

| | |
|---------------------|--|
| Zeitschrift: | Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries |
| Herausgeber: | Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker |
| Band: | 55 (1955) |
| Artikel: | Evolution récente de la théorie mathématique sur la distribution des revenus |
| Autor: | Kaiser, Ernest |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-551333 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Evolution récente de la théorie mathématique sur la distribution des revenus

Par **Ernest Kaiser**, Berne et Genève

Une science en pleine évolution, telle apparaît aujourd’hui la théorie mathématique sur la distribution des revenus. C'est sous ce vocable que nous entendons placer les lignes suivantes qui serviront de base à la conférence que nous aurons l'honneur de présenter lors de la célébration du cinquantenaire de notre Association. Or, c'est précisément pendant les derniers deux lustres de son histoire qu'a pris naissance l'idée d'une *théorie de la distribution des revenus à plusieurs variables*. Qu'il nous soit permis de rappeler à ce sujet nos deux conférences données aux assemblées des actuaires suisses de 1946 [11]¹⁾ et de 1949 [12]. Par la suite, en 1950, notre vénéré président, M. le professeur Marchand, eut l'occasion d'entretenir nos collègues des Pays-Bas de ce même problème [19]. Une première théorie cohérente fit l'objet en 1950 d'une thèse présentée sous l'égide de MM. les professeurs Féraud et Linder à l'Université de Genève [13]. Toutes ces recherches ont été suscitées par des problèmes rencontrés dans les assurances sociales suisses, en particulier dans l'assurance-vieillesse et survivants [21, 22] et dans l'assurance-maladie [24]. Signalons encore deux travaux théoriques qui abordent des questions en partie nouvelles, l'un ayant paru à l'occasion du XIII^e Congrès international d'actuaires [15] et l'autre résumant une conférence tenue à Berne en 1951 [14]. Après ces travaux, nous avons été particulièrement heureux de constater qu'une suite favorable avait été donnée à deux de nos suggestions qui visaient à généraliser les méthodes proposées. Ainsi nous avons eu la satisfaction de voir paraître deux thèses remarquables, celle de Leuenberger, en 1953 [16, 17] et celle de Balk, au début de

¹⁾ Voir bibliographie à l'annexe.

l'année 1955 [2]; le premier se rattache à l'Ecole des actuaires suisses et le second à celle des Pays-Bas.

Cette brève esquisse historique permet, semble-t-il, de dégager un certain *parallelisme entre l'évolution de la théorie de la distribution des revenus à une seule variable et celle à plusieurs variables*. Les circonstances ont voulu que dans les deux cas l'idée initiale ait vu le jour en Suisse et qu'elle ait trouvé un écho favorable dans d'autres pays européens. Car, ne l'oublions pas, la théorie monovariable est partie de Lausanne où Vilfredo Pareto [25] publiait en 1896 son cours d'économie politique dans lequel on trouve la formule analytique bien connue. Depuis, cette théorie n'a cessé de préoccuper les esprits et d'éminents mathématiciens, par exemple Cantelli [4] et Fréchet [7, 8] pour ne nommer que les plus illustres parmi eux, ont attaché leur nom à cette discipline. Les recherches entreprises dans cette direction ont d'ailleurs été poursuivies depuis lors, comme on pourra s'en convaincre à la lecture de notre annexe bibliographique [1, 20, 26, 28] qui contient de plus quelques indications sur des observations statistiques récentes [3, 9, 23, 27]. Toutefois dans le présent exposé, nous n'analyserons que quelques résultats théoriques obtenus quant au problème multi-variable des revenus, quitte à les compléter à l'aide d'un document spécial – avec illustrations graphiques – qui sera distribué lors de la conférence.

I. Notions et problèmes

1. Nous rattachons les problèmes à résoudre aux *variables de l'espace orthogonal bio-économétrique* (u, t, x), u représentant le revenu d'une personne vivant à l'époque t et ayant l'âge x . Le champ de variation de ces variables est supposé donné par un régime obligatoire d'assurances sociales qui prévoit un âge d'entrée x_0 et un âge de retraite x_1 . Pour chaque assuré on peut déterminer l'époque t_0 à laquelle il a atteint l'âge x_0 , même si cette époque se situe avant l'entrée en vigueur du régime envisagé. Dès lors les intervalles de variation de nos variables sont définis de la manière suivante: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq t < \infty$ et $x_0 \leq x \leq x_1$. Dans l'espace (u, t, x) considérons d'abord le *plan biométrique* (t, x) où t est porté en abscisse, x en ordonnée. Ainsi l'on peut définir une famille de droites parallèles à la bissectrice des coordonnées positives, droites qui sont appelées *lignes de vie* et dont les équations se présentent ainsi:

$$x - x_0 = t - t_0 = \tau, \quad (1)$$

où τ signifie le temps écoulé depuis l'âge x_0 ou depuis l'époque t_0 ; τ varie comme suit: $0 \leq \tau \leq x_1 - x_0 = \tau_1$. Il apparaît que seul t_0 peut prendre des valeurs négatives et varie ainsi de $-\tau_1$ à t ; x_0 étant un nombre fixe, la ligne de vie est donnée en connaissant uniquement t_0 . Chaque ligne de vie est la trace d'un *plan bio-économétrique* $(\tau, u)_{t_0}$ parallèle à l'axe des u dans lequel viendront se placer les courbes donnant la variation des revenus des assurés. — D'autres droites et d'autres plans significatifs peuvent être extraits de l'espace (u, t, x) , en particulier la famille des *droites économétriques parallèles à l'axe des u* , chacune de ces droites étant déterminée par le t et le x considérés. L'ensemble des droites économétriques correspondant au même t donné est situé à l'intérieur d'un plan vertical que nous appellerons le *plan économétrique* $(u, x)_t$ également membre d'une famille de plans parallèles variant avec t .

Nous nous plaçons d'abord précisément à l'intérieur d'un plan économétrique vertical $(u, x)_t$ et y considérons une *fonction de fréquence à deux variables stochastiques* $h(u, x/t)$ ¹⁾ représentant la densité des personnes ayant le revenu u et l'âge x , ceci à l'instant t . Cette fonction est supposée non négative, continue et dérivable; de plus, elle est normée sur le domaine $(0 \leq u < \infty, x_0 \leq x \leq x_1)$. Nous en déduisons deux distributions marginales et une conditionnelle, toutes à une seule variable stochastique:

$$\lambda(x/t) = \int_0^\infty h(u, x/t) du \quad (2)$$

$$f(u/t, x) = \frac{h(u, x/t)}{\lambda(x/t)} \quad (2')$$

$$f(u/t) = \int_{x_0}^{x_1} h(u, x/t) dx = \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x/t) f(u/t, x) dx. \quad (2'')$$

Dans (2) $\lambda(x/t)$ représente la *structure d'âge* normée de la population à l'instant t , alors que (2') définit la fonction la plus importante qui peuple l'espace (u, t, x) . En effet la fonction de fréquence $f(u/t, x)$ donne

¹⁾ Dans cette notation les variables stochastiques sont placées avant la barre, les paramètres après.

la distribution selon le revenu u des personnes vivant à l'époque t et ayant l'âge x . Cette fonction caractérise les distributions des revenus le long des droites économétriques parallèles et nous parlerons ainsi de *distributions parallèles* tout court. La relation (2'') définit la distribution selon le revenu de la population vivant au moment t , ceci indépendamment de l'âge, ce qui nous mène à la notion de *distribution globale*, qui est une distribution marginale prise le long de la droite $x = x_0$ du plan $(u, x)_t$ considéré.

En dehors des fonctions de fréquence on aura recours, le cas échéant, à d'autres fonctions statistiques, telles que fonction de répartition (cumulative), moments, fonction sommatoire et, en poussant plus loin, les fonctions caractéristiques. Quant aux fonctions spécifiques de notre théorie, nous les introduirons au fur et à mesure des besoins.

2. Trois catégories de problèmes peuvent être abordées à l'aide de la théorie mathématique sur la distribution des revenus. D'abord les *problèmes généraux* parmi lesquels deux s'imposent avant tout à notre attention, celui du lien stochastique entre les distributions parallèles, d'une part, et celui de la relation entre les distributions parallèles du même plan économétrique et la distribution globale correspondante, d'autre part. Au premier de ces aspects généraux, nous consacrerons les chapitres II et III ci-après, alors que le chapitre IV sera réservé au deuxième aspect. Relevons ensuite les *problèmes particuliers* qui se présentent lorsqu'on spécifie la forme analytique des fonctions de fréquence. On étudiera ainsi les problèmes du lien stochastique par exemple à l'aide de la distribution hyperbolique de Pareto, de la distribution semi-normale, de la distribution logarithmique normale ou encore à l'aide de la distribution parabolique. Dans le présent mémoire, nous laisserons ces questions particulières de côté, quitte à nous en servir à titre d'illustration lors de la conférence. Enfin, signalons les *applications*, soit aux assurances sociales, soit aux questions fiscales. Là aussi, tout en nous abstenant d'entrer dans les détails, nous nous réservons la faculté d'effleurer l'une ou l'autre de ces applications au cours du chapitre V. Lorsqu'on attaque un cas pratique de distribution des revenus, il convient d'abord d'examiner la nature de ces derniers; s'agit-il de revenus du travail, donc uniquement de salaires, est-on en présence de revenus de capitaux ou encore du revenu général de la population, englobant aussi bien l'un que l'autre?

II. L'élément de probabilité des distributions parallèles

3. Introduisons d'abord des hypothèses simples concernant *l'évolution démographique* plausibles pour un régime obligatoire d'assurances sociales. Toutes les entrées – à part la génération initiale entrant à $t = 0$ – s'effectueront à l'âge x_0 ; quant aux sorties, nous supposons leur taux instantané indépendant du revenu de la personne considérée. Si nous nous plaçons à l'intérieur du plan biométrique (t,x) et suivons une ligne de vie caractérisée par (1), nous pouvons dire que *l'évolution économique* d'un assuré, c'est-à-dire la variation de son revenu avec τ est soumise à deux forces, l'une agissant dans le sens vertical (variation du revenu avec l'âge) et l'autre dans le sens horizontal (variation conjoncturelle du revenu avec le temps, soit à la suite de changements dans la productivité, soit comme conséquence de l'évolution de la valeur monétaire). Pour traduire l'action de ces forces, on peut d'abord associer les variables de revenu u, u', u'', v et w de la manière suivante à cinq points du plan (t,x) , dont quatre sont les sommets d'un rectangle:

$$\begin{array}{ll} u \text{ à } t,x \\ u' \text{ à } t,x_0 & u'' \text{ à } 0,x \\ v \text{ à } t_0,x_0 & w \text{ à } 0,x_0. \end{array}$$

Introduisons trois paramètres $\gamma(t)$, $c(x)$ et $m(t,x)$ choisis de telle sorte que l'on puisse établir une *correspondance bi-univoque* entre le revenu w de la droite économétrique attachée à $0,x_0$ et le revenu u sur la droite concernant t,x , ceci à l'aide de la relation suivante:

$$u - m(t,x) = \gamma(t) c(x) [w - m(0,x_0)]. \quad (3)$$

Imposons encore aux paramètres les conditions:

$$m(t,x) \geq 0, \quad \gamma(0) = 1, \quad c(x_0) = 1. \quad (3^*)$$

Ainsi s'établit une correspondance bi-univoque horizontale indépendante de x :

$$\frac{u - m(t,x)}{u'' - m(0,x)} = \frac{u' - m(t,x_0)}{w - m(0,x_0)} = \gamma(t). \quad (3')$$

D'une manière analogue, il vient une correspondance bi-univoque verticale indépendante de t :

$$\frac{u - m(t,x)}{u' - m(t,x_0)} = \frac{u'' - m(0,x)}{w - m(0,x_0)} = c(x). \quad (3'')$$

Il est naturel de dire que le vecteur $\gamma(t)$ mesure les forces économiques conjoncturelles et le vecteur $c(x)$ les forces modifiant les revenus avec l'âge. Si l'on attribue en outre à $m(t,x)$ la signification d'un minimum d'existence variant avec le temps et l'âge, on peut interpréter la relation (3) d'une manière plausible. En effet, on fait subir à la portion du revenu w dépassant le minimum d'existence $m(0,x_0)$ une «dilatation» $\gamma(t) c(x)$ et, en ajoutant au résultat obtenu un nouveau minimum d'existence défini par la loi arbitraire $m(t,x)$, on établit la correspondance avec le revenu u . Cette correspondance aura un sens plus concret encore en considérant les deux points t,x et t_0,x_0 situés sur une même ligne de vie; on aura une correspondance bi-univoque diagonale:

$$\frac{u - m(t,x)}{v - m(t_0,x_0)} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(t_0)} c(x) = \gamma_{t_0}(t) c(x). \quad (3''')$$

Dans ce cas, il n'est pas exclu d'avoir recours à une interprétation individuelle; on dira que la portion du revenu individuel v dépassant le minimum d'existence $m(t_0,x_0)$ est dilatée au cours de la carrière de la personne considérée par $\gamma_{t_0}(t) c(x)$ et à cette portion dilatée viendra s'ajouter le nouveau minimum d'existence valable au moment t pour l'âge x . Revenons à la relation (3) et remarquons que cette transformation est entièrement déterminée si l'on se donne librement, en respectant toutefois les conditions imposées, trois fonctions fondamentales $\gamma(t)$, $c(x)$ et $m(t,x)$, les deux premières étant de nature vectorielle et la troisième de nature scalaire.

Mais supposons donnée une quatrième fonction fondamentale $g(w)$ qui représente la fonction de fréquence donnant la répartition selon les revenus sur la droite économétrique perpendiculaire au plan (t,x) en son point $0,x_0$. L'élément de probabilité $g(w) dw$ détermine le pourcentage de l'effectif $L(0,x_0)$ des personnes, vivant à l'instant 0 et d'âge x_0 , dont le revenu varie de w à $w + dw$. En se rappelant (2') l'on peut donc écrire:

$$g(w) = f(w/0, x_0). \quad (4)$$

Suivons maintenant l'effectif initial – correspondant à l'élément de probabilité $g(w) dw$ – le long de la ligne de vie passant par $0, x_0$. Si nous adoptons, pour un moment du moins, un point de vue strictement déterministe, nous pouvons imposer à chaque revenu individuel w une variation telle qu'au moment t et à l'âge x la personne considérée ait un revenu u défini par la relation (3). Mais dans ces conditions et grâce aux hypothèses d'évolution démographique admises au début de ce chiffre 3, la valeur de l'élément de probabilité ne saurait varier de sorte qu'il vient:

$$f(u/t, x) du = g(w) dw. \quad (5)$$

Or, en vertu de notre hypothèse de correspondance bi-univoque mise à la base de la relation (3), nous pouvons effectuer dans (5) le changement de variables (3), de sorte qu'il vient:

$$f(u/t, x) = \frac{1}{\gamma(t) c(x)} g \left[\frac{u - m(t, x)}{\gamma(t) c(x)} + m(0, x_0) \right]. \quad (5')$$

Ainsi présentée, la relation (5') est un théorème démontré à partir de l'hypothèse résidant dans le changement de variables (3). Mais nous pouvons faire un pas de plus. Le *point de vue déterministe* adopté ne correspond que de loin à la réalité et est, tout au plus, réalisé en «moyenne». Mais rien n'empêche d'abandonner le point de vue déterministe et de le remplacer par un *point de vue stochastique*. Il suffira alors d'admettre que les revenus individuels varient de telle sorte que l'élément de probabilité correspondant au point t, x obéisse à la transformation (5'). Peu importe le comportement des revenus individuels, pourvu que la résultante de leur «mouvement brownien» soit telle que les revenus u de la droite économétrique t, x correspondant par la relation (3) aux revenus w de la droite $0, x_0$ aient une fréquence relative définie par (5'). Mais alors nous pouvons aller plus loin encore. La relation (3) ne se bornant pas aux effectifs liés biométriquement, le changement de variable qui mène du point $0, x_0$ à un point t, x quelconque implique également la relation (5'). Mais même dans ce cas, il est possible de passer par la liaison biométrique en faisant d'abord jusqu'à t_0 un simple mouvement conjoncturel horizontal défini par (3') et en suivant ensuite la carrière diagonale définie par (3''). Ainsi on a

passé d'un théorème basé sur le point de vue déterministe à une *hypothèse stochastique*, hypothèse d'abord restreinte aux liaisons biométriques et généralisée ensuite aux droites économétriques ne présentant pas de telles liaisons. Dans ces conditions, il est donc toujours possible de déduire la fonction de fréquence relative à un point quelconque du plan (t,x) à l'aide de quatre fonctions fondamentales $g(w)$, $\gamma(t)$, $c(x)$ et $m(t,x)$. Ainsi, le cas de la liaison biométrique devient un cas particulier d'une hypothèse plus générale.

4. Dans nos mémoires antérieurs [13, 15], nous avons envisagé des cas particuliers de la transformation (3) dans lesquels intervenaient directement les *lois de variation des revenus moyens*. Qu'en est-il de ces revenus moyens en partant de l'hypothèse stochastique contenue dans la formule (5')? Définissons d'abord le revenu moyen afférent à un point t,x du plan biométrique:

$$M(t,x) = \int_{m(t,x)}^{\infty} u f(u/t,x) du. \quad (6)$$

Si l'on effectue les calculs en tenant compte de (3) et de (5') il vient:

$$M(t,x) - m(t,x) = \gamma(t) c(x) [M(0,x_0) - m(0,x_0)]. \quad (6^*)$$

Les revenus moyens subissent donc les mêmes transformations que les revenus u associés bi-univoquement aux revenus w , ce qui n'est d'ailleurs pas pour nous étonner. Les moyennes $M(t,x)$ sont entièrement déterminées par la connaissance des fonctions fondamentales γ , c et m . En partant soit des relations (3') et (3''), soit directement de (6*) que l'on écrira d'abord pour x_0 et ensuite pour $t = 0$, nous aurons:

$$\gamma(t) = \frac{M(t,x_0) - m(t,x_0)}{M(0,x_0) - m(0,x_0)}, \quad (6')$$

$$c(x) = \frac{M(0,x) - m(0,x)}{M(0,x_0) - m(0,x_0)}. \quad (6'')$$

Ces deux relations mettent de nouveau en évidence les propriétés dilatatoires partielles des deux vecteurs $\gamma(t)$ et $c(x)$. Introduisons maintenant deux fonctions dont l'effet de dilatation sur les moyennes est entier:

$$\sigma(t) = \frac{M(t,x_0)}{M(0,x_0)}, \quad (7)$$

$$s(x) = \frac{M(0,x)}{M(0,x_0)}. \quad (7')$$

Ce sont bien les fonctions utilisées précédemment [13, 15] et que nous avions appelées: $\sigma(t)$ l'indice des revenus et $s(x)$ l'échelle des revenus. En se reportant à (6') et à (6''), on voit que γ s'exprime par σ et c par s , et vice-versa; ainsi, l'on peut remplacer dans (6*) γ et c respectivement par σ et s et l'on aura:

$$M(t,x) - m(t,x) = \frac{[\sigma(t) M(0,x_0) - m(t,x_0)] [s(x) M(0,x_0) - m(0,x)]}{M(0,x_0) - m(0,x_0)}. \quad (7^*)$$

La loi de variation des revenus moyens s'exprime maintenant à l'aide de la fonction $m(t,x)$ et de deux nouvelles fonctions fondamentales $\sigma(t)$ et $s(x)$.

Exposons encore une méthode permettant de retrouver d'une manière naturelle nos anciennes hypothèses particulières A (dilatation complète), B (translation) [13] et une hypothèse de dilatation plus générale [15], de même que l'hypothèse A_1 avancée par Leuenberger [16, 17], cette dernière comportant une dilatation partielle avec l'âge. En plus de (7*) qui comporte encore 3 degrés de liberté, nous pouvons nous imposer une condition supplémentaire:

$$M(t,x) = M(0,x_0) \sigma(t) s(x) \quad (8)$$

que l'on pourra aussi écrire à l'aide d'une échelle de revenus généralisée $S(t,x)$:

$$S(t,x) = \frac{M(t,x)}{M(0,x_0)} = \sigma(t) s(x). \quad (8')$$

Remplaçons maintenant dans (7*) $M(t,x)$ par (8); tous calculs effectués il vient:

$$\left. \begin{aligned} & m(t,x) [M(0,x_0) - m(0,x_0)] - m(t,x_0) [s(x) M(0,x_0) - m(0,x)] \\ & = M(0,x_0) \sigma(t) [m(0,x) - s(x) m(0,x_0)] \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Si nous nous posons d'emblée les lois de variation $\sigma(t)$ et $s(x)$, nous remarquons que le minimum d'existence $m(t,x)$ est déterminé à partir

des données initiales $M(0, x_0)$ et $m(0, x_0)$, à condition d'avoir une loi de variation horizontale $m(t, x_0)$ et une loi de variation verticale $m(0, x)$.

— Là première idée qui vient à l'esprit est d'adopter un *minimum d'existence indépendant de l'âge*, donc de postuler

$$m(t, x) = m(t, x_0) = m(t). \quad (10)$$

En écrivant (9) avec cette condition (10) on trouvera:

$$m(t) = m(0) \sigma(t). \quad (10')$$

Si l'on se reporte à (6') on trouvera dans ce cas $\gamma(t) = \sigma(t)$, de sorte que le changement de variables (3) s'écrira

$$u = \sigma(t) \{c(x) [w - m(0)] + m(0)\}. \quad (10'')$$

Avec la correspondance bi-univoque (10'') où $\sigma(t) = 1$, $f(u/t, x)$ déduit de $g(w)$ selon (5') sera l'expression de *l'hypothèse A₁* de Leuenberger; pour la trouver, il postule simplement – en utilisant une notion introduite par Paul Lévy [18] – que les fonctions de fréquence des distributions parallèles sont du même type général. – Admettons maintenant *pour le minimum d'existence une loi de double dilatation*:

$$m(t, x) = \sigma(t) s(x) m(0, x_0) = S(t, x) m(0, x_0). \quad (11)$$

On voit que (9) est identiquement satisfaite par (11), et, à l'aide de (6') et (6''), on aura de plus: $\gamma(t) = \sigma(t)$ et $c(x) = s(x)$. La correspondance bi-univoque (3) s'exprimera dans ce cas particulier par

$$u = \sigma(t) s(x) w; \quad (11')$$

cette relation est, avec $\sigma(t) = 1$, à la base de nos deux *hypothèses A (dilatation) et B (translation)* mentionnées ci-dessus. Selon Paul Lévy [18], on parlera dans ce cas de distributions du même type.

5. Revenons à notre relation (3) par laquelle nous supposons établi un lien bi-univoque entre un revenu u attaché à t, x et un revenu w correspondant à $0, x_0$. En premier lieu, elle donne u en fonction linéaire de w ; nous reviendrons ci-après sur cet aspect principal. Auparavant, plaçons-nous à *l'intérieur d'un plan bio-économétrique* $(\tau, u)_{t_0}$ et considérons la liaison diagonale définie par (3''). En vertu de (1), on a $t = t_0 + \tau$ et $x = x_0 + \tau$; ainsi u est entièrement déterminé par les

conditions initiales v , t_0 , x_0 et par la variable de durée τ , ce que nous pouvons noter comme suit:

$$u = \vartheta_\tau(v, t_0, x_0). \quad (12)$$

De cette manière, (12) représente l'équation d'une courbe dans le plan $(\tau, u)_{t_0}$; nous appellerons cette courbe bio-économétrique *ligne de revenu*, par analogie aux droites biométriques appelées lignes de vie tout court. Les lignes de revenu indiquent la variation du revenu u avec la durée τ . Ainsi, il est tout naturel de définir à partir de (12) un *taux instantané de variation du revenu* $\kappa(\tau)$:

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{\vartheta_\tau} \frac{d\vartheta_\tau}{d\tau}. \quad (12')$$

Donnons deux exemples simples. Pour le premier, nous partons de (11') écrit «en diagonale» avec $\sigma(t) = 1$ (notre hypothèse A), de sorte que $u = s(x) v = s(x_0 + \tau) v$, ce qui donne

$$\kappa(x) = \frac{1}{s(x)} \frac{ds(x)}{dx}, \quad (12'')$$

c'est-à-dire que κ ne dépend pas du v initial considéré. Le deuxième exemple s'obtient à partir de (10''), pris avec $\sigma(t) = 1$ et depuis le point t_0, x_0 (hypothèse A_1 de Leuenberger); il vient alors:

$$\kappa(x) = \frac{1}{c(x) + \frac{m(t_0)}{v - m(t_0)}} \frac{dc(x)}{dx}. \quad (12''')$$

Dans ce cas, κ dépend du v initial comme fonction croissante de v . Les relations (12) et (12') montrent que l'on peut aborder l'étude de la variation du revenu u à l'intérieur d'un plan bio-économétrique en se basant sur la fonction $\kappa(\tau)$, méthode qui se trouve être d'ailleurs à l'origine des travaux de Balk [2].

Reprendons maintenant l'aspect principal du problème en considérant la liaison linéaire établie par (3) entre les revenus u et w ; celle-ci permet de calculer u associé à t, x à partir de w associé à $0, x_0$. Mais rien ne nous oblige de nous borner à une liaison linéaire; c'est

pour cela que nous supposons donnée ici une *correspondance bi-univoque non linéaire entre u et w* notée comme suit:

$$u = \vartheta_{t,x}(w,0,x_0). \quad (13)$$

La correspondance entre u et w étant ainsi établie point par point dans les deux sens, l'existence d'une fonction inverse peut être admise sous réserve des conditions analytiques usuelles. Pour des raisons de symétrie, nous la désignerons par:

$$w = \psi_{0,x_0}(u,t,x). \quad (13^*)$$

Remarquons en passant qu'à l'aide de (13) il vient $w = \vartheta_{0,x_0}(w,0,x_0)$ et que ce (13) se confond avec (12) pour un même plan bio-économétrique. Considérons, comme dans le cas particulier linéaire, l'élément de probabilité $g(w) dw$ associé à la droite économétrique passant par le point $0,x_0$ et admettons selon (5) l'équivalence d'un élément de probabilité $f(u/t,x) du$ associé à la droite économétrique parallèle par le point t,x . Ainsi la double hypothèse de la correspondance bi-univoque entre u et w et de l'équivalence des éléments de probabilité y relatifs nous conduit à écrire:

$$f(u/t,x) = g[\psi_{0,x_0}(u,t,x)] \frac{\partial \psi_{0,x_0}(u,t,x)}{\partial u}. \quad (14)$$

L'hypothèse linéaire conduisant à (5') apparaît ainsi comme un simple cas particulier de la transformation (14). On peut évidemment se demander pourquoi nous avons postulé une correspondance bi-univoque même dans le cas où u s'exprime par une fonction linéaire de w . Mais n'oublions pas que dans ces conditions la nature des fonctions $\gamma(t)$ et $c(x)$ pourrait être telle qu'elles associeraient à une seule valeur de w plusieurs valeurs de u ; dans le plan cartésien (w,u) on aurait alors plusieurs droites définissant des correspondances linéaires différentes, ce qui, de toute évidence, doit être évité. Ces possibilités plurivoques apparaissent particulièrement bien en considérant la multitude de formes que peuvent prendre les lignes de revenus (12) dans le plan $(\tau,u)_t$. Signalons encore, qu'à partir de (14) on peut également calculer les moyennes $M(t,x)$ et introduire les fonctions $\sigma(t)$ et $s(x)$ définies par (7) et (7').

Nous verrons plus loin que le second membre de (14) peut être trouvé comme solution d'une équation aux dérivées partielles, pour

autant que l'on reste dans un même plan bio-économétrique $(\tau, u)_t$. C'est à cette idée que se rattachent les travaux de Balk [2]. Moyennant certaines hypothèses démographiques simples et une interprétation «presque individuelle» des lignes de revenus, la relation (14) sera alors un théorème. En adoptant une méthode différente, nous envisageons *l'ensemble des formules (13) et (14) comme une hypothèse générale de variation des revenus en dépendance stochastique*. Ce point de vue était déjà le nôtre lorsque nous avons exposé, sous chiffre 3, le cas de la dépendance linéaire des deux variables stochastiques w et u caractérisant deux distributions parallèles. Nous répétons que nous n'exigeons pas autre chose qu'au revenu w sur la droite par $0, x_0$ corresponde sur la droite parallèle par t, x un revenu u tel que sa fréquence relative dépende de la fréquence relative attachée à w selon la formule (14). La dépendance stochastique est donc bien évidente. Cette hypothèse générale englobe toutes les hypothèses particulières émises précédemment, l'hypothèse linéaire du chiffre 3 ainsi que les cas qui en découlent [18, 15 et 16]. Signalons à ce propos également *l'hypothèse A₂ de Leuenberger* [16, 17] exigeant que deux distributions parallèles appartiennent à une même classe comme le dit Paul Lévy [18] ou à une même classe paramétrique comme s'exprime Leuenberger [l. c.]. Cette hypothèse se présentera alors sous la forme suivante, t étant fixe:

$$f(u/x) = g[u, c(x)]; \quad (15)$$

$c(x)$ est un paramètre variant avec l'âge tel que $c(x_0) = c$, un minimum d'existence indépendant de l'âge faisant partie de l'hypothèse A_2 . On voit sans difficulté que (15) est également un cas particulier de (14). Remarquons encore que *la fonction fondamentale g peut être donnée sous forme empirique*; par l'équivalence de l'élément de probabilité, on passera à l'aide de (13) sans peine à une autre distribution parallèle.

Pour terminer l'exposé de notre méthode, nous aimerais relever une certaine parenté entre les lois du monde physique et celles du monde économique. Dans le macrocosme planétaire, les lois peuvent être admises sous une forme déterministe comme c'est le cas pour la mécanique céleste de Newton et d'Einstein; dans les deux cas, les conditions initiales déterminent entièrement les orbites. Cela tient à ce qu'il y a peu d'éléments à considérer. Mais dès que le nombre d'éléments dépasse certaines limites, comme pour le macrocosme des amas stellaires ou les microcosmes moléculaires et atomiques, les lois dé-

terministes ne sont plus vérifiées et aussi bien l'astronome que le physicien auront recours aux lois de variation stochastiques. Il en va de même dans le monde économique où le nombre des revenus est trop grand et les phénomènes trop complexes pour que l'on puisse déceler des lois déterministes. C'est pour cette raison que nous avons basé notre théorie sur des lois de variation à simple dépendance stochastique.

III. Equations aux dérivées partielles des distributions parallèles

6. C'est à Balk [2] que revient le mérite d'avoir abordé le problème de la variation des distributions parallèles par une méthode nouvelle, ainsi que nous l'avons déjà signalé à plusieurs reprises. Balk envisage la question en liaison biométrique, ceci à l'aide d'un schéma démographique assez général pour convenir à une caisse de pensions. En fait, il suit le nombre de cotisants le long d'une ligne de revenu sur un segment infinitésimal qui correspond à un déplacement δt à partir du point t,x du plan biométrique. Il tient également compte des entrées et des sorties et compare les revenus des cotisants existant à t,x à ceux vivant à $t + \delta t, x + \delta t$. Une analyse mathématique très subtile de cette idée mène à l'équation fondamentale de Balk exprimée comme suit et dont la notation a toutefois été adaptée à celle des chapitres précédents :

$$\frac{\partial f(u/t,x)}{\partial t} + \frac{\partial f(u/t,x)}{\partial x} + \frac{\partial u \varkappa(u,t,x) f(u/t,x)}{\partial u} = f(u/t,x) [\bar{\mu}(t,x) - \mu(u,t,x)]. \quad (16)$$

Dans cette équation aux dérivées partielles, non homogène et du premier ordre, la plupart des symboles nous sont déjà connus, en particulier les fonctions de fréquence des distributions parallèles $f(u/t,x)$. La fonction $\varkappa(u,t,x)$ n'est autre que le taux instantané de variation des revenus défini par (12'); dans la théorie de Balk ce taux représente d'ailleurs la moyenne pondérée de tous les taux instantanés individuels attachés au point u,t,x . Du côté droit de l'équation, nous remarquons deux taux instantanés de sortie, le taux de sortie «sélectif par rapport à u » $\mu(u,t,x)$ et le taux de sortie «non sélectif» $\bar{\mu}(t,x)$, ce dernier étant la moyenne des taux «sélectifs» pondérés à l'aide de $f(u/t,x)$. L'équa-

tion de Balk est d'ailleurs plus générale que (16), puisque du côté droit on y trouve encore la différence $\varepsilon(u,t,x) - \bar{\varepsilon}(t,x)$ des taux d'entrée; nous avons négligé ce terme, du moment que l'auteur lui-même se contente d'étudier la solution d'une *équation fondamentale restreinte*, dans laquelle le terme de droite s'annule du fait de l'hypothèse simplificatrice $\mu = \bar{\mu}$ et $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$. On se rend compte que cette équation restreinte n'est pas homogène pour autant, en dérivant le troisième terme du côté gauche.

7. Afin de résoudre l'équation fondamentale (16) sous sa forme restreinte, Balk introduit d'abord une *équation aux dérivées partielles auxiliaire*, homogène celle-ci:

$$\frac{\partial \psi_y(u,t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_y(u,t,x)}{\partial x} + u \kappa(u,t,x) \frac{\partial \psi_y(u,t,x)}{\partial u} = 0, \quad (17)$$

où $\psi_y(u,t,y) = u$. Elle est évidemment équivalente au système linéaire que voici:

$$dt = dx = \frac{du}{u \kappa(u,t,x)}. \quad (17')$$

Ainsi la fonction inconnue ψ_y se trouve entièrement déterminée, ce que l'on peut montrer à partir des caractéristiques. Elle possède toute une série de propriétés mathématiques remarquables, en particulier des propriétés d'inversion. De plus, cette fonction admet une interprétation statistique en ce sens que

$$u = \psi_{x+\tau}(v, t, x), \quad (18)$$

satisfaisant d'ailleurs, comme le montre (17'), à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{d\tau} = \kappa(u, t+\tau, x+\tau), \quad (18')$$

se trouve être *l'équation des lignes de revenu*. L'inversion de (18) s'écrit selon Balk :

$$v = \psi_x(u, t+\tau, x+\tau). \quad (18'')$$

Or, nous retrouvons ici les notions rencontrées auparavant sous chiffre 5. Les formules (18) et (18'') sont évidemment la reproduction de (13) et (13*) pour autant qu'on ramène ces dernières dans un même plan bio-économétrique avec une variable v attachée au point t, x , la va-

riable u étant alors associée à $t+\tau, x+\tau$. Balk démontre que *la solution de l'équation fondamentale restreinte* s'obtient, à l'intérieur d'un plan bio-économétrique, à partir de la fonction auxiliaire ψ – désormais connue – et d'une fonction de fréquence pour une droite économétrique «initiale»:

$$f(u/t, x) = \frac{\partial \psi_{x_0}(u, t, x)}{\partial u} f[\psi_{x_0}(u, t, x)/t_0, x_0]; \quad (19)$$

ici l'on admet pour t_0 des valeurs négatives dans les limites mentionnées sous chiffre 1. Nous voyons immédiatement que le résultat est identique à celui qui a été obtenu par la méthode de transformation des éléments de probabilité; il suffit, en effet, de transcrire (14) à l'intérieur d'un même plan $(\tau, u)_{t_0}$ et de se rappeler la définition de g selon (4) en remplaçant w associé à $0, x_0$ par v associé à t_0, x_0 .

Balk traite encore plusieurs *cas particuliers* intéressants. Pour ce faire, il particularise la fonction \varkappa figurant dans (18'), et choisit, par exemple, un taux instantané $\bar{\varkappa}(x)$ «non-sélectif» par rapport à u et indépendant de t (cas stationnaire); de cette manière s'introduit l'échelle des revenus $s(x)$ et l'on retrouve ainsi notre hypothèse A. Il convient de signaler aussi un autre cas particulier pour lequel Balk pose

$$\varkappa(u, x, t) = \varkappa_1(u, x) + \varkappa_2(u, t), \quad (20)$$

mettant en évidence un vecteur qui agit selon l'âge et un autre selon l'évolution conjoncturelle. Si l'on rend les deux composantes indépendantes de u , on fera correspondre à $\bar{\varkappa}_1(x)$ l'échelle $s(x)$ et à $\bar{\varkappa}_2(t)$ l'indice des revenus $\sigma(t)$. Balk retrouve ainsi l'effet multiplicatif des vecteurs $s(x)$ et $\sigma(t)$, tel que nous l'avons signalé par la formule (11'); ceci n'est d'ailleurs pas étonnant si l'on se rappelle les propriétés de la dérivée logarithmique figurant dans (18').

8. Dans cette présentation de résultats obtenus par la méthode de Balk, nous avons dû nous limiter aux grandes lignes. Cependant, nous aimerais encore attirer l'attention sur *l'aspect mathématique* de la méthode. Les démonstrations sont effectuées avec rigueur; en particulier on y utilise les propriétés de limite de l'intégrale de Lebesgue. A l'aide de l'opérateur différentiel portant dans (17) sur la fonction ψ_y , Balk trouve pour celle-ci un développement remarquable en série de puissances. Signalons encore un *problème inverse posé par l'équation*

fondamentale restreinte, c'est-à-dire l'équation (16) dont le second membre s'annule. En effet, on peut se donner la fonction $f(u/t, x)$ et considérer le taux instantané $\kappa(u, t, x)$ comme fonction inconnue. L'intégration s'effectue directement lorsque $f(u/t, x)$ représente la fonction de fréquence de la distribution de Pareto. Pour tourner les difficultés que peuvent présenter d'autres cas d'intégration, Balk propose l'emploi de formules d'approximation établies à l'aide d'un développement en polynômes orthogonaux. Ainsi, il est à même de fournir des solutions approchées pour un $\kappa(u, x)$ stationnaire par rapport à t , à condition de s'imposer les fonctions de fréquence des distributions hyperbolique, parabolique, semi-normale et logarithmique-normale.

Le recours à la méthode de Balk n'est pas uniquement fructueux du point de vue mathématique mais aussi du point de vue économétrique. En effet, elle permet d'acquérir une connaissance plus approfondie des fonctions économétriques qui entrent dans la théorie de la distribution des revenus. On sait bien que l'existence d'une équation différentielle peut faire déceler des propriétés nouvelles de ces fonctions. De la *comparaison des deux méthodes* exposées respectivement sous chiffres II et III, nous déduisons qu'elles mènent, en principe, aux mêmes résultats. La méthode directe de transformation de l'élément de probabilité comporte, peut-être, une plus grande généralité que l'autre méthode, en ce sens qu'elle ne se borne pas aux phénomènes découlant de la liaison biométrique. En revanche, la méthode des équations aux dérivées partielles laisse entrevoir la possibilité de solutions en liaison biométrique plus générales, grâce à l'existence de l'équation fondamentale non restreinte. Une interpénétration sur le plan théorique des phénomènes démographiques et économiques en sera, peut-être, la conséquence la plus heureuse.

IV. Equations fonctionnelles des distributions globales

9. La notion de distribution globale se trouve être définie par la formule (2'') dans laquelle on voit apparaître trois fonctions $\bar{f}(u/t)$, $\lambda(x/t)$ et $f(u/t, x)$. Cette même formule peut être envisagée comme équation fonctionnelle liant ces fonctions entre elles. Tout se passe à l'intérieur d'un plan économétrique donné $(u, x)_t$, de sorte que t reste fixe aussi longtemps que l'on ne passe pas à un autre de ces plans. La pre-

mière question qui se pose est de savoir si la projection des distributions parallèles $f(u/t, x)$ sur l'axe des u du plan $(u, x)_t$, projection effectuée à l'aide de la structure d'âge $\lambda(x/t)$ prise comme fonction pondératrice, donne une distribution globale $\bar{f}(u/t)$ appartenant à la même famille de fonctions en u que $f(u/t, x)$. Nous désignons la question qui vient d'être posée comme le problème de conservation de première catégorie. Il s'agit donc d'un problème direct dans lequel sont données les deux fonctions sous le signe de somme. Ici nous n'envisageons que le cas des *distributions parallèles à minimum d'existence fixe*, c'est-à-dire indépendant de l'âge ainsi que le veut la transformation linéaire (10''), par exemple. Nous reviendrons sous chiffre 10 sur le cas du minimum d'existence variable avec x .

C'est Leuenberger [16] qui a examiné de près le *problème de conservation de première catégorie avec minimum d'existence fixe*. Il commence par étudier le cas de son hypothèse A_2 mentionnée à la fin du chiffre 5. Ainsi, toutes les distributions parallèles appartiennent à la même classe paramétrique à fonction de fréquence $g[u, c(x)]$ comme il ressort de la formule (15). Le problème de conservation de première catégorie se met en équation de la manière suivante, ceci en partant de (2'') et de (15) et en négligeant le t fixe:

$$\bar{f}(u) = \int_{x_0}^{x_1} \lambda(x) g[u, c(x)] dx = g[u, n(\lambda)]. \quad (21)$$

Du fait de l'hypothèse d'un minimum d'existence fixe, le champ de variation sera $m(t) \leq u < \infty$ aussi bien pour toutes les distributions parallèles que pour la distribution globale; la fonction de fréquence à deux variables $h(u, x)$ à la base des formules (2) se trouve ainsi définie dans une bande rectangulaire ouverte vers la droite. Leuenberger part encore des hypothèses que $c(x)$ est continu et $\lambda(x)$ non négatif, continu et normé sur $\overline{x_0, x_1}$. Il distingue ensuite deux cas, à savoir $n(\lambda) \equiv n_0 = \text{constant}$ et $n(\lambda)$ non constant. Pour les deux, il démontre que l'équation (21) n'est satisfaite que dans le cas banal où $s(x) \equiv s(x_0) = 1$, c'est-à-dire lorsqu'il y a indépendance stochastique par rapport à l'âge, $s(x)$ étant évidemment calculé selon (7'). A relever que dans le deuxième cas signalé, intervient une équation fonctionnelle exigeant que la fonction g prenne la forme suivante:

$$g(u, c) = g_1(c) g_2(u) + g_3(u). \quad (21')$$

Or, sous cette forme, $g(u,c)$ ne saurait être normée selon Leuenberger que dans le cas banal mentionné. Si l'on considère l'hypothèse A_1 découlant de la transformation (10'') comme un cas particulier de A_2 , on retrouve là également la même *réponse négative au problème de conservation de première catégorie*. Il en va de même pour l'hypothèse A pour autant que $m(t) = 0$; autrement m varie pour A nécessairement avec x , ce que nous envisagerons sous chiffre 10. On peut, bien entendu, tout en maintenant la condition d'un minimum d'existence fixe, se poser la même question pour le cas linéaire général (cf. chiffre 3) et le cas de correspondance bi-univoque non linéaire (cf. chiffre 5), c'est-à-dire de l'hypothèse générale de variation des revenus en dépendance stochastique. Nous pensons qu'ici le résultat sera aussi négatif; toutefois nous n'oserions l'affirmer, parce qu'il n'est pas exclu que l'existence d'autres paramètres ou l'introduction de paramètres nouveaux dans les distributions parallèles en vertu des transformations du genre (13) et (14) donnent au problème un aspect nouveau.

Leuenberger aborde encore le *problème de conservation de seconde catégorie*, dans lequel il compare deux distributions globales valables pour deux instants t différents. Il se demande si une distribution globale obtenue par une pondération $\lambda(x/t)$ conserve sa forme analytique en u , par exemple $\bar{f}(u/t)$ et non plus $g(u)$, si l'on vient à pondérer à un autre instant t' , avec $\lambda(x/t')$ les mêmes distributions parallèles. Ici la réponse est également négative.

10. Envisageons maintenant les problèmes de la relation des distributions parallèles avec la distribution globale dans le *cas d'un minimum d'existence variable avec l'âge x*, dont le prototype découle de la transformation (11). A ce propos nous signalerons en plus des problèmes de conservation encore deux autres aspects de la question. Il s'agit, d'une part, de la compatibilité statistique entre les fonctions de fréquence des distributions parallèles et celle de la distribution globale et, d'autre part, des problèmes de contact entre différentes branches de la courbe de fréquence relative à la distribution globale. Le premier de ces deux aspects se rencontre d'ailleurs aussi lorsque le minimum d'existence est fixe.

Voyons d'abord rapidement le problème de la projection. Si nous admettons des minima d'existence variables avec l'âge, il est clair que le domaine de définition de la fonction de fréquence à deux va-

riables $h(u,x)$ dans le plan $(u,x)_t$ ne prend plus la forme d'une bande rectangulaire ouverte vers la droite. La frontière de gauche sera une courbe plus ou moins compliquée, car, ne l'oublions pas, $m(t,x)$ peut même être choisi arbitrairement comme le montrent les formules (3) et (5'). Parmi ces minima il s'en trouvera, généralement, un plus grand que les autres; appelons-le $m'(t,x)$. Si l'on effectue la projection (2'') en un point $u < m'(t,x)$, définissant ainsi un intervalle (1), les limites d'intégration seront elles-mêmes fonctions de u , ce qui change, en général, automatiquement la nature de la fonction $\bar{f}(u)$ par rapport à celle des fonctions de fréquence $f(u/x)$. Le *problème de conservation pour l'intervalle* (1) se résoud donc par la négative. Mais pour les points $u \geq m'(t,x)$ qui définissent un intervalle (2), le problème de projection se présente, formellement du moins, de la même manière que lorsque les minima d'existence sont fixes. Par conséquent, la courbe de fréquence de la distribution globale se compose de deux branches principales, l'une correspondant à l'intervalle (1) et l'autre à l'intervalle (2); la branche principale (1) peut d'ailleurs se scinder en plusieurs sous-branches. C'est précisément entre les deux branches principales ainsi qu'entre les sous-branches que se posent les *problèmes de contact* signalés plus haut. Dans un autre travail [13], nous avons en particulier traité les conditions de raccord tangentiel entre les différentes branches, ceci dans l'hypothèse A d'une transformation $u = s(x)v$. Reste le *problème de la conservation pour l'intervalle* (2). Nous l'avons également étudié voici quelques années [l. c.] et avons pu dégager des conditions suffisantes pour que, dans l'hypothèse A , ce problème reçoive cette fois-ci une réponse positive. Or, Leuenberger [16] a poursuivi cette étude et a réussi à montrer que nos conditions suffisantes sont également nécessaires. A cet effet, il recourt à une équation fonctionnelle analogue à (21) et pose pour cette seconde branche pour laquelle on n'exige évidemment plus qu'elle soit normée:

$$\bar{f}_2(u) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda(x)}{s(x)} g\left[\frac{u}{s(x)}\right] dx = \frac{1}{n(\lambda)} g\left[\frac{u}{n(\lambda)}\right]. \quad (22)$$

En s'appuyant sur (21') qui dégénère maintenant en

$$g(u \cdot r) = g_1(u) \cdot g_2(r), \quad (22')$$

où $r = \frac{1}{s}$, on trouve selon un théorème de Pexider que les deux fonctions doivent prendre la forme

$$g_1(u) = A_1 u^B \text{ et } g_2(r) = A_2 r^B, \quad (22'')$$

de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que g satisfasse à (22) s'écrit:

$$g(u) = A u^B. \quad (22''')$$

Ce sont donc les distributions hyperbolique (Pareto) et parabolique qui seules conviennent pour assurer la conservation analytique de la deuxième branche de la courbe de fréquence de la distribution globale. Grâce à ces propriétés il nous a été possible de proposer deux distributions, la semi-hyperbolique et la semi-parabolique. La première d'entre elles, qui sera ainsi une distribution de Pareto pour $u \geq m'(t)$, permet en particulier de représenter approximativement la distribution d'une population entière selon son revenu complet [12]. Jusqu'ici nous n'avons envisagé que le cas de deux branches principales où $m(t,x) \leq u < \infty$; cependant on peut imaginer un intervalle de définition $m(t,x) \leq u \leq n(t,x)$ borné supérieurement. Ainsi, la distribution présentera trois branches principales [13].

Les problèmes de conservation recevant dans la plupart des cas une réponse négative, une question connexe prendra de ce fait une importance plus grande. En effet, si l'on se donne dans (2'') non plus le couple des fonctions $\lambda(x/t)$ et $f(u/t,x)$ mais le couple $\bar{f}(u/t)$ et $f(u/t,x)$, la troisième fonction, $\lambda(x)$, sera l'inconnue d'une équation intégrale. On posera ainsi le problème déjà signalé de la *compatibilité statistique entre une distribution globale donnée et les distributions parallèles*, ces dernières étant également connues à l'avance. L'équation (2''), écrite pour la première branche de la distribution globale dans l'hypothèse d'un $m(t,x)$ croissant de manière monotone avec x , se ramènera à une équation de Volterra; écrite pour la seconde branche, elle donnera une équation du type de Fredholm, cette dernière étant alors un cas limite de l'équation de Volterra [13]. Ce lien entre les équations de Volterra et de Fredholm pourra peut-être présenter un intérêt en matière de méthodologie mathématique; l'équation de Fredholm, plus difficile à résoudre, peut sembler-t-il se ramener à une équation de Volterra, plus simple à manier.

V. Autres problèmes – Autres méthodes

11. Lorsque nous parlons «d'autres problèmes», nous avons d'abord en vue les nombreuses *applications* de la théorie mathématique de la distribution des revenus. Elles découlent souvent des problèmes de la sécurité sociale où l'on a recours, avant tout, à la théorie des distributions parallèles. Mais il est un domaine où l'emploi des distributions globales s'impose; nous pensons ici aux questions fiscales. Chaque actuaire pourra rendre des services appréciables s'il sait résoudre ces problèmes à l'aide de distributions de revenus. Pour cette raison, nous traiterons brièvement, ci-après, un problème fondamental de la fiscalité. Toutefois, il est utile d'introduire auparavant une nouvelle fonction qui simplifiera l'étude de ces applications. Nous voulons parler de la *densité des revenus*. Seules les distributions globales, variables avec le temps t , étant envisagées ici, nous noterons leurs fonctions de fréquence simplement par $f(u/t)$, au lieu de $\bar{f}(u/t)$, et nous définirons la densité des revenus comme suit:

$$\varphi(u/t) = \frac{1}{M(t)} u f(u/t); \quad (23)$$

la moyenne $M(t)$ des revenus à l'instant t est calculée selon (6). On voit immédiatement que cette densité est normée, c'est-à-dire que:

$$\int_0^\infty \varphi(u/t) du = 1. \quad (23')$$

Le sens de cette nouvelle fonction apparaît plus clairement si l'on se reporte à la *fonction sommatoire Φ des revenus* qui donne la somme des revenus inférieurs à u , en multipliant Φ avec les effectifs $L(t)$ vivant à l'instant t :

$$\Phi(u/t) = \int_0^u \eta f(\eta/t) d\eta = M(t) \int_0^u \varphi(\eta/t) d\eta; \quad (24)$$

on obtient donc:

$$\varphi(u/t) = \frac{1}{M(t)} \frac{d\Phi(u/t)}{du}. \quad (24')$$

Nous sommes bien en présence d'une densité de revenus qui fournit la répartition des unités monétaires selon les revenus, alors que $f(u/t)$

caractérise la répartition des personnes selon ces mêmes revenus. La fonction de répartition $F(u/t)$, dite cumulative, joue par rapport à $f(u/t)$ le même rôle sommatoire que $\Phi(u/t)$ par rapport à $\varphi(u/t)$. Pour la suite, il est aussi utile de connaître les propriétés transformatives de φ et de Φ par rapport au changement de variables $u = \sigma(t) v$, u étant associé à t et v à t_0 . On démontre sans peine que:

$$\varphi(u/t) = \frac{1}{\sigma(t)} \varphi(v/t_0), \quad (25)$$

$$\Phi(u/t) = \sigma(t) \Phi(v/t_0). \quad (25')$$

Rappelons que $\sigma(t)$ représente le vecteur de dilatation conjoncturelle défini ici par le rapport $M(t) : M(t_0)$. φ a donc les mêmes propriétés transformatives que f ; en revanche, F en a de plus simples que Φ , puisqu'on sait que $F(u/t) = F(v/t_0)$.

Venons-en maintenant à l'application annoncée et traitons ce que l'on peut appeler le *problème conjoncturel de la fiscalité*. Notre intention est de montrer comment évoluent les recettes fiscales lorsque les revenus d'une population croissent, que ce soit à la suite d'une dépréciation monétaire (augmentation nominale), ou d'une variation dans la productivité (augmentation réelle). Cette fluctuation des revenus peut être interprétée par notre vecteur conjoncturel $\sigma(t)$. Supposons que la loi fiscale envisagée soit caractérisée par un taux d'imposition $\pi(u)$ qui ne variera pas avec le temps. A l'instant t_0 , les contribuables se distribuent selon leurs revenus d'après la fonction de fréquence $f(v/t_0)$ et à l'instant t selon $f(u/t) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{u}{\sigma}/t_0\right)$. Les notions dignes d'intérêt sont ici les suivantes:

— la somme des revenus dont dispose la population se composant en moyenne annuelle de $L(t)$ personnes:

$$\Theta(t) = L(t) \int_0^\infty u f(u/t) du = L(t) M(t), \quad (26)$$

— la somme des recettes fiscales encaissées moyennant le taux d'imposition $\pi(u)$:

$$\Omega(t) = L(t) \int_0^\infty \pi(u) u f(u/t) du, \quad (26')$$

– et le taux fiscal moyen calculé en divisant (26') par (26):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\pi}(t) &= \frac{1}{M(t)} \int_0^\infty \pi(u) u f(u/t) du = \int_0^\infty \pi(u) \varphi(u/t) du \\ &= \int_0^\infty \pi[\sigma(t)v] \varphi(v/t_0) dv. \end{aligned} \right\} \quad (26'')$$

Constatons d'abord que la densité des revenus s'introduit tout naturellement dans (26''); ensuite que le taux fiscal moyen s'obtient à partir des taux $\pi(u)$ à l'aide de la pondératrice $\varphi(u/t)$, alors que l'impôt moyen par tête de population, exprimé en unités monétaires, serait déterminé à l'aide de la pondératrice $f(u/t)$. – Nous pouvons écrire, maintenant les équations (26), (26') et (26'') pour l'instant t_0 et effectuer la comparaison avec les quantités correspondantes calculées à l'instant t , en tenant compte des propriétés transformatives signalées plus haut. Confrontons d'abord les sommes de revenus et ensuite celles des recettes fiscales; il vient:

$$\theta(t) = \frac{\Theta(t)}{\Theta(t_0)} = \sigma(t) \frac{L(t)}{L(t_0)}, \quad (27)$$

$$\omega(t) = \frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} = \sigma(t) \frac{L(t)}{L(t_0)} \frac{\bar{\pi}(t)}{\bar{\pi}(t_0)} = \theta(t) \frac{\bar{\pi}(t)}{\bar{\pi}(t_0)}. \quad (27')$$

La discussion est immédiate, car tout dépend des taux moyens $\bar{\pi}$ calculés selon (26''). Pour tirer des conclusions pratiques de ces relations, il faudrait préciser la nature de $\pi(u)$. Si $\pi(u) = \pi = \text{constant}$ alors $\omega(t) = \theta(t)$, ce qui est en principe le cas pour les cotisations AVS. Mais si, par exemple, $\pi(u) = \beta u$, c'est-à-dire lorsqu'il y a proportionnalité entre π et u , on trouvera $\omega(t) = \theta(t) \sigma(t)$; alors l'Etat encaisse plus que ne le justifierait le seul accroissement des revenus. $\omega(t)$ comprendra $\sigma^2(t)$, ce qui revient à dire que si les revenus doublent, les recettes fiscales, elles, sont quadruplées. On pourra étudier à loisir d'autres formes de $\pi(u)$ telles que le cas linéaire non proportionnel ou encore le cas $\pi(u) = +\alpha \sqrt{u}$ qui semble convenir, en première approximation, à la loi fiscale du canton de Berne. Ces considérations montrent abondamment que lorsque les revenus augmentent, l'Etat devrait se faire un devoir d'adapter le taux d'impôt à la situation économique nouvelle.

Or, le problème conjoncturel de la fiscalité présente une *inversion remarquable*. En effet, considérons (26''), écrit pour l'instant t , et faisons intervenir le revenu le plus grand constaté à ce moment-là. Soit $n(t)$ ce revenu maximum, de sorte que $0 \leq u \leq n(t)$. Ainsi, nous pouvons écrire:

$$\bar{\pi}(t) = \int_0^{n(t)} \pi(u) \varphi(u/t) du. \quad (26^*)$$

Posons encore $n(t) = z$ avec une fonction inverse univoque $t = k(z)$, de sorte qu'il vient:

$$\bar{\pi}[k(z)] = \int_0^z \pi(u) \varphi[u/k(z)] du. \quad (26^{**})$$

Nous sommes donc en présence d'une équation intégrale de première espèce de Volterra avec fonction inconnue $\pi(u)$ et noyau $\varphi(u/t)$; appelons-la *équation intégrale de la fiscalité*. Son interprétation est facile et permet de résoudre le problème de la planification fiscale. En effet, d'une part, on peut faire des hypothèses plausibles, du moins pour quelques années, sur l'évolution schématique de la distribution des revenus; la fonction φ est donc connue ainsi que le revenu moyen $M(t)$. D'autre part, on peut supposer que l'évolution globale des dépenses budgétaires est donnée, de sorte que le taux moyen d'imposition $\bar{\pi}(t)$ est aussi déterminé. Notre équation (26^{**}) permet de calculer la fonction fiscale $\pi(u)$ de telle sorte que la variation de π avec u se trouve en harmonie avec le plan budgétaire établi. On évitera ainsi les surprises du genre de celles que nous avons signalées dans le problème direct où $\pi(u)$ est donné. La solution de (26^{**}) se trouvera aisément si l'on admet pour $f(u/t)$ une distribution parabolique qui mènera à un noyau dégénéré. Rien n'empêche d'ailleurs de considérer le cas $m(t) \leq u < \infty$ où le minimum d'existence jouera le rôle du plus grand revenu $n(t)$.

12. Les applications de la théorie de la distribution des revenus aux *assurances sociales* sont fort nombreuses. Cette théorie permet, en effet, d'aborder avec succès le calcul de la *prestation moyenne* lorsque les prestations individuelles sont des fonctions plus ou moins compliquées des revenus antérieurs. L'AVS suisse offre de tels exemples aussi bien en ce qui concerne les rentes transitoires que les rentes ordinaires; chaque fois on est ici en présence d'une fonction polygonale des revenus [18]. Dans d'autres systèmes également les formules

arithmétiques de pensions sont la règle, comme nous le constatons en lisant les travaux de Féraud [5, 6]; mais il en ressort aussi que souvent on essaie de se baser sur des formules qui permettent de calculer la pension moyenne ne dépendant que du salaire moyen à chaque âge. Outre le problème que nous venons de signaler, ce sont avant tout les variations monétaires qui préoccupent les actuaires de la sécurité sociale; Zelenka [29] a consacré à cet aspect un travail récent. Dans le même ordre d'idées nous pensons aussi à la question de la *revalorisation des pensions*. Nous montrerons ci-après comment on peut construire un schéma de calcul pour les prestations moyennes, si l'on doit tenir compte à la fois d'une variation monétaire et d'un système de pensions ne se ramenant pas aux formules linéaires simples; nous avons d'ailleurs déjà eu l'occasion d'esquisser une telle solution [15]. Cependant, le champ d'application des distributions de revenus aux assurances sociales est plus vaste encore. D'abord nous pensons à la question des *systèmes financiers* que l'on peut également considérer sous cet angle [13]; à ce propos, il sied de signaler aussi les études que Balk [2] a entreprises en s'inspirant de sa méthode des équations aux dérivées partielles. Ensuite, c'est un aspect nouveau qui va prendre une importance sans cesse croissante, les questions économiques et celles de sécurité sociale étant toujours plus étroitement liées les unes aux autres. N'est-il pas exact que cette dernière constitue un mécanisme qui implique une part plus ou moins grande de *redistribution du revenu national*? Cet aspect est d'ailleurs souvent mis en évidence par le Bureau International du Travail à Genève. A ce propos on pourrait se poser un problème théorique non dépourvu d'intérêt: Soit donnée une distribution de revenus initiale d'une population. On se propose de modifier cette distribution de telle sorte qu'elle prenne une forme finale jugée désirable; quel aspect présenterait alors une formule de pensions ou d'allocations devant être servies à une partie prescrite de la population pour que la distribution finale soit réalisée. Pour simplifier le problème on pourrait supposer que ce régime «correctif» est financé au moyen d'un taux fixe de cotisations ce qui provoquerait, comme stade intermédiaire, une distribution initiale contractée. Quelles seraient les conditions supplémentaires à imposer afin que le problème reçoive une solution unique?

Abordons encore, comme nous l'avons annoncé, une méthode permettant de calculer les *rentes moyennes de l'AVS suisse en fonction des*

variations conjoncturelles qui pourraient se présenter au cours de la carrière des assurés. Au centre de ce calcul se trouve la cotisation annuelle moyenne ou, ce qui revient au même, le salaire annuel moyen réalisé pendant cette carrière. Considérons un assuré au début de sa ligne de vie, donc au point t_0, x_0 avec un revenu initial v et suivons sa ligne de revenu définie dans le plan bio-économétrique $(\tau, u)_{t_0}$ par (12), ce qui permet de calculer $u(\tau, v)$ en chaque point de la carrière. Le revenu annuel moyen réalisé entre l'âge d'entrée x_0 et l'âge d'admission à pension x_1 ne sera autre que:

$$\hat{u}(v) = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_0^{x_1 - x_0} u(\tau, v) d\tau. \quad (28)$$

Afin de pouvoir calculer la rente moyenne attribuée à l'âge x_1 et basée sur $\hat{u}(v)$, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la forme de la distribution des nouveaux pensionnés selon leur revenu annuel moyen. Mais puisque $u(\tau, v)$ assure selon les hypothèses admises au chapitre II une correspondance bi-univoque entre u et v , il en sera de même pour \hat{u} , calculé selon (28), et v , de sorte que $\hat{u} = \vartheta(v)$ et $v = \psi(\hat{u})$. Mais ainsi il vient, pour autant que $g(v)$ soit connu:

$$f(\hat{u}) = g[\psi(\hat{u})] \psi'(\hat{u}). \quad (28')$$

Si l'on veut disposer d'un schéma pratique facile, on pourra s'inspirer de l'une des transformations (10'') ou (11'), cette dernière s'écrivant ici:

$$u(\tau, v) = s(x_0 + \tau) \frac{\sigma(t_0 + \tau)}{\sigma(t_0)} v, \quad (28'')$$

transformation qu'il suffit de substituer en (28). L'actuaire pourra déceler ainsi le comportement d'un régime de pensions par rapport à une variation conjoncturelle. Il s'agit bien entendu d'un schéma théorique sans grande chance de réalisation, mais plein d'enseignements dont l'actuaire devra tenir compte lorsqu'il proposera des formules arithmétiques de pensions.

13. Nous venons de traiter un problème diagonal puisque nous avons suivi une personne le long de sa ligne de vie dans le plan (t, x) . Il nous ramène tout droit dans le domaine du *calcul des probabilités*; n'a-t-on pas envisagé, en effet, la question de distribution d'une

moyenne arithmétique de variables aléatoires calculée selon (28) ? Or, la théorie de l'addition des variables aléatoires est désormais classique [18]. On peut dégager l'aspect le plus simple de cette théorie si l'on se fonde sur la *distribution normale*. C'est pour cette raison que nous avons supposé, pour une fois, que les distributions parallèles afférentes à une ligne de vie $x - x_0 = \tau$ appartiennent à cette distribution particulière. Nous aurions donc, pour un âge x donné :

$$f(u/x) = \frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2(u-a_x)^2}, \quad (29)$$

a_x étant la moyenne et h_x la précision de cette fonction de fréquence de la distribution normale que nous noterons par le symbole $N(u/a_x, h_x)$. Les propriétés transformatives par rapport à la substitution simple de notre hypothèse A , soit $u = s(x) v$, permettent de calculer $N(u/a_x, h_x)$ à partir de $N(v/a_{x_0}, h_{x_0})$, les paramètres se transformant ainsi :

$$a_x = a_{x_0} s(x) \quad (29')$$

$$h_x = \frac{h_{x_0}}{s(x)}. \quad (29'')$$

Dans l'hypothèse d'une liaison biométrique où nous considérons la ligne de revenu (12) à titre individuel, nous sommes en mesure de calculer une distribution afférente à la moyenne arithmétique selon les formules (28). Rien n'empêche de se placer au point de vue discontinu, de sorte que nous n'avons plus que n variables aléatoires dépendantes u_i correspondant aux âges x_0, x_0+1, \dots, x_1-1 . Nous trouvons ainsi une distribution de la moyenne arithmétique de ces u_i , c'est-à-dire de \hat{u} , distribution que nous noterons $N(\hat{u}/\hat{a}, \hat{h})$ et où :

$$\hat{a} = a_{x_0} \frac{\sum s_x}{n} \quad (30)$$

$$\hat{h} = \frac{n h_{x_0}}{\sum s_x}. \quad (30')$$

Mais essayons d'abandonner notre point de vue fondamental de la liaison stochastique forte obtenue par le truchement de l'interprétation individuelle de (12). Admettons ainsi que les n variables aléatoires u_i soient distribuées normalement sans liaison stochastique entre

elles et qu'il se trouve, «par hasard» cette fois-ci, que chacune de ces distributions ait également les paramètres a_x et h_x définis par (29') et (29''). Dans ces conditions artificielles, nous pouvons appliquer formellement le théorème sur la distribution de la moyenne arithmétique de n variables stochastiquement indépendantes. Cette autre distribution $N(\hat{a}/\hat{a}, \hat{h})$ aura les paramètres suivants:

$$\hat{a} = a_{x_0} \frac{\sum s_x}{n} \quad (31)$$

$$\hat{h} = \frac{n h_{x_0}}{\sqrt{\sum s_x^2}}. \quad (31')$$

La comparaison des formules (30) et des formules (31) montre immédiatement que $\hat{a} = \hat{a}$ et que $\hat{h} < \hat{h}$, ce qui revient à dire pour les dispersions que $\hat{\sigma} > \hat{\sigma}$. Ces deux inégalités découlent du fait que $s_x > 1$ pour $x > x_0$, car alors $\sum s_x^2 < (\sum s_x)^2$. La dispersion des moyennes arithmétiques en dépendance stochastique est donc plus grande qu'en indépendance stochastique. Mais précisons bien que nous avons considéré le cas de l'indépendance stochastique comme simple système de référence afin de pouvoir procéder à une comparaison intéressante en soi.

«Autres méthodes» avons-nous également écrit dans le titre de ce chapitre final. En effet, à côté des nombreux problèmes non résolus qui jalonnent notre exposé, nous voudrions signaler que la théorie mathématique sur la distribution des revenus peut être abordée par d'autres méthodes, du moins espérons-le. Cet espoir se fonde non seulement sur la multitude des procédés modernes développés par la statistique mathématique et l'économétrie, mais aussi sur la richesse de l'analyse mathématique. Nous pensons, par exemple, que grâce à la *statistique mathématique* on pourra pousser les recherches dans la direction des fonctions caractéristiques [10] et du calcul de corrélation. Dans le domaine de l'*analyse mathématique*, il n'est pas exclu que le recours au calcul vectoriel, voire tensoriel, puisse donner à la théorie une impulsion nouvelle. Ainsi avons-nous pu tenir notre promesse initiale, qui était de présenter une science en pleine évolution, et ce fait est de bon augure au seuil d'un nouveau demi-siècle d'histoire de notre association.

Bibliographie

(voir également l'index bibliographique des publications [2], [13] et [16] ci-dessous)

- [1] *Amato, V.*: «Sur la représentation analytique des courbes de fréquence (concentration) des revenus avec la méthode des transformées Eulériennes de première espèce» (*Rivista italiana di demografia e statistica*, Vol. III, Roma 1949).
- [2] *Balk, W.*: «Considérations actuarielles sur le système de retraites et de prévoyance basé sur les revenus dernier-touchés» (Dissertation, Amsterdam 1955).
- [3] *Brüschweiler, C.*: «Saläre kaufmännischer Angestellter 1928–1950» (Zürich 1953).
- [4] *Cantelli, F. P.*: «Sulla legge di distribuzione dei redditi» (Roma 1929).
- [5] *Féraud, L.*: «Les formules linéaires de pension» (XIII^e Congrès international d'actuaires Scheveningue 1951, Amsterdam 1951).
- [6] *Féraud, L.*: «Sur l'actuariat des assurances collectives» (Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1^{er} fascicule, Berne 1952).
- [7] *Fréchet, M.*: «Sur les formules de répartition des revenus» (Revue de l'Institut international de statistique, La Haye 1939).
- [8] *Fréchet, M.*: «Nouveaux essais d'explication de la répartition des revenus» (Revue de l'Institut international de statistique, La Haye 1945).
- [9] *Gerber, E.*: «Veränderungen der Einkommensverteilung in England, 1938 bis 1948» (Beiträge zur praktischen Nationalökonomie, hg. von Prof. F. Marbach, Band 9, Bern 1952).
- [10] *Haller, B.*: «Verteilungsfunktionen und ihre Auszeichnung durch Funktionalgleichungen» (Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1^{er} fascicule, Berne 1945).
- [11] *Kaiser, E.*: «Demographische und wirtschaftliche Rechnungsgrundlagen zur eidgenössischen Alters- und Hinterlassenversicherung» (Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1^{er} fascicule, Berne 1947).
- [12] *Kaiser, E.*: «Eine neue Verteilungsfunktion für das Volkseinkommen» (Conférence à l'assemblée générale de 1949, cf. Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 1^{er} fascicule, Berne 1950).
- [13] *Kaiser, E.*: «La distribution des revenus dans la technique mathématique de la sécurité sociale» (Bulletin de l'Association des actuaires suisses, 2^e fascicule, Berne 1950).
- [14] *Kaiser, E.*: «Über die mathematische Theorie der Einkommensverteilungen» (Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, Neue Folge, 9. Band, Bern 1951).
- [15] *Kaiser, E.*: «Système de répartition et distribution de revenus variant avec le temps» (XIII^e Congrès international d'actuaires Scheveningue 1951, Amsterdam 1951).

- [16] *Leuenberger, F.*: «Zur mathematischen Theorie der Einkommensverteilung in Abhängigkeit von Alter und Zeit» (Dissertation, Berne 1953).
- [17] *Leuenberger, F.*: «Zur Theorie der Einkommensverteilung» (50 Jahre mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar der Universität Bern 1902 bis 1952, Festschrift, Bern 1953).
- [18] *Lévy, P.*: «Théorie de l'addition des variables aléatoires» (Paris 1954).
- [19] *Marchand, E.*: «Quelques problèmes mathématiques de l'assurance sociale» (Zurich 1950).
- [20] *Mourre*: «Définition et évolution de l'inégalité des revenus» (Journal de la société de statistique de Paris, n° 10–12, Paris 1950).
- [21] Office fédéral des assurances sociales: «L'équilibre financier de l'assurance-vieillesse et survivants» (Berne 1947).
- [22] Office fédéral des assurances sociales: «La situation financière de l'assurance-fédérale vieillesse et survivants au 31 décembre 1950» (Berne 1951).
- [23] Office fédéral des assurances sociales: «Rapport sur l'assurance-vieillesse et survivants fédérale durant l'année 1952» (Berne 1953).
- [24] Office fédéral des assurances sociales et Commission fédérale d'experts chargée de la revision de l'assurance-maladie et de l'institution de l'assurance-maternité: «Rapport et avant-projet relatifs à une loi fédérale sur l'assurance-maladie et l'assurance-maternité» (Berne 1954).
- [25] *Pareto, V.*: «Cours d'économie politique» (Lausanne 1896).
- [26] *Sagoroff, S.*: «Die Paretosche und Lorenzsche kumulative Verteilungskurve der individuellen Einkommen» (Mitteilungsblatt für mathematische Statistik, München 1952).
- [27] *Schmucker, Helga*: «Repräsentativerhebungen zur kurzfristigen Beobachtung von Einkommensverteilung und Einkommensverwendung im Ausland» (Allgemeines statistisches Archiv, München 1952).
- [28] *Seal, H.L.*: «The maximum likelihood fitting of the discrete Pareto law» (Journal of the Institute of Actuaries, London 1952).
- [29] *Zelenka, A.*: «Sécurité sociale et les variations du niveau général des salaires» (XIII^e Congrès international d'actuaires Scheveningue 1951, Amsterdam 1951).

