

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 55 (1955)

Artikel: Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung und Variation der
Sterblichkeit

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-551413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

D

Wissenschaftliche Mitteilungen

Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung
und Variation der Sterblichkeit

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Die Vermehrungsrate r der stabilen Bevölkerung ist bestimmt durch den Ausdruck

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p_0(y) f(y) dy; \quad (1)$$

darin bedeuten a und b die untere und die obere Grenze der Fruchtbarkeit, $p_0(y) = \frac{l_y}{l_0}$ die y -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer 0-jährigen und $f(y)$ die Intensität der Fruchtbarkeit. Die Auflösung von (1) nach r bietet keine Schwierigkeiten und wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt ¹⁾.

Eine Änderung der Sterblichkeit bei invarianter Fruchtbarkeit führt zwangsläufig auf eine andere Vermehrungsrate. Es kann von Interesse sein, eine Methode zu kennen, die mit geringem Rechenaufwand die neue Vermehrungsrate zu bestimmen erlaubt, ohne dass die geänderte Überlebensordnung aufzustellen und die im Lösungsgang notwendigen Momente ¹⁾

$$R_k = \int_a^b y^k p_0(y) f(y) dy$$

jeweilen zu berechnen sind. Allerdings muss die Sterblichkeit nach einem verhältnismässig einfachen Ansatz variiert werden. Wir setzen

¹⁾ a) *A.Linder*: Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Band 4, 1938, S. 136 bis 156).

b) *E.Zwinggi*: Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 51. Band, 1951, S. 178–180).

voraus, dass im Intervall a bis b (nicht aber von 0 bis a) die neue Sterbeintensität $\mu'_y = (1 + \alpha)\mu_y$ sei, wo μ_y die Sterbeintensität nach einer Basistafel bedeutet.

Die variierte Überlebenswahrscheinlichkeit $p'_0(y)$ lässt sich bei Zerlegung in die Intervalle 0 bis a (ohne Variation) und a bis y (mit Variation) schreiben als

$$\begin{aligned} p'_0(y) &= \frac{l_a}{l_0} e^{-\int_a^y \mu'_\zeta d\zeta} \\ &= \frac{l_a}{l_0} e^{-(1+\alpha)\int_a^y \mu_\zeta d\zeta} = p_0(a) [p_a(y)]^{1+\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Wenn weiter $q_a(y) = 1 - p_a(y)$, (3)

gilt für (2) die Darstellung

$$p'_0(y) = p_0(a) [1 - q_a(y)]^{1+\alpha}. \quad (4)$$

Bei der Entwicklung von (4) in die Binomialreihe genügt es, Glieder höchstens mit $q_a^2(y)$ mitzunehmen; es bleibt dann

$$p'_0(y) = p_0(a) \left\{ [1 - q_a(y)] - \alpha \left[q_a(y) - \frac{q_a^2(y)}{2} \right] + \alpha^2 \frac{q_a^2(y)}{2} \right\}. \quad (5)$$

Sei abkürzend

$$\left. \begin{aligned} s_1(y) &= q_a(y) - \frac{q_a^2(y)}{2}, \\ s_2(y) &= \frac{q_a^2(y)}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

dann wird

$$p'_0(y) = p_0(a) [p_a(y) - \alpha s_1(y) + \alpha^2 s_2(y)]. \quad (7)$$

Für die gesuchte Vermehrungsrate gilt entsprechend (1) die Beziehung

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p'_0(y) f(y) dy, \quad (8)$$

und mit (7)

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p_0(y) f(y) dy - \alpha \int_a^b e^{-ry} p_0(a) f(y) s_1(y) dy + \alpha^2 \int_a^b e^{-ry} p_0(a) f(y) s_2(y) dy. \quad (9)$$

Wir bezeichnen mit

$$\left. \begin{aligned} h_0(y) &= p_0(y) f(y), \\ h_1(y) &= p_0(a) f(y) s_1(y), \\ h_2(y) &= p_0(a) f(y) s_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die numerische Auswertung erweist, dass für die Ermittlung von ε auf das Glied mit $h_2(y)$ verzichtet werden kann; es bleibt dann

$$1 = \int_a^b e^{-ry} h_0(y) dy - \alpha \int_a^b e^{-ry} h_1(y) dy. \quad (11)$$

Zur Auflösung von (11) nach r setzen wir

$$e^{-r} = 1 + \varepsilon, \quad (12)$$

schreiben für (11) somit

$$1 = \int_a^b (1 + \varepsilon)^y h_0(y) dy - \alpha \int_a^b (1 + \varepsilon)^y h_1(y) dy. \quad (13)$$

Bei erneuter Entwicklung in eine Reihe und mit

$$\left. \begin{aligned} R_k^0 &= \int_a^b y^k h_0(y) dy, \\ R_k^1 &= \int_a^b y^k h_1(y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

folgt aus (13)

$$1 = R_0^0 + \varepsilon R_1^0 + \varepsilon^2 \frac{R_2^0 - R_1^0}{2} + \dots - \alpha \left[R_0^1 + \varepsilon R_1^1 + \varepsilon^2 \frac{R_2^1 - R_1^1}{2} + \dots \right]. \quad (15)$$

Wenn noch

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= R_0^0 - \alpha R_0^1, \\ V_1 &= R_1^0 - \alpha R_1^1, \\ V_2 &= R_2^0 - R_1^0 - \alpha (R_2^1 - R_1^1), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wird

$$1 = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 \frac{V_2}{2} + \dots = V_0 \exp \left[\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \right] \quad (17)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{V_1}{V_0}, \\ \lambda_2 &= \frac{V_2}{V_0} - \lambda_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Aus (17) folgt für ε , bei Beschränkung auf Glieder höchstens in ε^2 ,

$$\lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \lambda_1 \varepsilon + \ln V_0 = 0; \quad (19)$$

bei kleinem ε genügt $\lambda_1 \varepsilon + \ln V_0 = 0. \quad (20)$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $\varepsilon = 0$, d. h. der Fall der *stationären* Bevölkerung. Anders ausgedrückt, ε ist gegeben und α ist als Mass der erforderlichen Variation der Sterblichkeit gesucht. Aus (15) folgt – bei der hier notwendigen Ausdehnung auf Glieder höchstens in α^2 – die Beziehung

$$1 = R_0^0 - \alpha R_0^1 + \alpha^2 R_0^2; \quad (21)$$

daraus ist α berechenbar.

Die Genauigkeit des Verfahrens belegt das nachfolgende Zahlenbeispiel.

Sterbetafel: SF 1939/44
Fruchtbarkeit: Schweizerbevölkerung 1951

α	ε berechnet nach	
	(19)	genau
0,2	– 0,00 349	– 0,00 349
– 0,2	– 0,00 391	– 0,00 391
– 0,4	– 0,00 412	– 0,00 412
– 0,8	– 0,00 452	– 0,00 454

Der Wert $\varepsilon = 0$ (stationäre Bevölkerung) wird nach den gleichen Grundlagen erreicht mit $\alpha = 3,5484$; die Sterblichkeit könnte sich auf Grund der angenommenen Fruchtbarkeit auf rund das 4,5-fache erhöhen, ohne dass die (stationäre) Bevölkerung abnimmt.

Auf die nahezu lineare Abhängigkeit der Grösse ε von α sowie auf Verfahren, welche die Variation der Fruchtbarkeit bei invarianter Sterblichkeit leicht erfassen lassen, treten wir später ein.