Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 56 (1956)

Artikel: Über Auslosungsversicherungen

Autor: Lukacs, Eugene

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966833

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über Auslosungsversicherungen

Von *Eugene Lukacs*, Washington, D. C.

In der vorliegenden Note werden versicherungstechnische Fragen behandelt, die im Zusammenhang mit Auslosungsversicherungen auftreten. Reine Sparversicherungen mit vorzeitiger Auslosung des Kapitals werden schon seit etwa 70 Jahren von den französischen Kapitalisationsgesellschaften betrieben; bei diesen handelt es sich technisch gesehen um eine Versicherung, die nach einer Sterbetafel mit konstanter Sterbenswahrscheinlichkeit (nämlich der Verlosungswahrscheinlichkeit) gerechnet werden.

Von diesen Kapitalisationsverträgen soll im folgenden nicht die Rede sein, sondern nur von Verlosungsversicherungen, bei denen die im Ab- und Erlebensfall zu leistende Versicherungssumme für den Fall der Auslosung vorzeitig zu zahlen ist. Die Möglichkeit, derartige Versicherungen abzuschliessen, wurde den österreichischen Versicherungsgesellschaften durch eine Änderung des Versicherungsregulativs [1] im Herbst 1937 gegeben. Die kurz darauf erfolgten Umwälzungen und kriegerischen Ereignisse hatten zur Folge, dass die neue Versicherungsart in der Fachliteratur nicht entsprechend behandelt wurde. Es treten im Zusammenhang mit dieser Versicherungsart verschiedene Fragen auf, die für den Versicherungsmathematiker von Interesse sind. Insbesondere ist es ja naheliegend, dass Verlosungsversicherungen vor allem in der Kleinlebensversicherung ohne ärztliche Untersuchung in Verwendung kommen. Es ist daher wichtig, Methoden zu finden, die versicherungstechnisch korrekt sind, dabei aber die Berechnung von Prämien und Reserven nicht unnötig komplizieren.

Technisch gesehen, handelt es sich bei den Verlosungsversicherungen um gemischte Versicherungen, bei denen die Versicherungssumme vorzeitig ausgezahlt wird, wenn die Versicherung ausgelost wurde. Es wird also nicht die Sterbenswahrscheinlichkeit durch eine

konstante Verlosungswahrscheinlichkeit ersetzt, sondern es tritt zur Sterbenswahrscheinlichkeit noch eine zweite Wahrscheinlichkeit, die Auslosungswahrscheinlichkeit, hinzu; diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind in ihrem Zusammenwirken massgebend für den Abfall des Bestandes. Es handelt sich also um eine Ausscheideordnung mit zwei Ausscheideursachen, der Sterblichkeit und der Auslosung. Die Formeln für derartige Ausscheideordnungen sind wohlbekannt; es sei hier nur auf die Abhandlung von A. Loewy [3] oder auf das Buch von A. Berger [2] verwiesen.

Wir bezeichnen mit μ_x^1 beziehungsweise mit μ_x^2 die Ausscheideintensitäten und mit $\nu_x = \mu_x^1 + \mu_x^2$ die totale Ausscheideintensität, dann werden durch die Formeln

$$\bar{l}_x = \bar{l}_a \exp\left[-\int_a^x \nu_\tau \, d\tau\right] \qquad \text{die Ausscheideordnung} \tag{1}$$

$${}_h\bar{p}_x = \exp\left[-\int_0^h \nu_{x+\tau} \, d\tau\right] \qquad \text{die totale Verbleibswahrscheinlichkeit} \tag{2}$$

$${}_hq_x^i = \int_0^h \mu_{x+\tau}^i \, {}_\tau\bar{p}_x \, d\tau \quad (i = 1{,}2) \qquad \text{die gewöhnlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten} \tag{3}$$

bestimmt. Wir ziehen es vor, die Ausdrücke «gewöhnliche» bzw. «partielle» Ausscheidewahrscheinlichkeiten an Stelle der früher oft verwendeten Bezeichnungen «abhängige» bzw. «unabhängige» Wahrscheinlichkeiten zu benutzen. Wie W. Saxer [4] bemerkt, wird auf diese Weise die Kollision mit der üblichen Terminologie der Wahrscheinlichkeitsrechnung vermieden.

Die partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden durch die Formeln

$${}_h'q_x^i = 1 - \exp\left[-\int_0^h \mu_{x+\tau}^i \, d\tau\right] \quad (i = 1{,}2) \tag{4}$$

bestimmt. Dann wird die totale Verbleibswahrscheinlichkeit dargestellt durch

$${}_h\bar{p}_x = (1 - {}_h'q_x^1)(1 - {}_h'q_x^2) = 1 - {}_hq_x^1 - {}_hq_x^2. \tag{5}$$

Daraus ergeben sich bekanntlich als Beziehung zwischen gewöhnlichen und partiellen Wahrscheinlichkeiten die Relationen

$${}_hq_x^1 = \int_0^h (1 - {}_t'q_x^2) \frac{d_t q_x^1}{dt} \, dt; \qquad {}_hq_x^2 = \int_0^h (1 - {}_t'q_x^1) \frac{d_t q_x^2}{dt} \, dt. \tag{6}$$

Bei Annahme linearer Änderung im Integrationsintervall erhalten wir hieraus die üblichen Näherungsformeln

$$ {}_hq_x^1 = {}_h'q_x^1\left(1 - \frac{{}_h'q_x^2}{2}\right); \quad {}_hq_x^2 = {}_h'q_x^2\left(1 - \frac{{}_h'q_x^1}{2}\right). \tag{6*} $$

Um nun auf den Fall der Auslosungsversicherungen zurückzukommen, substituieren wir in diesen Formeln für $\mu_x^2 = \lambda$ eine Konstante, während $\mu_x^1 = \mu_x$ die Sterblichkeitsintensität der zu verwendenden Sterbetafel sei. Wir erhalten dann

$$ \nu_x = \mu_x + \lambda \quad \text{und} \quad {}_h'q_x^1 = q_x, \quad {}_h'q_x^2 = 1 - e^{-\lambda h}, \tag{7} $$

wobei ${}_hq_x$ die Sterbenswahrscheinlichkeit der zugrunde gelegten Sterbetafel ist. Aus (6*) erhalten wir bei Berücksichtigung von (7)

$$ {}_hq_x^1 = {}_hq_x\left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda h}}{2}\right); \quad {}_hq_x^2 = (1 - e^{-\lambda h})\left(1 - \frac{{}_hq_x}{2}\right). \tag{8} $$

Für die totale Verbleibswahrscheinlichkeit ${}_h\bar{p}_x = 1 - {}_hq_x^1 - {}_hq_x^2$ ergibt sich also

$$ {}_h\bar{p}_x = e^{-\lambda h}\,{}_hp_x. \tag{9} $$

Bezeichnet man nun die Ausscheideordnung für Versicherungen mit Verlosung mit $\bar{l}_x$, so wird

$$ \bar{l}_x = \bar{l}_a\,{}_{x-a}\bar{p}_a = \bar{l}_a\,{}_{x-a}p_a\,e^{-\lambda(x-a)}. $$

Dabei bedeutet $\bar{l}_a$ den Ausgangswert der Sterbetafel mit Verlosung; wir setzen ihn gleich $\bar{l}_a = e^{\lambda a}\,l_a$, wo l_a der Ausgangswert der verwendeten Sterbetafel ist. Dann erhalten wir bei Berücksichtigung von $l_x = l_a\,{}_{x-a}p_a$ die Beziehung

$$ \bar{l}_x = e^{-\lambda x}\,l_x. \tag{10} $$

Wir berechnen nun für die so bestimmte Ausscheideordnung die Kommutationswerte unter Zugrundelegung des Rechnungszinsfusses i. Es sei $v = \dfrac{1}{1+i}$ der Abzinsungsfaktor und $\delta = \ln(1+i)$ die Zinsintensität. Dann wird

$$ \bar{D}_x = v^x\,\bar{l}_x = e^{-\delta x}\,\bar{l}_x = e^{-(\delta+\lambda)x}\,l_x. $$

Bezeichnen wir mit

$$\delta' = \delta + \lambda, \qquad \delta' = \ln(1+i'), \qquad v' = \frac{1}{1+i'}, \tag{11}$$

so sehen wir, dass die Kommutationswerte für Sterbetafeln mit Verlosung gleich werden den Kommutationswerten für die Sterbetafel ohne Verlosung jedoch gerechnet für den Hilfszinsfuss i'. Es wird also

$$\overline{D}_x = D'_x. \tag{12}$$

Wir bezeichnen mit α die partielle Auslosungswahrscheinlichkeit. Es wird dann $\alpha = 1 - e^{-\lambda}$ oder $e^{-\lambda} = 1 - \alpha$. Nun ist $\delta' = \ln(1+i')$, $\delta = \ln(1+i)$, $\lambda = -\ln(1-\alpha)$. Es wird daher wegen (11)

$$\frac{1+i}{1-\alpha} = 1 + i'.$$

Wir erhalten daher den Hilfszinsfuss

$$i' = \frac{i+\alpha}{1-\alpha} = e^{\lambda}(1 + i - e^{-\lambda}). \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich beispielsweise für einen Zinsfuss $i = 4\,\%$ und die Auslosungswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}5\,\%$ der Hilfszinsfuss $i' = 4{,}5226\%$. Die Prämie $\overline{P}_{x:\overline{n}|}$ für die Verlosungsversicherung mit n-jähriger Dauer wird demnach $\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\overline{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}} - d$ oder wegen (12) $\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - d$, wobei $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$ die temporäre Leibrente gerechnet für den Hilfszinsfuss $i' = \dfrac{i+\alpha}{1-\alpha}$ ist. Die Prämie für die gewöhnlich gemischte Versicherung ist $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$, so dass die Zusatzprämie für die Verlosungsversicherung

$$\overline{P}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{14}$$

wird. Für die Prämienreserve erhalten wir den Ausdruck

$$\overline{V}_t = 1 - \frac{\overline{\ddot{a}}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\overline{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = V'_t. \tag{15}$$

Die Prämienreserven der Verlosungsversicherung sind also gleich den entsprechenden Reserven, gerechnet unter Zugrundelegung des Hilfszinsfusses.

Wie wir aus Formel (14) sehen, hängen die Zusatzprämien vom Alter und der Versicherungsdauer ab, Formel (15) wiederum zeigt, dass die Reserven, und damit auch die Abfindungswerte, für Versicherungen mit Verlosung, von denen der Versicherungen ohne Verlosung verschieden sind.

Dies ist eine wesentliche Unbequemlichkeit, die zu vermeiden eine der Aufgaben ist, die dem Aktuar bei der Konstruktion von Verlosungstarifen gestellt sind.

Wenn man die Renten bei Zugrundelegung der Sterblichkeitsintensität μ_x und der Zinsintensität δ berechnet, erhält man denselben Ausdruck, wie wenn man die Rente für die um eine Konstante λ erhöhte Sterblichkeitsintensität $\nu_x = \mu_x + \lambda$ und die um dieselbe Konstante verringerte Zinsintensität $\bar{\delta} = \delta - \lambda$ berechnet. Ebenso stimmen bei diskontinuierlicher Rechnung die Werte der Renten für die Ausscheideordnung l_x und den Abzinsungsfaktor $v = e^{-\delta}$ und die Ausscheideordnung $\bar{l}_x = e^{-\lambda x} l_x$ und den Abzinsungsfaktor

$$\bar{v} = \frac{1}{1+\bar{i}} = e^{-(\delta-\lambda)}$$

überein. Es möge nun zur Berechnung der Prämien von Auslosungsversicherungen die Sterbensintensität gemäss (7) um eine Konstante erhöht werden; die totale Ausscheidewahrscheinlichkeit ist dann durch

$$\bar{q}_x = 1 - \bar{p}_x = 1 - (1-\alpha)\, p_x = 1 - p_x + \alpha p_x = q_x + \alpha p_x \qquad (16)$$

bestimmt. Der Rechnungszinsfuss sei aus dem für Versicherungen ohne Verlosung verwendeten durch konstante Verringerung der Zinsintensität gemäss

$$\bar{i} = e^{(\delta-\lambda)} - 1 = (1+i)(1-\alpha) - 1 = i - \alpha - \alpha i \qquad (17)$$

erhalten. Dann werden alle Rentenwerte $\bar{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}$ für die Ausscheideordnung (10) gerechnet mit dem Zinsfuss $\bar{\delta}$ gleich den ursprünglichen Rentenbarwerten $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

Die Prämie für die Auslosungsversicherung wird also

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\bar{\ddot{a}}_{x:\overline{n}|}} - \bar{d} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \bar{d}.$$

Daher ist die Zusatzprämie

$$\bar{P}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = d - \bar{d} = \bar{v} - v \qquad (18)$$

konstant. Reserven und Abfindungswerte der Auslosungsversicherung stimmen hingegen mit den entsprechenden Reserven und Abfindungswerten der Versicherung ohne Verlosung überein.

Der niedrige Rechnungszinsfuss der Auslosungsversicherungen ermöglicht höhere Überschüsse; im Wege eines Gewinnplanes können diese den Versicherten gutgebracht werden.

Literaturverzeichnis

[1] BGBL 1937 St. 84, Nr. 345, Wien 1937.

[2] *A. Berger:* Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. J. Springer, Berlin 1935 (siehe insb. Bd. II, § 48).

[3] *A. Loewy:* Zur Theorie und Anwendung der Intensitäten in der Versicherungsmathematik. S. B. Akad. Wiss. Heidelberg, Abt. A, 1917 (6. Abhandlung).

[4] *W. Saxer:* Versicherungsmathematik I. J. Springer, Berlin 1955.