

|                     |  |
|---------------------|--|
| <b>Zeitschrift:</b> | Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker<br>= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries |
| <b>Herausgeber:</b> | Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  |
| <b>Band:</b>        | 56 (1956)  |
| <b>Artikel:</b>     | Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel   |
| <b>Autor:</b>       | Kreis, H.  |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-966832">https://doi.org/10.5169/seals-966832</a>  |

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über das Renditenproblem festverzinslicher Titel

Von **H. Kreis**, Winterthur

Die vorliegende Untersuchung stellt einen Versuch dar, das Renditenproblem festverzinslicher Titel rein-algebraisch mit Hilfe quadratischer Gleichungen, d. h. weder durch Reihenentwicklung noch durch Iteration, zu lösen.

Unter Verwendung folgender Bezeichnungen

$K$  = Kurswert des Titels in Prozenten;

$p_0$  = Nominalzinsfuss pro Jahr in Prozenten;

$n$  = Laufzeit in Jahren und

$p$  = gesuchte Rendite in Prozenten,

besteht folgende *Näherungsformel*

$$\left( p - \frac{100(100 + p_0 - K)}{K} \right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K} (p - p_0) \left( p - \frac{100 p_0}{K} \right). \quad (1)$$

Diese Gleichung liefert für  $n = 1, 2$  und  $\infty$  exakte Werte für  $p$ .

Für  $n = 1$  ergibt sich unmittelbar

$$p = \frac{100(100 + p_0 - K)}{K}.$$

Für  $n = 2$  lautet die Gleichung

$$\left( p - \frac{100(100 + p_0 - K)}{K} \right)^2 = \frac{100}{K} (p - p_0) \left( p - \frac{100 p_0}{K} \right)$$

oder, wenn zur Abkürzung  $1 + \frac{p}{100} = r$  gesetzt und umgeformt wird:

$$\left( r - \frac{100 + p_0}{K} \right)^2 = \frac{1}{K} (100r - 100 - p_0) \left( r - 1 - \frac{p_0}{K} \right),$$

$$r^2 = \frac{p_0 r}{K} + \frac{100 + p_0}{K}.$$

Hieraus folgt die selbstverständliche Grundgleichung für  $K$ :

$$K = \frac{p_0}{r} + \frac{p_0}{r^2} + \frac{100}{r^2}.$$

Betrachtet man schliesslich den Grenzfall  $n = \infty$ , so geht die Beziehung (1) in die Gleichung über

$$(p - p_0) \left( p - \frac{100 p_0}{K} \right) = 0,$$

deren erste Wurzel  $p = p_0$  formeller Natur, die zweite Wurzel  $p = \frac{100 p_0}{K}$  hingegen die bekannte Rendite der ewigen Rente von  $p_0\%$  zum Kurswert  $K$  ist.

Zur Ableitung der erwähnten Beziehung (1), gehen wir von der Definitionsgleichung aus

$$K = p_0 a_{\bar{n}} + 100 v^n, \quad (2)$$

in der

$a_{\bar{n}}$  = Barwert der ganzjährigen  $n$ -maligen, nachschüssigen Einheitsrente;

$v = \frac{100}{100 + p}$  = Abzinsungsfaktor ist.

Anderseits gilt die identische Gleichung

$$100 = p a_{\bar{n}} + 100 v^n, \quad (2')$$

so dass durch Subtraktion folgt

$$100 - K = (p - p_0) a_{\bar{n}}$$

oder

$$\frac{p - p_0}{100 - K} = \frac{1}{a_{\bar{n}}}. \quad (3)$$

Die gesuchte Rendite  $p$  ist die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K} \quad (4)$$

mit der Kurve  $n$ -ten Grades

$$C_n: y = \frac{1}{a_{\bar{n}}}. \quad (5)$$

Wir bringen die Kurve  $C_n$  zum Schnitt mit den Koordinatenachsen und erhalten

1. für die  $p$ -Achse  $y = 0 : r^n = 0$ , also  $p = -100$ .

Bei Werten  $n \geq 2$  ist somit die  $p$ -Achse eine Tangente der Kurve  $C_n$ .

2. Für die  $y$ -Achse  $p = 0 : y = \frac{1}{n}$ .

Schreibt man ferner die Gleichung (5) in der Form

$$y = r - 1 + \frac{1}{\sum_0^{n-1} r^v},$$

so erkennt man, dass wenn  $p \rightarrow \infty$ , also auch  $r \rightarrow \infty$  wird, die Gerade

$$y = r - 1 = \frac{p}{100}, \quad (6)$$

eine Asymptote der Kurve  $C_n$  ist.

Diese Asymptote, die Tangente im Punkte  $P_1 \equiv P_2 (-100; 0)$  auf der  $p$ -Achse und der Schnittpunkt  $S_n \left(0 ; \frac{1}{n}\right)$  bestimmen eine Hyperbel  $H_n$ , die man als Ersatzkurve für die Kurve  $C_n$  nehmen kann.

Diese Kurve  $H_n$  gehört einem Hyperbelnbüschel an, deren vier Grundpunkte sind

1.  $P_1$  und  $P_2$  auf der  $p$ -Achse und

2.  $U_1$  und  $U_2$  im Unendlichen auf der Asymptote  $y = \frac{p}{100}$ .

Sind allgemein  $H = 0$  und  $H^* = 0$  die Gleichungen von zwei beliebigen Exemplaren des Hyperbelnbüsels, so lautet die Gleichung desselben:

$$H - \lambda H^* = 0.$$

Als besondere Kegelschnitte wählen wir die beiden Geradenpaare  $P_1 U_1 \times P_2 U_2$  und  $P_1 P_2 \times U_1 U_2$ . Da  $P_1 U_1 \equiv P_2 U_2$  die Parallele zur Asymptote durch den Punkt  $P_1$  bzw.  $P_2$  ist, lautet die Gleichung des ersten Linienpaares

$$H \equiv \left(y - \frac{p + 100}{100}\right)^2 = 0,$$

Die zweite Hyperbel  $P_1P_2 \times U_1U_2$  setzt sich aus der  $p$ -Achse und der Asymptote  $U_1U_2$  zusammen, so dass ihre Gleichung folglich lautet

$$H^* \equiv y \left( y - \frac{p}{100} \right) = 0.$$

Die Gleichung des Hyperbelnbüsels ist also von der Form

$$\left( y - \frac{p+100}{100} \right)^2 - \lambda y \left( y - \frac{p}{100} \right) = 0.$$

Die Hyperbel  $H_n$  geht durch den Schnittpunkt  $S_n \left( 0 ; \frac{1}{n} \right)$ , so dass sich für den Parameter  $\lambda$  folgende Bestimmungsgleichung ergibt

$$\left( \frac{1}{n} - 1 \right)^2 - \lambda \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} - 0 \right) = 0,$$

also

$$\lambda = (n-1)^2.$$

Die gesuchte Hypergleichung heisst demnach

$$H_n : \left( y - \frac{p+100}{100} \right)^2 - (n-1)^2 y \left( y - \frac{p}{100} \right) = 0. \quad (7)$$

Durch Differentiation nach  $p$  der Gleichung (5) für  $C_n$  und (7) für  $H_n$  ergeben sich gleiche Richtungskoeffizienten,  $\frac{n+1}{200n}$ , für die Tangenten im Schnittpunkt  $S_n$  der beiden Kurven mit der  $y$ -Achse. Nachträglich stellt man also fest, dass die beiden Kurven  $C_n$  und  $H_n$  in drei Punkten sich berühren.

Indem aus den Gleichungen (4) und (7) die Grösse  $y$  eliminiert wird, resultiert die eingangs erwähnte Beziehung

$$\left( \frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p+100}{100} \right)^2 - (n-1)^2 \frac{p-p_0}{100-K} \left( \frac{p-p_0}{100-K} - \frac{p}{100} \right) = 0$$

oder

$$\left( p - \frac{100(100+p_0-K)}{K} \right)^2 = \frac{100(n-1)^2}{K} (p-p_0) \left( p - \frac{100p_0}{K} \right). \quad (1)$$

Allgemein liefert die aufgestellte Formel (1) zu grossen Werten von  $p$  bei  $K < 100$  bzw. zu kleinen Werten bei  $K > 100$ . Diese Eigenschaft

folgt aus der Tatsache, dass im allgemeinen die Gleichung (7) für  $y$  zu grosse Werte ergibt.

Macht man in (7) die Substitution  $y = \frac{1}{t}$ , so ergibt sich

$$t^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200r}{100r^2} t - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} = 0. \quad (8)$$

Weil definitionsgemäss  $y = \frac{1}{a_{\bar{n}}}$  ist, liefert die positive Wurzel der Gleichung (8) einen Näherungswert für den Rentenbarwert  $a_{\bar{n}}$ . Für  $n = 1, 2$  und  $\infty$  ist dieser Wert exakt; für die übrigen Werte von  $n$  ist das Ergebnis stets zu klein. Lassen wir nämlich auf der linken Seite der Gleichung (8)  $t$  von 0 bis  $a_{\bar{n}}$  variieren, so wächst die linke Seite von

$$-\frac{(n-1)^2 - 1}{r^2}$$

bis

$$\begin{aligned} a_{\bar{n}}^2 + \frac{(n-1)^2 p - 200r}{100r^2} a_{\bar{n}} - \frac{(n-1)^2 - 1}{r^2} \\ \equiv (a_{\bar{n}} - v)^2 + \frac{(n-1)^2 v^2 p}{100} a_{\bar{n}} - (n-1)^2 v^2 \\ \equiv a_{\bar{n}-1}^2 v^2 + (n-1)^2 v^2 (1 - v^n) - (n-1)^2 v^2 \\ \equiv (n-1)^2 v^2 \left[ \left( \frac{a_{\bar{n}-1}}{n-1} \right)^2 - v^n \right] \geqq 0, \end{aligned}$$

das Gleichheitszeichen gilt für  $n = 1, 2$  und  $\infty$ , d. h. die positive Wurzel der Gleichung (8) liegt, jene drei Fälle ausgenommen, unter dem wahren Wert von  $a_{\bar{n}}$ .

In der Gleichung (3)

$$\frac{p - p_0}{100 - K} \text{ bzw. } \frac{p_0 - p}{K - 100} = \frac{1}{a_{\bar{n}}}$$

ist der Näherungswert für  $\frac{1}{a_{\bar{n}}}$  demzufolge im allgemeinen zu gross, so dass der erhaltene Wert für  $p$  zu gross bzw. zu klein, je nachdem  $K$  kleiner bzw. grösser als 100 ist.

*Zahlenbeispiele für die Formel (8)*

| $p$<br>% | $n$ | $a_{\bar{n}}^-$ nach<br>Formel (8) | Genauer<br>Wert von $a_{\bar{n}}^-$ | Fehler |
|----------|-----|------------------------------------|-------------------------------------|--------|
| 3        | 15  | 11,876                             | 11,938                              | 0,062  |
| 4        | 15  | 11,026                             | 11,118                              | 0,092  |
| 5        | 15  | 10,258                             | 10,380                              | 0,122  |
| 3        | 20  | 14,757                             | 14,877                              | 0,120  |
| 5        | 20  | 12,246                             | 12,462                              | 0,216  |

*Zahlenbeispiele für die Renditenformel (1)*

| $K$    | $n$ | $p_0$<br>% | Rendite $p$ nach | Genaue  | Fehler  |
|--------|-----|------------|------------------|---------|---------|
|        |     |            | Formel (1)       | Rendite |         |
| 109,71 | 5   | 3          | 1,000            | 1       | 0,000   |
| 127,73 | 15  | 3          | 0,999            | 1       | — 0,001 |
| 144,05 | 25  | 3          | 0,997            | 1       | — 0,003 |
| 158,82 | 35  | 3          | 0,994            | 1       | — 0,006 |
| 104,71 | 5   | 3          | 2,000            | 2       | 0,000   |
| 112,85 | 15  | 3          | 1,998            | 2       | — 0,002 |
| 119,52 | 25  | 3          | 1,994            | 2       | — 0,006 |
| 125,00 | 35  | 3          | 1,989            | 2       | — 0,011 |
| 95,55  | 5   | 3          | 4,000            | 4       | 0,000   |
| 88,88  | 15  | 3          | 4,006            | 4       | + 0,006 |
| 84,38  | 25  | 3          | 4,025            | 4       | + 0,025 |
| 81,34  | 35  | 3          | 4,063            | 4       | + 0,063 |
| 91,34  | 5   | 3          | 5,003            | 5       | + 0,003 |
| 79,24  | 15  | 3          | 5,028            | 5       | + 0,028 |
| 71,81  | 25  | 3          | 5,066            | 5       | + 0,066 |
| 67,25  | 35  | 3          | 5,101            | 5       | + 0,101 |
| 87,36  | 5   | 3          | 6,005            | 6       | + 0,005 |
| 70,86  | 15  | 3          | 6,059            | 6       | + 0,059 |
| 61,65  | 25  | 3          | 6,134            | 6       | + 0,134 |
| 56,51  | 35  | 3          | 6,194            | 6       | + 0,194 |
| 83,59  | 5   | 3          | 7,012            | 7       | + 0,012 |
| 63,37  | 15  | 3          | 7,096            | 7       | + 0,096 |
| 53,39  | 25  | 3          | 7,229            | 7       | + 0,229 |
| 48,21  | 35  | 3          | 7,315            | 7       | + 0,315 |

Die beigegebene schematische Zeichnung gestattet die Veranschaulichung des entwickelten Verfahrens. In der Gleichung des Strahlenbüschels um den Punkt  $F_0(p_0; 0)$

$$y = \frac{p - p_0}{100 - K}, \quad (4)$$

variiert der Parameter  $K$  zwischen 0 und  $100 + np_0$ .

Für  $K = 0$  ist der Strahl parallel zur Asymptote  $y = \frac{p}{100}$ , d. h.  $p$  ist unendlich gross;

für  $K < 100$ , steigt der Strahl:  $p$  ist grösser als  $p_0$ , aber zu gross;

für  $K = 100$ , ist der Strahl parallel zur  $y$ -Achse:  $p$  ist gleich  $p_0$ ;

für  $K > 100$ , fällt der Strahl:  $p$  ist kleiner als  $p_0$ , aber zu klein;

für  $K = 100 + np_0$  ist die Rendite  $p$  gleich 0.

