 (p+1) \, z^p \int_0^z \varphi(u) \, u^{p-1} \, du \right].$$

Durch partielle Integration ergibt sich:

$$\int_0^z \varphi(u)\, u^{p-1}\, du = \frac{\varphi(z)\, z^p}{p} - \frac{1}{p} \int_0^z \varphi'(u)\, u^p\, du;$$

$$\frac{d}{dz^2}\, \Phi^{(p)}(z) = \frac{1}{z^{2p+2}} \left[p\, z^{2p+1}\, \varphi'(z) - p\,(p+1)\, z^p \int_0^z \varphi'(u)\, u^p\, du \right].$$

Da $\varphi'(z)$ stetig ist, folgt nach dem 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\int_0^z \varphi'(u)\, u^p\, du = \varphi'(\zeta) \int_0^z u^p\, du = \varphi'(\zeta)\, \frac{z^{p+1}}{p+1}, \quad 0 < \zeta < z.$$

Nach Voraussetzung ist aber $\varphi'(z)$ für $z > 0$ eine zunehmende Funktion. Deshalb folgt: $\varphi'(\zeta) < \varphi'(z)$ und endlich:

$$\frac{d}{dz^2}\, \Phi(z) = \frac{p}{z}\, [\varphi'(z) - \varphi'(\zeta)] \geqq 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

Siehe auch [9a, S. 290].

§ 7. Erweiterung der p-Verteilungen auf negative Werte des Parameters

Selbstverständlich können wir eine Ausdehnung der Transformation (6.1) nicht durchführen, indem wir einfach p durch $-p$ ersetzen. In diesem Falle würde ja das Integral (6.1) im Nullpunkt divergieren. Die Verallgemeinerung gelingt aber auf folgendem Umwege:

Sei $\varphi(z)$ eine beliebige charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört. Dann ist sicher auch die folgende Funktion eine charakteristische Funktion:

$$\Psi^{(1/p)}(z) = \int_0^1 \varphi(z \cdot \alpha^{1/p})\, d\alpha, \qquad 0 < p < \infty. \qquad (7.1)$$

Mit der Substitution $z \cdot \alpha^{1/p} = u$ folgt:

$$\Psi^{(1/p)}(z) = \Phi^{(p)}(z) = \begin{cases} \dfrac{p}{z^p} \displaystyle\int_0^z \varphi(u)\, u^{p-1}\, du, & z > 0; \\[2ex] \dfrac{-p}{(-z)^p} \displaystyle\int_0^z \varphi(u)\, (-u)^{p-1}\, du, & z < 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Jede Φ-Funktion lässt sich als Ψ-Funktion schreiben, indem man vom Parameter p zum reziproken Wert übergeht, wie aus (7.2) ersichtlich ist.

(7.1) lässt sich nun ohne weiteres auf negative p-Werte ausdehnen:

$$\Psi^{(-1/p)}(z) = \int_0^1 \varphi(z \cdot \alpha^{-1/p})\, d\alpha, \quad 0 < p < \infty. \tag{7.3}$$

Mit $\dfrac{z}{\alpha^{1/p}} = u$ folgt dann:

$$\Psi^{(-1/p)}(z) = \Phi^{(-p)}(z) = \begin{cases} p\, z^p \displaystyle\int_z^\infty \frac{\varphi(u)}{u^{p+1}}\, du, & z > 0; \\[2ex] p\,(-z)^p \displaystyle\int_{-\infty}^z \frac{\varphi(u)}{(-u)^{p+1}}\, du, & z < 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Die zu $\Phi^{(-p)}(z)$ gehörige Verteilungsfunktion $G^{(-p)}(x)$ heisst:

$$G^{(-p)}(x) = \int_0^1 F(x \cdot \alpha^{1/p})\, d\alpha = \begin{cases} \dfrac{p}{x^p} \displaystyle\int_0^x F(u)\, u^{p-1}\, du, & x > 0; \\[2ex] \dfrac{-p}{(-x)^p} \displaystyle\int_0^x F(u)\, (-u)^{p-1}\, du, & x < 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

$G^{(-p)}(x)$ ist für $x \neq 0$ eine stetige Funktion. Im Nullpunkt gilt:

$$G^{(-p)}(+0) = F(+0), \qquad G^{(-p)}(-0) = F(-0). \tag{7.6}$$

Für eine allgemeine Verteilungsfunktion gilt:

$$G^{(-p)}(+\infty) = F(+\infty), \qquad G^{(-p)}(-\infty) = F(-\infty). \tag{7.6a}$$

(7.5) besitzt in jedem Stetigkeitspunkt von $F(x)$ eine 1. Ableitung, nämlich:

$$\frac{d}{dx} G^{(-p)}(x) = p \frac{F(x) - G^{(-p)}(x)}{x}, \quad x \neq 0. \tag{7.7}$$

In einem Unstetigkeitspunkt von $F(x)$ existiert eine Rechts- und eine Linksableitung von $G^{(-p)}(x)$:

$$\frac{d_+}{dx} G^{(-p)}(x) = p \frac{F(x+0) - G^{(-p)}(x)}{x}, \quad \frac{d_-}{dx} G^{(-p)}(x) = p \frac{F(x-0) - G^{(-p)}(x)}{x}. \tag{7.7a}$$

In Satz 3, § 6, haben wir gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen die Integraltransformation (6.1) Pólyafunktionen wieder in solche überführt. Dasselbe gilt auch für die Transformation (7.4). Doch dieselbe führt noch viel allgemeinere reelle Funktionen in Pólyafunktionen über.

Satz 1a.

Sei $\varphi(z)$ eine reelle Funktion, definiert in $-\infty \leqq z \leqq +\infty$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(E) \begin{cases} \varphi(0) = 1, \quad \varphi(z) \geqq 0, \quad \varphi(z) = \varphi(-z), \quad \text{für alle } z; \\ \varphi(z+\Delta) \leqq \varphi(z), \quad \text{für alle } z > 0 \text{ und } \Delta > 0. \end{cases}$$

Behauptung:

Die nach (7.4) transformierten Funktionen sind für alle $p (0 < p \leqq 1)$ Pólyafunktionen.

Beweis:

Sei $z > 0$ ein Stetigkeitspunkt von $\varphi(z)$, dann folgt:

$$\frac{d}{dz} \Phi(z) = p \left[p z^{p-1} \int_z^\infty \frac{\varphi(u)}{u^{p+1}} - \frac{\varphi(z)}{z} \right] \leqq 0.$$

Sind $z > 0$ und $z + \Delta$ Stetigkeitspunkte von $\varphi(z)$, so kann man analog wie beim Beweise von Satz 1, § 6, zeigen, dass für $0 < p \leqq 1$:

$$\Phi'(z+\Delta) - \Phi'(z) \geqq 0, \quad \text{für alle } z > 0 \text{ und } \Delta > 0.$$

Satz 1b.

Sei $\Phi(z)$ eine Pólyafunktion und $p \geqq 1$ eine beliebige vorgegebene Zahl.

Behauptung:

$$\varphi(z) = \frac{1}{p}\left[p\,\Phi(z) - z\,\Phi'(z)\right] \tag{7.8}$$

ist eine Funktion mit den Eigenschaften (E) und es gilt:

$$\Phi(z) = \Phi^{(-p)}(z) = p\,z^p \int_z^\infty \frac{\varphi(u)}{u^{p+1}}\,du, \quad \text{für } z > 0. \tag{7.8a}$$

Beweis:

$$\varphi(z+0) - \varphi(z-0) = \frac{z}{p}\left[\Phi'_-(z) - \Phi'_+(z)\right] \leqq 0.$$

$\varphi(z)$ hat also nur Unstetigkeiten 1. Art und diese treten höchstens abzählbar oft auf [11, S. 286]. Seien $z > 0$ und $z + \Delta$ Stetigkeitspunkte von $\Phi'(z)$, dann folgt:

$$\frac{(z+\Delta) - \varphi(z)}{\Delta} = \frac{\Phi(z+\Delta) - \Phi(z)}{\Delta} - \frac{\Phi'(z+\Delta)}{p} + \frac{z}{\Delta\,p}\left[\Phi'(z) - \Phi'(z+\Delta)\right] \lessgtr 0,$$

da nach Voraussetzung $\Phi(z)$ eine konvexe Funktion in $z > 0$ ist und $p \geqq 1$. $\varphi(z)$ ist somit für $z > 0$ eine monoton abnehmende Funktion. Weiter ist:

$$\lim_{z \to 0} \varphi(z) = \lim_{z \to 0} \Phi(z) = 1,$$

denn:

$$\lim_{z \to 0} -z\,\Phi'(z) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{z \to 0} -z\,\Phi'(z) \leqq \lim_{z \to 0} 1 - \Phi(z) = 0.$$

Im übrigen sieht man leicht ein, dass $\varphi(z) \geqq 0$, $\varphi(z) = \varphi(-z)$. $\varphi(z)$ besitzt also die Eigenschaften (E).

Wir wollen nun noch (7.8a) beweisen:

$$\Phi^{(-p)}(z) = p\,z^p \int_z^\infty \frac{\Phi(u) - \frac{u}{p}\,\Phi'(u)}{u^{p+1}}\,du = p\,z^p \int_z^\infty \frac{\Phi(u)}{u^{p+1}}\,du - z^p \int_z^\infty \frac{\Phi'(u)}{u^p}\,du$$

$$= p\,z^p \int_z^\infty \frac{\Phi(u)}{u^{p+1}}\,du - z^p \left.\frac{\Phi(u)}{u^p}\right|_{u=z}^{u=\infty} - p\,z^p \int_z^\infty \frac{\Phi(u)}{u^{p+1}}\,du = \Phi(z), \qquad \text{q. e. d.}$$

Satz 2.

Wenn $\varphi(z)$ eine reelle, positive charakteristische Funktion ist, die für $z > 0$ nicht zunehmend ist, dann gehört sie zu einer für alle $x \neq 0$ stetigen Verteilungsfunktion.

Beweis:

$\Phi^{(-1)}(z)$ ist nach Satz 1 eine Pólyafunktion, die zur Verteilungsfunktion

$$G^{(-1)}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x F(u)\, du \tag{7.9}$$

gehört.

Bekanntlich besitzt aber eine zu einer Pólyafunktion gehörige Verteilungsfunktion für $x \neq 0$ eine stetige erste Ableitung.

$$\frac{d}{dx} G^{(-1)}(x) = \frac{F(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x F(u)\, du, \quad x \neq 0.$$

Die Differenz auf der rechten Seite kann aber nur dann eine stetige Funktion sein, wenn $F(x)$ stetig ist, quod erat demonstrandum.

Beziehung zwischen den Momenten

Gemäss (7.4) folgt:

$$\frac{d}{dz} \Phi^{(-p)}(z) = p^2 z^{p-1} \int_z^\infty \frac{\varphi(u) - \varphi(z)}{u^{p+1}}\, du, \quad z > 0. \tag{7.10}$$

Setzen wir $p = 1$, so folgt:

$$\frac{d}{dz} \Phi^{(-1)}(z) = \int_z^\infty \frac{\varphi(u) - \varphi(z)}{u^2}\, du, \quad z > 0. \tag{7.11a}$$

Die Rechtsableitung von $\Phi^{(-1)}(z)$ im Nullpunkt existiert dann und nur dann, wenn

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u) - 1}{u^2}\, du \tag{7.11b}$$

existiert.

Satz 3.

Die zu der charakteristischen Funktion $\Phi^{(-1)}(z)$ gehörige Verteilungsfunktion besitzt keine Momente bezüglich dem Nullpunkt.

Beweis:

Sei $\varphi(z)$ eine beliebige charakteristische Funktion, deren 1. Moment bezüglich Nullpunkt existieren soll

$$\varphi(z) = \Re\,\varphi(z) + i\,\Im\,\varphi(z) = r(z) + i\,h(z)\,.$$

$$\Phi^{(-1)}(z) = z\int_z^\infty \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = z\left[\int_z^\infty \frac{r(u)}{u^2}\,du + i\int_z^\infty \frac{h(u)}{u^2}\,du\right] = R(z) + i\,H(z)\,.$$

$$\begin{aligned} \frac{d_+}{dz}\,\Phi^{(-1)}(z)\Big|_{z=0} &= \int_0^\infty \frac{r(u)-1}{u^2}\,du + i\int_0^\infty \frac{h(u)}{u^2}\,du\,, \\ \frac{d_-}{dz}\,\Phi^{(-1)}(z)\Big|_{z=0} &= -\int_0^\infty \frac{r(u)-1}{u^2}\,du + i\int_0^\infty \frac{h(u)}{u^2}\,du\,. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Aus der Existenz der 1. Ableitung von $\Phi^{(-1)}(z)$ im Nullpunkt, folgt durch Differenzenbildung der Gleichungen (7.12):

$$\int_0^\infty \frac{r(u)-1}{u^2}\,du = 0\,. \tag{7.12a}$$

Dies ist aber nicht möglich, denn $r(z)$ ist eine reelle charakteristische Funktion und $r(z)-1 \leqq 0$. $r(z)-1 = 0$ ist nur möglich auf einer nicht überall dichten Punktmenge in $z \geqq 0$, denn andererseits wäre $r(z) \equiv 1$, was wir ausschliessen wollen. Es gibt somit ein Intervall $\Delta \in [0,\infty]$ für das $r(z)-1 < 0$. Integral (7.12a) ist also kleiner als Null, quod erat demonstrandum.

Beispiel:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+z^2}\,, \qquad \varphi'(0) = 0\,.$$

$$z > 0, \quad \Phi^{(-1)}(z) = z \int_z^\infty \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u^2} du = z \left[- \int_z^\infty \frac{du}{1+u^2} + \int_z^\infty \frac{du}{u^2} \right]$$

$$= z \left[\operatorname{arc\,tg} z - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{z} \right],$$

gemäss (7.11b) folgt:

$$\Phi'_+(0) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Phi'_-(0) = +\frac{\pi}{2}.$$

Bemerkung:

Die Transformation (6.1) kann auch durch folgende Verallgemeinerung der Funktion $V(\alpha) = \alpha^p$ erweitert werden.

Sei $\varphi(z)$ eine beliebige charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört. $V(\alpha)$ ist eine nicht abnehmende stetige Funktion in $0 \leqq \alpha \leqq 1$ mit $V(0) = 0$ und $V(1) = 1$. Dann ist auch

$$\Phi(z) = \int_0^1 \varphi(z \cdot \alpha)\, dV(\alpha) \tag{7.13}$$

eine charakteristische Funktion, die zur Verteilungsfunktion

$$G(x) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{\alpha}\right) dV(\alpha) \tag{7.13a}$$

gehört.

Wir werden nun sehen, dass sich einige Eigenschaften der p-Verteilungsfunktionen auf obige Transformation übertragen lassen.

Da für $x > 0$, $F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \geqq F(x+0)$; und für $x < 0$, $F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqq F(x-0)$, für alle $0 \leqq \alpha < 1$, folgt:

$$\begin{aligned} x > 0, \quad & 1 \geqq G(x) \geqq F(x+0); \\ x > 0, \quad & 0 \leqq G(x) \leqq F(x-0). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Im weitern ist $G(x)$ wieder eine stetige Verteilungsfunktion für $x \neq 0$. Im Nullpunkt, bzw. im Unendlichen gilt:

$$\begin{aligned} G(+0) &= F(+0), \quad & G(-0) &= F(-0); \\ G(+\infty) &= F+\infty), \quad & G(-\infty) &= F(-\infty). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Beweis:

Zu zeigen, dass für eine beliebige Nullfolge $\{\Delta_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} G(x+\Delta_n) - G(x) = 0, \qquad \text{für alle } x \neq 0.$$

x fest, $\quad G(x+\Delta_n) - G(x) =$

$$= \int_0^1 \left[F\left(\frac{x+\Delta_n}{\alpha}\right) - F\left(\frac{x}{\alpha}\right) \right] dV(\alpha) = \int_0^1 [\overline{F}_\alpha(x+\Delta_n) - \overline{F}_\alpha(x)]\, dV(\alpha).$$

$F(x)$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten. Ein fester Wert von x ist deshalb für fast alle α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$, d. h. mit Ausnahme von abzählbar vielen, ein Stetigkeitspunkt von $F\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \overline{F}_\alpha(x)$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}_\alpha(x+\Delta_n) - \overline{F}_\alpha(x) = 0, \quad \text{für fast alle } \alpha \in [0,1].$$

Nach dem Theorem von Lebesgue folgt dann die Behauptung ohne weiteres. Ferner folgt nach den gleichen Überlegungen:

$$G(+0) - F(+0) = \lim_{x\to+0} \int_0^1 \left[F\left(\frac{x}{\alpha}\right) - F(+0) \right] dV(\alpha) = 0.$$

Ähnlich verifiziert man die andern Gleichheiten unter (7.15). Damit sind auch (6.5), (6.6), (7.6) und (7.6a) bewiesen, denn diese ergeben sich als Spezialfälle von (7.15).

Iteration der Transformation $\int_0^1 \varphi(z\cdot\alpha)\, dV(\alpha)$

In diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, gegen welche Funktion eine beliebige charakteristische Funktion bei fortgesetzter Anwendung der Integraltransformation (7.13), strebt. Zur Abklärung dieser Frage ist es zweckmässig, die betrachtete Funktionenklasse wie folgt zu erweitern:

Voraussetzung:

a) $V(\alpha)$ ist eine nicht abnehmende Funktion in $0 \leqq \alpha \leqq 1$ mit $V(0) = 0$ und $V(1) = 1$.

Weiter soll ein Wert $\alpha_0 (0 < \alpha_0 < 1)$ existieren, so dass $V(\alpha_0) > 0$;

b) $f(z)$ ist eine reellwertige, beschränkte Funktion in $-\infty \leqq z \leqq +\infty$, stetig im Nullpunkt und $f(0) = 0$.

$f(z \cdot \alpha)$ ist V-integrierbar in α für jedes z.

Satz:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) \equiv f(0) = 0,$$

wobei

$$f_1(z) = T(f) = \int_0^1 f(z \cdot \alpha)\, dV(\alpha) \quad \text{und} \quad f_{i+1} = T(f_i), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Beweis:

Um die Iteration durchführen zu können, müssen wir voraussetzen, dass $f_1(z \cdot \alpha)$ für jedes z V-integrierbar in α ist.

1. $T(f)$ ist ein linearer und monotoner Integraloperator, d. h.
$T(f+g) = T(f) + T(g)$, $\quad T(cf) = cT(f)$ für jede Zahl c.
$T(f) \geqq 0$ wenn $f \geqq 0$, oder aus $f \leqq g$ folgt: $T(f) \leqq T(g)$.

2. Mit f ist auch $T(f)$ monoton abnehmend (bzw. monoton zunehmend), denn es gilt z. B. für $z > 0$:

$$k > 1, \quad f_1(kz) - f_1(z) = \int_0^1 \underbrace{[f(kz\alpha) - f(z\alpha)]}_{\leqq 0}\, dV(\alpha) \leqq 0.$$

3. Wenn $f(z)$ monoton abnehmend ist, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) \equiv f(0) = 0,$$

denn

$$z > 0, \quad f_{n+1}(z) - f_n(z) = \int_0^1 \underbrace{[f_n(z\alpha) - f_n(z)]}_{\geqq 0}\, dV(\alpha) \geqq 0.$$

Für $z > 0$ ist $\{f_n(z)\}$ eine monoton wachsende Folge von beschränkten Funktionen (entsprechend für $z < 0$ eine monoton abnehmende Folge von beschränkten Funktionen), konvergiert also gegen eine gewisse Funktion $g(z)$.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = g(z), \quad g(0) = 0.$$

Nach dem Theorem von Lebesgue folgt nun:

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(\lim_{n\to\infty} f_n) = T(g) \equiv g.$$

Die Grenzfunktion $g(z)$ ist somit das Fixelement bei der Transformation T, d. h. es muss sein:

$$\int_0^1 [g(z\alpha) - g(z)]\, dV(\alpha) = 0, \qquad \text{für alle } z.$$

$g(z)$ ist als Grenzfunktion von monoton abnehmenden Funktionen wieder monoton abnehmend, dann folgt:

$$z > 0, \quad g(z\alpha) - g(z) \geqq 0, \quad \text{für alle } 0 \leqq \alpha \leqq 1.$$

Sei $z > 0$ ein beliebiger, aber fester Wert, dann folgt:

$$0 = \int_0^1 [g(z\alpha) - g(z)]\, dV(\alpha) \geqq \int_0^\beta [g(z\alpha) - g(z)]\, dV(\alpha) \geqq [g(z\beta) - g(z)]\, V(\beta) \geqq 0,$$
$$\text{für } \alpha_0 \leqq \beta < 1.$$

Somit $$g(z\beta) = g(z), \qquad \text{für alle } 0 < z < A.$$

Da $f(z)$ nach Voraussetzung im Nullpunkt stetig ist, gilt das gleiche für die Grenzfunktion $g(z)$, und es folgt:

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} g(z\beta^n) = g(0) = 0, \quad \text{für alle } z > 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Für $z < 0$ folgt der Beweis analog.

4. Ist $f(z)$ eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften *b)*, dann nehmen wir für $z > 0$ eine nicht zunehmende, beschränkte Funktion $f^*(z)$ mit $f^*(z) \leqq f(z)$, z. B.

$$f^*(z) = \inf_{0 \leqq \xi \leqq z} f(\xi).$$

Ausserdem existiert eine nicht abnehmende Funktion $f^{**}(z)$ mit $f^{**}(z) \geqq f(z)$. Nach 1. und 3. folgt dann ohne weiteres:

$$z > 0, \quad 0 = \lim_{n\to\infty} f_n^*(z) \leqq \lim_{n\to\infty} f_n(z) \leqq \lim_{n\to\infty} f_n^{**}(z) = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

Spezialfall:

$$f(z) = \varphi(z) = \text{charakt. Funktion} = \Re\,\varphi(z) + i\,\Im\,\varphi(z) = r(z) + i\,h(z)\,.$$

$$r(0) = 1, \quad h(0) = 0, \quad |r(z)| \leqq 1 \text{ und } |h(z)| \leqq 1\,.$$

Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des obigen Satzes sind erfüllt, und es folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(0) \equiv 1$

mit

$$\varphi_1(z) = \int_0^1 \varphi(z\alpha)\,dV(\alpha) \quad \text{und} \quad \varphi_{i+1}(z) = \int_0^1 \varphi_i(z\alpha)\,dV(\alpha)\,.$$

Durch Iteration der Transformation (7.13) strebt die Folge der charakteristischen Funktionen $\varphi_n(z)$ gegen die charakteristische Funktion $\varphi(z) \equiv 1$.

§ 8. Schwache und vollständige Konvergenz von Verteilungsfunktionen

Wir betrachten Folgen von allgemeinen Verteilungsfunktionen und deren Grenzfunktionen.

Definition I.

Eine Folge von Verteilungsfunktionen $\{F_n(x)\}$ heisst im schwachen Sinne ($\xrightarrow{s}$) gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$ konvergent, wenn $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt von $F(x)$.

Definition II.

Eine Folge $\{F_n(x)\}$ konvergiert vollständig ($\xrightarrow{v}$) gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$, wenn $F_n(x) \xrightarrow{s} F(x)$ und zusätzlich:

$$F_n(+\infty) \to F(+\infty)\,, \qquad F_n(-\infty) \to F(-\infty)\,.$$

Sei $\varphi(z)$ die zu $F(x)$ gehörige allgemeine charakteristische Funktion. Im Zusammenhange mit der Konvergenz im schwachen Sinne führte M. Loève die sogenannte «integrierte charakteristische Funktion» ein, die wie folgt definiert ist:

$$\hat{\varphi}(z) = \int_0^z \varphi(u)\,du\,. \tag{8.1}$$

M. Loève [5a, S. 190] hat gezeigt, dass Konvergenz im schwachen, bzw. vollständigen Sinne einer Folge von Verteilungsfunktionen äquivalent ist mit der Konvergenz der zugehörigen integrierten charakteristischen Funktionen bzw. gewöhnlichen charakteristischen Funktionen.

Wir geben nun eine neue notwendige und hinreichende Bedingung an für schwache, bzw. vollständige Konvergenz:

Satz 1.

Es sei $F_n(x) \xrightarrow{s} F(x)$. Wir ordnen jetzt jeder Verteilungsfunktion $F_n(x)$ gemäss (6.4) die p-Transformierte $G_n^{(p)}(x)$ zu. Dann gilt:

$$G_n^{(p)}(x) \xrightarrow{s} G^{(p)}(x), \quad \text{für alle } 0 < p < \infty,$$

wobei $G^{(p)}(x)$ die p-Transformierte von $F(x)$ ist.

Beweis:

Wir können uns auf den Fall $x > 0$ beschränken, da der Beweis für $x < 0$ analog verläuft. Gemäss (6.4) folgt:

$$G_n^{(p)}(x) = p\,x^p \int_x^\infty \frac{F_n(u)}{u^{p+1}}\,du = -x^p \int_x^\infty F_n(u)\,d\left(\frac{1}{u^p}\right), \qquad x > 0.$$

Nach einer partiellen Integration ergibt sich:

$$G_n^{(p)}(x) = -x^p \left\{ \frac{F_n(u)}{u^p} \Bigg|_{u=x}^{u=\infty} - \int_x^\infty \frac{1}{u^p}\,dF_n(u) \right\} = -x^p \left\{ -\frac{F_n(x)}{x^p} - \int_x^\infty \frac{1}{u^p}\,dF_n(u) \right\}.$$

Um den Grenzübergang $n \to \infty$ ausführen zu können, benötigen wir das verallgemeinerte Lemma von Helly-Bray [5a, S. 181].

Lemma:

Sei $a > 0$ und $g(u)$ eine stetige Funktion im Intervall (a, ∞) mit $g(+\infty) = 0$.

Aus der Tatsache, dass $F_n(x) \xrightarrow{s} F(x)$, folgt dann:

$$\int_a^\infty g(u)\,dF_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^\infty g(u)\,dF(u).$$

In unserem Falle ist $g(u) = \dfrac{1}{u^p}$. Diese Funktion erfüllt für alle $0 < p < \infty$ die verlangte Bedingung, und es folgt:

$$G_n^{(p)}(x) = -x^p \left\{ \frac{-F(x)}{x^p} - \int_x^\infty \frac{1}{u^p}\,dF(u) \right\} = -x^p \left\{ \frac{F(u)}{u^p} \Bigg|_{u=x}^{u=\infty} - \int_x^\infty \frac{1}{u^p}\,dF(u) \right\} = G^{(p)}(x),$$

q. e. d.

Satz 1'.

Sei $\{F_n(x)\}$ eine Folge von Verteilungsfunktionen, derart, dass für ein bestimmtes p $(0 < p < \infty)$: $G_n^{(p)}(x) \xrightarrow{S} G^{(p)}(x)$, dann ist $F_n(x) \xrightarrow{S} F(x)$, und $F(x)$ ist in allen seinen Stetigkeitspunkten definiert durch:

$$F(x) = \frac{1}{p}\left[p\,G^{(p)}(x) - x\,\frac{d}{dx}\,(G^{(p)}(x))\right].$$

Beweis:

Da jede Folge von Verteilungsfunktionen im schwachen Sinne kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{F_{n'}(x)\}$ der Folge $\{F_n(x)\}$, so dass

$$F_{n'}(x) \xrightarrow{S} \overline{F}(x).$$

Auf Grund von Satz 1 folgt dann:

$$x > 0, \qquad G_{n'}^{(p)}(x) \xrightarrow{S} \overline{G}^{(p)}(x) = p\,x^p \int_x^\infty \frac{\overline{F}(u)}{u^{p+1}}\,du.$$

Nach Voraussetzung ist aber $G_n^{(p)}(x) \xrightarrow{S} G^{(p)}(x)$, das heisst jede Teilfolge der Folge $\{G_n^{(p)}(x)\}$ strebt gegen die gleiche Verteilungsfunktion $G^{(p)}(x)$, somit folgt:

$$\overline{G}^{(p)}(x) = G^{(p)}(x) = p\,x^p \int_x^\infty \frac{\overline{F}(u)}{u^{p+1}}\,du.$$

Nach (6.10) können wir $\overline{F}(x)$ in jedem Stetigkeitspunkt berechnen:

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{p}\left[p\,G^{(p)}(x) - x\,\frac{d}{dx}\,(G^{(p)}(x))\right] = F(x), \qquad \text{q. e. d.}$$

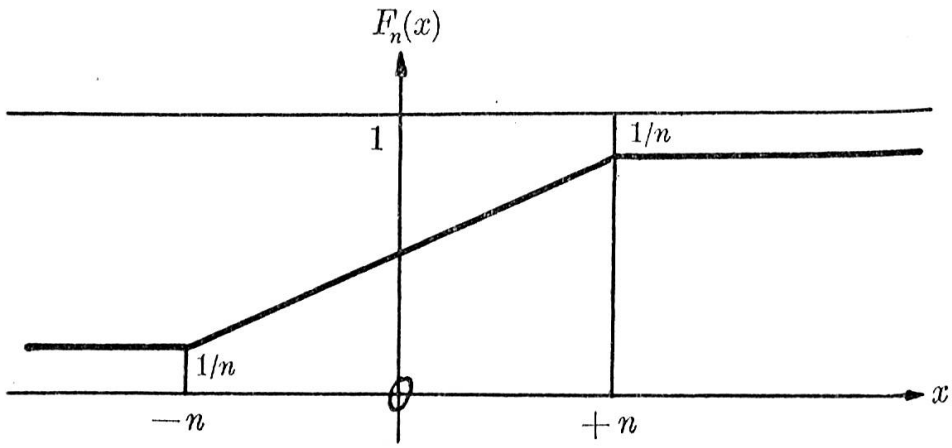
Zusatz:

Wegen (6.6) folgt ohne weiteres, dass die beiden zitierten Sätze 1 und 1' auch Gültigkeit haben, wenn man schwache durch vollständige Konvergenz ersetzt.

Beispiele:

1. Wir betrachten eine Folge von allgemeinen Verteilungsfunktionen, die wie folgt definiert sind:

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{n}, & x \geqq n \\ \dfrac{n-2}{2n^2}\, x + \dfrac{1}{2}, & |x| \leqq n \\ \dfrac{1}{n}, & x \leqq -n \end{cases}$$



Wie man leicht sieht, gilt: $F_n(x) \xrightarrow{s} F(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Wir werden nun zeigen, dass auch die Folge der gemäss (4.4) transformierten Verteilungsfunktionen $G_n(x)$ im schwachen Sinne konvergieren. Dabei können wir uns auf den Fall $x > 0$ beschränken. Man erhält:

$$G_n(x) = \begin{cases} x\left[\dfrac{n-2}{2n^2}(\log n - \log x) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right], & x \leqq n; \\ 1 - \dfrac{1}{n}, & x \geqq n. \end{cases}$$

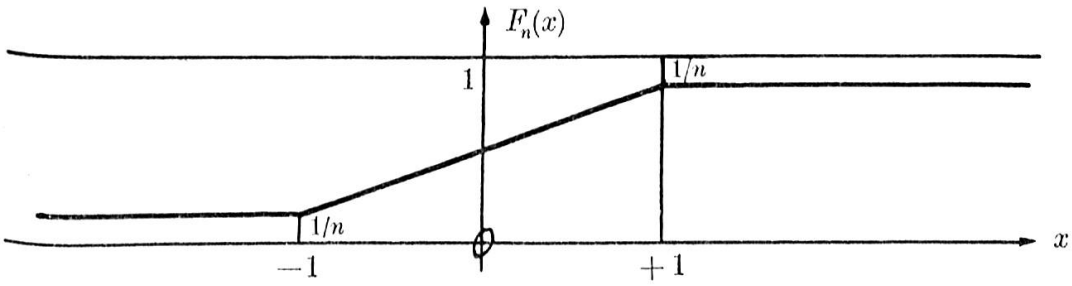
Für $0 < x < \infty$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} G_n(x) = G(x) \equiv \frac{1}{2}$.

Dies ist aber gerade die Transformierte von $F(x) \equiv \frac{1}{2}$. Ausserdem:

$$F_n(+\infty) \not\to F(+\infty), \qquad G_n(+\infty) \not\to G(+\infty).$$

2. Sei die Folge $\{F_n(x)\}$ wie folgt definiert:

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\left(x + \frac{n}{n-2}\right), & |x| \leqq 1 \\ 1 - \frac{1}{n}, & x \geqq 1 \\ \frac{1}{n}, & x \leqq -1 \end{cases}$$



Offenbar gilt:

$$F_n(x) \xrightarrow{v} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), & |x| \leqq 1 \\ 1, & x \geqq 1 \\ 0, & x \leqq -1 \end{cases}$$

Nach (4.4) folgt für $x > 0$:

$$G_n(x) = \begin{cases} x\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)(-\log x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 1 - \frac{1}{n}\right], & x \leqq 1; \\ 1 - \frac{1}{n}, & x \geqq 1. \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} G_n(x) = G(x) = \begin{cases} x\left[-\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\right], & x \leqq 1; \\ 1, & x \geqq 1. \end{cases}$$

$F(x)$ und $G(x)$ sind in der Tat nach (4.4) verknüpft, denn es gilt:

$$0 < x < 1, \quad G(x) = x\left[\int_x^1 \frac{\frac{1}{2}(u+1)}{u^2}\,du + \int_1^\infty \frac{du}{u^2}\right] =$$

$$= x\left[-\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + 1\right] = x\left[-\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\right].$$

Für $x \geqq 1$ gilt selbstverständlich die analoge Relation zwischen $F(x)$ und $G(x)$. Endlich ist:

$$F_n(+\infty) \to F(+\infty) = 1 \quad \text{und} \quad G_n(+\infty) \to G(+\infty) = 1.$$

Verallgemeinerung von Satz 1

Wir haben gezeigt, dass aus $F_n(x) \xrightarrow{S} F(x)$ folgt:

$$G_n^{(p)}(x) \xrightarrow{S} G^{(p)}(x), \qquad 0 < p < \infty.$$

Dabei waren die Funktionen $G_n^{(p)}(x)$ bzw. $G^{(p)}(x)$ nach (6.4) definiert. Ihre ursprüngliche Form ist aber nach (6.2):

$$G_n^{(p)}(x) = \int_0^1 F_n\left(\frac{x}{\alpha}\right) d(\alpha^p), \qquad G^{(p)}(x) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{\alpha}\right) d(\alpha^p).$$

Die Gesamtheit der Folgen von Verteilungsfunktionen $F_n\left(\frac{x}{\alpha}\right)$, $\alpha \in (0,1)$ wird nun wie folgt erweitert:

a) Mit D bezeichnen wir eine auf der reellen Achse überall dichte Punktmenge;

b) sei E eine im Lebesgueschen Sinne messbare lineare Punktmenge und

c) $V(\alpha)$ eine nicht abnehmende beschränkte Funktion in E, mit

$$\int_E dV(\alpha) = 1;$$

d) sei $F_n(x,\alpha)$ für fast alle $\alpha \in E$ (d. h. bis auf eine Menge vom V-Mass Null) eine Folge von Verteilungsfunktionen. Im übrigen sollen dann die folgenden Integrale im Lebesgue-Stieltjesschen Sinne existieren:

$$x \in D, \qquad \int_E F_n(x,\alpha)\, dV(\alpha) = G_n(x), \qquad n = 1, 2, \cdots$$

Voraussetzungen:

1. $F_n(x,\alpha) \xrightarrow{S} F(x,\alpha)$ für fast alle $\alpha \in E$.
2. Die Menge der α-Werte, für die ein beliebiger Wert $x \in D$ Unstetigkeitspunkt von $F(x,\alpha)$ ist, soll vom V-Mass null sein.

Behauptung: $\quad G_n(x) \xrightarrow{S} G(x) = \int_E F(x,\alpha)\, dV(\alpha).$

Beweis:

Gemäss 2. und 1. folgt:

$$x \in D, \qquad F_n(x,\alpha) \to F(x,\alpha) \qquad \text{für fast alle } \alpha \in E.$$

Da $|F_n(x,\alpha)| \leqq 1$ für $n = 1, 2, \ldots$ und fast alle $\alpha \in E$, folgt nach dem Theorem von Lebesgue:

$$x \in D, \qquad \int_E F_n(x,\alpha)\, dV(\alpha) = G_n(x) \to \int_E F(x,\alpha)\, dV(\alpha) = G(x),$$

q. e. d.

Im weitern ist $G(x)$ für $x \in D$ stetig, denn:

$$\lim_{\Delta \to 0} G(x+\Delta) - G(x) = \lim_{\Delta \to 0} \int_E [F(x+\Delta,\alpha) - F(x,\alpha)]\, dV(\alpha) = 0.$$

Satz 1 dieses § ergibt sich nun als der folgende Spezialfall:

$$F_n(x,\alpha) = F_n\left(\frac{x}{\alpha}\right), \qquad V(\alpha) = \alpha^p,$$

$$\text{für } 0 < p < \infty; \quad E = (0,1), \; D = \{x \neq 0\}.$$

Literaturverzeichnis

[1] *A. Cauchy:* Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables. C. R. Ac. Sci., 8. August 1853.

[2] *P. S. Laplace:* Théorie analytique des probabilités.

[3] *P. Lévy:* Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937.

[4] *Gnedenko und Kolmogorov:* Limit distributions for sums of independant random variables, übersetzt von K. L. Chung, Cambridge, 1954.

[5] *M. Loève:* Sur les fonctions aléatoires stationnaires de second ordre. Revue sci. 1945.

[5a] Probability theory, New York, 1955.

[6] *D. V. Widder:* The Laplace transform, Princeton, 1941.

[7] *R. Fortet:* Calcul des moments d'une fonction de répartition à partir de sa caractéristique. Bull. Sci. Math. 68, 1944.

[8] *S. Bochner:* Stable laws of probability and completely monotone functions. Duke math. J. Vol. 3, 1937.

[9] *M. Girault:* Transformation de fonctions caractéristiques par intégration. C. R. Ac. Sci., 31. Mai 1954.

[9a] Les fonctions caractéristiques et leurs transformations. Thèse, Paris, 1955.

[10] *G. Pólya:* Remark on characteristic functions. Proc. First. Berkeley Symp. on Stat. and Prob., 1949.

[11] *E. W. Hobson:* The theory of functions of a real variable.

[12] *H. Loeffel:* Intégration d'un ensemble de fonctions caractéristiques par rapport à un paramètre. C. R. Ac. Sci., 16. Mai 1955.

[12a] Convergence faible et complète d'une suite $\{F_n(x)\}$ et de la suite associée $G_n^{(p)}(x)$. C. R. Ac. Sci, 13. Juni 1955.