Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Autor(en): **Kreis, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **56 (1956)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966832

Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die vorliegende Untersuchung stellt einen Versuch dar, das Renditenproblem festverzinslicher Titel rein-algebraisch mit Hilfe quadratischer Gleichungen, d. h. weder durch Reihenentwicklung noch durch Iteration, zu lösen.

Unter Verwendung folgender Bezeichnungen

K = Kurswert des Titels in Prozenten;
p_0 = Nominalzinsfuss pro Jahr in Prozenten;
n = Laufzeit in Jahren und
p = gesuchte Rendite in Prozenten,

besteht folgende *Näherungsformel*

$$\left(p - \frac{100\,(100 + p_0 - K)}{K}\right)^2 = \frac{100\,(n-1)^2}{K}\,(p - p_0)\left(p - \frac{100\,p_0}{K}\right). \quad (1)$$

Diese Gleichung liefert für $n = 1$, 2 und ∞ *exakte Werte* für p. Für $n = 1$ ergibt sich unmittelbar

$$p = \frac{100\,(100 + p_0 - K)}{K}.$$

Für $n = 2$ lautet die Gleichung

$$\left(p - \frac{100\,(100 + p_0 - K)}{K}\right)^2 = \frac{100}{K}\,(p - p_0)\left(p - \frac{100\,p_0}{K}\right)$$

oder, wenn zur Abkürzung $1 + \dfrac{p}{100} = r$ gesetzt und umgeformt wird:

$$\left(r - \frac{100 + p_0}{K}\right)^2 = \frac{1}{K}\,(100\,r - 100 - p_0)\left(r - 1 - \frac{p_0}{K}\right),$$

$$r^2 = \frac{p_0\,r}{K} + \frac{100 + p_0}{K}.$$

Hieraus folgt die selbstverständliche Grundgleichung für K:

$$K = \frac{p_0}{r} + \frac{p_0}{r^2} + \frac{100}{r^2}.$$

Betrachtet man schliesslich den Grenzfall $n = \infty$, so geht die Beziehung (1) in die Gleichung über

$$(p - p_0)\left(p - \frac{100\, p_0}{K}\right) = 0,$$

deren erste Wurzel $p = p_0$ formeller Natur, die zweite Wurzel $p = \frac{100\, p_0}{K}$ hingegen die bekannte Rendite der ewigen Rente von p_0 % zum Kurswert K ist.

Zur Ableitung der erwähnten Beziehung (1), gehen wir von der Definitionsgleichung aus

$$K = p_0\, a_{\overline{n}|} + 100\, v^n, \tag{2}$$

in der

$a_{\overline{n}|}$ = Barwert der ganzjährigen n-maligen, nachschüssigen Einheitsrente;

$v = \frac{100}{100 + p}$ = Abzinsungsfaktor ist.

Anderseits gilt die identische Gleichung

$$100 = p\, a_{\overline{n}|} + 100\, v^n, \tag{2'}$$

so dass durch Subtraktion folgt

$$100 - K = (p - p_0)\, a_{\overline{n}|}$$

oder

$$\frac{p - p_0}{100 - K} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \tag{3}$$

Die gesuchte Rendite p ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K} \tag{4}$$

mit der Kurve n-ten Grades

$$C_n : y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}. \tag{5}$$

Wir bringen die Kurve C_n zum Schnitt mit den Koordinatenachsen und erhalten

1. für die p-Achse $y = 0 : r^n = 0$, also $p = -100$.

   Bei Werten $n \geqq 2$ ist somit die p-Achse eine Tangente der Kurve C_n.

2. Für die y-Achse $p = 0 : y = \frac{1}{n}$.

Schreibt man ferner die Gleichung (5) in der Form

$$y = r - 1 + \frac{1}{\sum_0^{n-1} r^\nu},$$

so erkennt man, dass wenn $p \to \infty$, also auch $r \to \infty$ wird, die Gerade

$$y = r - 1 = \frac{p}{100}, \tag{6}$$

eine Asymptote der Kurve C_n ist.

Diese Asymptote, die Tangente im Punkte $P_1 \equiv P_2\ (-100; 0)$ auf der p-Achse und der Schnittpunkt $S_n\left(0; \frac{1}{n}\right)$ bestimmen eine Hyperbel H_n, die man als Ersatzkurve für die Kurve C_n nehmen kann.

Diese Kurve H_n gehört einem Hyperbelnbüschel an, deren vier Grundpunkte sind

1. P_1 und P_2 auf der p-Achse und
2. U_1 und U_2 im Unendlichen auf der Asymptote $y = \frac{p}{100}$.

Sind allgemein $H = 0$ und $H^* = 0$ die Gleichungen von zwei beliebigen Exemplaren des Hyperbelnbüschels, so lautet die Gleichung desselben:

$$H - \lambda H^* = 0.$$

Als besondere Kegelschnitte wählen wir die beiden Geradenpaare $P_1U_1 \times P_2U_2$ und $P_1P_2 \times U_1U_2$. Da $P_1U_1 \equiv P_2U_2$ die Parallele zur Asymptote durch den Punkt P_1 bzw. P_2 ist, lautet die Gleichung des ersten Linienpaares

$$H \equiv \left(y - \frac{p + 100}{100}\right)^2 = 0.$$

Die zweite Hyperbel $P_1 P_2 \times U_1 U_2$ setzt sich aus der p-Achse und der Asymptote $U_1 U_2$ zusammen, so dass ihre Gleichung folglich lautet

$$H^* \equiv y\left(y - \frac{p}{100}\right) = 0.$$

Die Gleichung des Hyperbelnbüschels ist also von der Form

$$\left(y - \frac{p+100}{100}\right)^2 - \lambda y \left(y - \frac{p}{100}\right) = 0.$$

Die Hyperbel H_n geht durch den Schnittpunkt $S_n\left(0\,;\frac{1}{n}\right)$, so dass sich für den Parameter λ folgende Bestimmungsgleichung ergibt

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2 - \lambda \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 0\right) = 0,$$

also

$$\lambda = (n-1)^2.$$

Die gesuchte Hypergleichung heisst demnach

$$H_n : \left(y - \frac{p+100}{100}\right)^2 - (n-1)^2 y \left(y - \frac{p}{100}\right) = 0. \qquad (7)$$

Durch Differentiation nach p der Gleichung (5) für C_n und (7) für H_n ergeben sich gleiche Richtungskoeffizienten, $\frac{n+1}{200\,n}$, für die Tangenten im Schnittpunkt S_n der beiden Kurven mit der y-Achse. Nachträglich stellt man also fest, dass die beiden Kurven C_n und H_n in drei Punkten sich berühren.

Indem aus den Gleichungen (4) und (7) die Grösse y eliminiert wird, resultiert die eingangs erwähnte Beziehung

$$\left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p+100}{100}\right)^2 - (n-1)^2 \frac{p-p_0}{100-K}\left(\frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p}{100}\right) = 0$$

oder

$$\left(p - \frac{100(100+p_0-K)}{K}\right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K}(p-p_0)\left(p - \frac{100\,p_0}{K}\right). \qquad (1)$$

Allgemein liefert die aufgestellte Formel (1) zu *grosse Werte von p bei $K < 100$* bzw. *zu kleine Werte bei $K > 100$*. Diese Eigenschaft folgt aus der Tatsache, dass im allgemeinen die Gleichung (7) für y zu grosse Werte ergibt.

Macht man in (7) die Substitution $y = \frac{1}{t}$, so ergibt sich

$$t^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} t - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} = 0. \tag{8}$$

Weil definitionsgemäss $y = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ ist, liefert die positive Wurzel der Gleichung (8) einen Näherungswert für den Rentenbarwert $a_{\overline{n}|}$. Für $n = 1$, 2 und ∞ ist dieser Wert exakt; für die übrigen Werte von n ist das Ergebnis stets zu klein. Lassen wir nämlich auf der linken Seite der Gleichung (8) t von 0 bis $a_{\overline{n}|}$ variieren, so wächst die linke Seite von

$$-\frac{(n-1)^2 - 1}{r^2}$$

bis

$$\begin{aligned}
&a_{\overline{n}|}^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200 r}{100 r^2} a_{\overline{n}|} - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} \\
&\equiv (a_{\overline{n}|} - v)^2 + \frac{(n-1)^2 v^2 p}{100} a_{\overline{n}|} - (n-1)^2 v^2 \\
&\equiv a_{\overline{n-1}|}^2 v^2 + (n-1)^2 v^2 (1 - v^n) - (n-1)^2 v^2 \\
&\equiv (n-1)^2 v^2 \left[\left(\frac{a_{\overline{n-1}|}}{n-1}\right)^2 - v^n\right] \geqq 0,
\end{aligned}$$

das Gleichheitszeichen gilt für $n = 1$, 2 und ∞, d. h. die positive Wurzel der Gleichung (8) liegt, jene drei Fälle ausgenommen, unter dem wahren Wert von $a_{\overline{n}|}$.

In der Gleichung (3)

$$\frac{p - p_0}{100 - K} \text{ bzw. } \frac{p_0 - p}{K - 100} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}}$$

ist der Näherungswert für $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ demzufolge im allgemeinen zu gross, so dass der erhaltene Wert für p zu gross bzw. zu klein, je nachdem K kleiner bzw. grösser als 100 ist.

Zahlenbeispiele für die Formel (8)

p %	n	$a_{\overline{n}\vert}$ nach Formel (8)	Genauer Wert von $a_{\overline{n}\vert}$	Fehler
3	15	11,876	11,938	0,062
4	15	11,026	11,118	0,092
5	15	10,258	10,380	0,122
3	20	14,757	14,877	0,120
5	20	12,246	12,462	0,216

Zahlenbeispiele für die Renditenformel (1)

K	n	p_0 %	Rendite p nach Formel (1) %	Genaue Rendite %	Fehler
109,71	5	3	1,000	1	0,000
127,73	15	3	0,999	1	— 0,001
144,05	25	3	0,997	1	— 0,003
158,82	35	3	0,994	1	— 0,006
104,71	5	3	2,000	2	0,000
112,85	15	3	1,998	2	— 0,002
119,52	25	3	1,994	2	— 0,006
125,00	35	3	1,989	2	— 0,011
95,55	5	3	4,000	4	0,000
88,88	15	3	4,006	4	+ 0,006
84,38	25	3	4,025	4	+ 0,025
81,34	35	3	4,063	4	+ 0,063
91,34	5	3	5,003	5	+ 0,003
79,24	15	3	5,028	5	+ 0,028
71,81	25	3	5,066	5	+ 0,066
67,25	35	3	5,101	5	+ 0,101
87,36	5	3	6,005	6	+ 0,005
70,86	15	3	6,059	6	+ 0,059
61,65	25	3	6,134	6	+ 0,134
56,51	35	3	6,194	6	+ 0,194
83,59	5	3	7,012	7	+ 0,012
63,37	15	3	7,096	7	+ 0,096
53,39	25	3	7,229	7	+ 0,229
48,21	35	3	7,315	7	+ 0,315

Die beigegebene schematische Zeichnung gestattet die Veranschaulichung des entwickelten Verfahrens. In der Gleichung des Strahlenbüschels um den Punkt $F_0(p_0\,;0)$

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K}, \tag{4}$$

variiert der Parameter K zwischen 0 und $100 + np_0$.

Für $K = 0$ ist der Strahl parallel zur Asymptote $y = \frac{p}{100}$, d.h. p ist unendlich gross;

für $K < 100$, steigt der Strahl: p ist grösser als p_0, aber zu gross;

für $K = 100$, ist der Strahl parallel zur y-Achse: p ist gleich p_0;

für $K > 100$, fällt der Strahl: p ist kleiner als p_0, aber zu klein;

für $K = 100 + np_0$ ist die Rendite p gleich 0.