D

Wissenschaftliche Mitteilungen

Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung und Variation der Sterblichkeit

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Die Vermehrungsrate r der stabilen Bevölkerung ist bestimmt durch den Ausdruck

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p_0(y) f(y) \, dy; \tag{1}$$

darin bedeuten a und b die untere und die obere Grenze der Fruchtbarkeit, $p_0(y) = \frac{l_y}{l_0}$ die y-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer 0-jährigen und $f(y)$ die Intensität der Fruchtbarkeit. Die Auflösung von (1) nach r bietet keine Schwierigkeiten und wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt [1]).

Eine Änderung der Sterblichkeit bei invarianter Fruchtbarkeit führt zwangsläufig auf eine andere Vermehrungsrate. Es kann von Interesse sein, eine Methode zu kennen, die mit geringem Rechenaufwand die neue Vermehrungsrate zu bestimmen erlaubt, ohne dass die geänderte Überlebensordnung aufzustellen und die im Lösungsgang notwendigen Momente [1])

$$R_k = \int_a^b y^k p_0(y) f(y) \, dy$$

jeweilen zu berechnen sind. Allerdings muss die Sterblichkeit nach einem verhältnismässig einfachen Ansatz variiert werden. Wir setzen

---

[1]) *a) A. Linder:* Die Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Band 4, 1938, S. 136 bis 156).

b) E. Zwinggi: Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 51. Band, 1951, S. 178–180).

voraus, dass im Intervall a bis b (nicht aber von 0 bis a) die neue Sterbeintensität $\mu'_y = (1+\alpha)\,\mu_y$ sei, wo μ_y die Sterbeintensität nach einer Basistafel bedeutet.

Die variierte Überlebenswahrscheinlichkeit $p'_0(y)$ lässt sich bei Zerlegung in die Intervalle 0 bis a (ohne Variation) und a bis y (mit Variation) schreiben als

$$p'_0(y) = \frac{l_a}{l_0}\, e^{-\int_a^y \mu'_\zeta d\zeta}$$

$$= \frac{l_a}{l_0}\, e^{-(1+\alpha)\int_a^y \mu_\zeta d\zeta} = p_0(a)\,[p_a(y)]^{1+\alpha}. \tag{2}$$

Wenn weiter

$$q_a(y) = 1 - p_a(y), \tag{3}$$

gilt für (2) die Darstellung

$$p'_0(y) = p_0(a)\,[1 - q_a(y)]^{1+\alpha}. \tag{4}$$

Bei der Entwicklung von (4) in die Binomialreihe genügt es, Glieder höchstens mit $q_a^2(y)$ mitzunehmen; es bleibt dann

$$p'_0(y) = p_0(a)\left\{[1 - q_a(y)] - \alpha\left[q_a(y) - \frac{q_a^2(y)}{2}\right] + \alpha^2\,\frac{q_a^2(y)}{2}\right\}. \tag{5}$$

Sei abkürzend

$$\left.\begin{aligned} s_1(y) &= q_a(y) - \frac{q_a^2(y)}{2}, \\ s_2(y) &= \frac{q_a^2(y)}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dann wird

$$p'_0(y) = p_0(a)\,[p_a(y) - \alpha\, s_1(y) + \alpha^2 s_2(y)]. \tag{7}$$

Für die gesuchte Vermehrungsrate gilt entsprechend (1) die Beziehung

$$1 = \int_a^b e^{-ry}\, p'_0(y)\, f(y)\, dy, \tag{8}$$

und mit (7)

$$1 = \int_a^b e^{-ry} p_0(y)\, f(y)\, dy - \alpha \int_a^b e^{-ry} p_0(a)\, f(y)\, s_1(y)\, dy + \alpha^2 \int_a^b e^{-ry} p_0(a)\, f(y)\, s_2(y)\, dy. \tag{9}$$

Wir bezeichnen mit

$$\left.\begin{aligned} h_0(y) &= p_0(y)\, f(y)\,, \\ h_1(y) &= p_0(a)\, f(y)\, s_1(y)\,, \\ h_2(y) &= p_0(a)\, f(y)\, s_2(y)\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die numerische Auswertung erweist, dass für die Ermittlung von ε auf das Glied mit $h_2(y)$ verzichtet werden kann; es bleibt dann

$$1 = \int_a^b e^{-ry}\, h_0(y)\, dy - \alpha \int_a^b e^{-ry}\, h_1(y)\, dy\,. \tag{11}$$

Zur Auflösung von (11) nach r setzen wir

$$e^{-r} = 1 + \varepsilon\,, \tag{12}$$

schreiben für (11) somit

$$1 = \int_a^b (1+\varepsilon)^y\, h_0(y)\, dy - \alpha \int_a^b (1+\varepsilon)^y\, h_1(y)\, dy\,. \tag{13}$$

Bei erneuter Entwicklung in eine Reihe und mit

$$\left.\begin{aligned} R_k^0 &= \int_a^b y^k\, h_0(y)\, dy\,, \\ R_k^1 &= \int_a^b y^k\, h_1(y)\, dy\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

folgt aus (13)

$$1 = R_0^0 + \varepsilon\, R_1^0 + \varepsilon^2\, \frac{R_2^0 - R_1^0}{2} + \ldots - \alpha \left[R_0^1 + \varepsilon\, R_1^1 + \varepsilon^2\, \frac{R_2^1 - R_1^1}{2} + \ldots \right]. \tag{15}$$

Wenn noch

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= R_0^0 - \alpha\, R_0^1\,, \\ V_1 &= R_1^0 - \alpha\, R_1^1\,, \\ V_2 &= R_2^0 - R_1^0 - \alpha\, (R_2^1 - R_1^1)\,, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wird

$$1 = V_0 + \varepsilon\, V_1 + \varepsilon^2\, \frac{V_2}{2} + \ldots = V_0 \exp\left[\lambda_1\, \varepsilon + \lambda_2\, \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots \right] \tag{17}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{V_1}{V_0}\,, \\ \lambda_2 &= \frac{V_2}{V_0} - \lambda_1^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Aus (17) folgt für ε, bei Beschränkung auf Glieder höchstens in ε^2,

$$\lambda_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \lambda_1 \varepsilon + \ln V_0 = 0; \tag{19}$$

bei kleinem ε genügt

$$\lambda_1 \varepsilon + \ln V_0 = 0. \tag{20}$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $\varepsilon = 0$, d. h. der Fall der *stationären* Bevölkerung. Anders ausgedrückt, ε ist gegeben und α ist als Mass der erforderlichen Variation der Sterblichkeit gesucht. Aus (15) folgt – bei der hier notwendigen Ausdehnung auf Glieder höchstens in α^2 – die Beziehung

$$1 = R_0^0 - \alpha R_0^1 + \alpha^2 R_0^2; \tag{21}$$

daraus ist α berechenbar.

Die Genauigkeit des Verfahrens belegt das nachfolgende Zahlenbeispiel.

Sterbetafel: SF 1939/44

Fruchtbarkeit: Schweizerbevölkerung 1951

α	ε berechnet nach	
	(19)	genau
0,2	– 0,00 349	– 0,00 349
– 0,2	– 0,00 391	– 0,00 391
– 0,4	– 0,00 412	– 0,00 412
– 0,8	– 0,00 452	– 0,00 454

Der Wert $\varepsilon = 0$ (stationäre Bevölkerung) wird nach den gleichen Grundlagen erreicht mit $\alpha = 3{,}5484$; die Sterblichkeit könnte sich auf Grund der angenommenen Fruchtbarkeit auf rund das 4,5-fache erhöhen, ohne dass die (stationäre) Bevölkerung abnimmt.

Auf die nahezu lineare Abhängigkeit der Grösse ε von α sowie auf Verfahren, welche die Variation der Fruchtbarkeit bei invarianter Sterblichkeit leicht erfassen lassen, treten wir später ein.