Les assurances d'annuités sur une et plusieurs têtes et leurs applications aux assurances mixtes

Autor(en): **Jéquier, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **55 (1955)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-551025

Les assurances d'annuités sur une et plusieurs têtes et leurs applications aux assurances mixtes

Par *Ch. Jéquier*, Lausanne

Introduction. A plusieurs reprises déjà nous nous sommes occupés des assurances d'annuités [1]), voir [I] [II] connues aussi sous le nom populaire de «rentes familiales [2])». Récemment, dans un excellent article M. A. Wenk [IV] ayant imaginé de nouvelles applications des assurances d'annuités, a parlé incidemment des rentes familiales sur deux têtes; mais, à notre connaissance, il n'y a jamais eu d'études systématiques sur les assurances d'annuités sur plusieurs têtes. C'est pourquoi nous avons entrepris des recherches à ce sujet.

Quand nous parlons d'assurances d'annuités sur plusieurs têtes, l'expression «au premier décès» est sous-entendue. Pour bien préciser nous admettrons les hypothèses suivantes:

1. La table de mortalité envisagée suppose les décès payés à *la fin de l'année*; ainsi nos formules ne seraient pas toutes exactes avec une table comme *A F*, qui envisage les décès payés au milieu de l'année.

2. Les rentes considérées sont «praenumerando», le premier arrérage étant payé au début de l'année qui suit celle où le décès s'est produit, le dernier une année avant l'échéance, voir [I] p. 32.

3. Dès le premier décès la rente future se transforme en une rente certaine, rente en cours due jusqu'au début de la dernière année d'assurance, quelque soit le sort du bénéficiaire; si celui-ci meurt avant l'échéance l'assureur paiera les termes qui restent à un autre bénéficiaire désigné.

---

[1]) Les chiffres romains entre crochets renvoient à la bibliographie, p. 82.

[2]) En allemand: «Erbrente.»

Dans ce travail nous rappelons d'abord symboles et particularités de la rente familiale ordinaire, c'est-à-dire sur une tête. Puis nous étudions en détail les assurances d'annuités sur deux têtes et leurs applications à l'assurance mixte sur deux têtes; enfin nous passons aux assurances d'annuités et aux assurances mixtes sur trois têtes. Pour terminer nous mentionnons quelques formules générales concernant les rentes familiales sur m têtes.

Remarques: Comme, à plusieurs reprises, nous approfondirons deux cas-types d'assurances nous donnons ici – afin d'éviter des répétitions – les caractéristiques de ces deux exemples numériques. On aura toujours: âge d'entrée 30 ans, rente familiale $R = 1000$ et capital assuré $C = 10\,000$ dans le cas d'une assurance mixte.

Exemple nº 1: Durée: $n = 20$ ans. Table MWI à $3^1/_2\,^0/_0$. On a alors: $CP_{\overline{20}|} = 341{,}67$ et $R' = CP_{\overline{20}|} + Cd = 341{,}67 + 338{,}16$
$R' = \mathit{679{,}83}$.

Exemple nº 2: Durée: $n = 30$ ans. Table SM 1921/30 à $2^3/_4\,^0/_0$. On a alors: $CP_{\overline{30}|} = 212{,}99$ et $R' = CP_{\overline{30}|} + Cd$
$R' = 212{,}99 + 267{,}64 = \mathit{480{,}63}$.

I. Les assurances d'annuités sur une tête

Rappelons les formules suivantes, voir [I] et [II], relatives à une rente de un franc:

Prime unique
$$H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} \tag{1}$$

Prime annuelle
$$h_{x:\overline{n}|} = \frac{H_{x:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{2}$$

$$h_{x:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} - 1 \tag{3}$$

$$1 + h_{x:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{4}$$

Réserve mathématique
$${}_kV(H_{x:\overline{n}|}) = H_{x':\overline{n'}|} - h_{x:\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} \tag{5}$$
où $x' = x + k$ et $n' = n - k$

$${}_kV(H_{x:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (1 + h_{x:\overline{n}|})\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} \tag{6}$$

Pour obtenir des primes élevées la compagnie choisira une table à mortalité élevée et un taux d'intérêt faible. De deux tables différentes celle qui indique la mortalité la plus forte conduit à la rente $a_{x:\overline{n}|}$ la plus faible – donc aux primes les plus élevées (voir ci-dessous). En général, pour éviter l'antisélection, l'assureur fera passer un examen médical au candidat.

Quant au taux d'intérêt la question est plus délicate; si $i' > i$ on a $a_{\overline{n}|}(i') < a_{\overline{n}|}(i)$ et $a_{x:\overline{n}|}(i') < a_{x:\overline{n}|}(i)$; mais la rente certaine variant plus rapidement que la rente temporaire viagère, les primes seront tout de même plus faibles avec i' qu'avec i. L'assureur a donc avantage a choisir un taux technique bas, bien que l'influence de l'intérêt sur la prime annuelle ne soit pas considérable comme on le voit dans l'exemple ci-après.

Assurance d'annuités: $R = 100$, $x = 30$, $n = 25$. SM 1921/30.

On a:			
Taux technique:	$2\frac{1}{2}\%$	3%	$3\frac{1}{2}\%$
Prime unique	117,70	108,70	100,40
Prime annuelle	6,65	6,45	6,25

Autre exemple: Variation des primes en fonction de la mortalité $R = 100$.

Envisageons les trois tables suivantes. Taux $3\frac{1}{2}\%$:

I. SM 1901/10, II. SM 1921/30, III. SM 1939/44.

On obtient les primes ci-après:

		Primes uniques			Primes annuelles		
x	n	Table I	II	III	I	II	III
50	15	164,90	131,70	103,40	16,05	12,42	9,50
40	20	160,40	118,30	86,80	12,24	8,75	6,27
30	25	145,70	100,40	71,30	9,34	6,25	4,36

Les variations des primes seront analogues dans les assurances sur plusieurs têtes; page 75 nous donnons quelques exemples de l'influence sur le montant des primes de l'âge d'entrée, de la durée, ainsi que du nombre de têtes.

Quant à la réserve mathématique rappelons qu'elle est souvent négative. Cela a lieu – voir formules (4) et (6) – chaque fois que

$$b_1' < b_1, \text{ si l'on pose } b_1' = \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{x':\overline{n'}|}} \text{ et } b_1 = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}, \tag{7}$$

voir [I] p. 34.

II. Les assurances d'annuités sur deux têtes

Il y a ici deux assurés x et y qui, tous deux, passent un examen médical; la compagnie s'engage à payer, dès le premier décès, une rente de un franc, jusqu'à l'échéance – non-comprise – au bénéficiaire du contrat qui, en général, sera le second assuré. Comme dans le cas ordinaire le premier arrérage sera payé au début de l'année qui suit le décès. On a les formules suivantes, presque évidentes:

$$\text{Prime unique} \quad H_{xy:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{xy:\overline{n}|} \tag{8}$$

$$\text{Prime annuelle} \quad h_{xy:\overline{n}|} = \frac{H_{xy:\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} \tag{9}$$

La prime est due jusqu'à l'échéance, ou jusqu'au premier décès; on a aussi:

$$h_{xy:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} - 1 \tag{10}$$

$$1 + h_{xy:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}} \tag{11}$$

La réserve mathématique comptée à la fin de la k^{e} année est donnée par les relations suivantes:

Assurance à prime unique:

$${}_kV(H_{xy:\overline{n}|}) = H_{x'y':\overline{n'}|} \tag{12}$$

où $x' = x + k$, $y' = y + k$, $n' = n - k$,

ou

$${}_kV(H_{xy:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \mathrm{a}_{x'y':\overline{n'}|} \tag{13}$$

Assurance à primes annuelles:

$${}_kV(H_{xy:\overline{n}|}) = H_{x'y':\overline{n'}|} - h_{xy:\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{x'y':\overline{n'}|} \tag{14}$$

ou

$${}_kV(H_{xy:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (1 + h_{xy:\overline{n}|})\,\mathrm{a}_{x'y':\overline{n'}|} \tag{15}$$

k représente ici le nombre des primes payées. En raison de (11) on peut écrire la formule «des quatres rentes», à savoir:

$${}_kV(H_{xy:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}}\,\mathrm{a}_{x'y':\overline{n'}|} \tag{16}$$

La réserve mathématique est négative quand

$$\frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{x'y':\overline{n'}|}} < \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{xy:\overline{n}|}} \tag{17}$$

ce qui arrive souvent, ainsi que le montrent les calculs.

Cas particuliers: a) A l'échéance, pour $k = n$, la réserve mathématique est nulle (voir formule 15 où $n' = 0$).

b) Une année avant l'échéance, pour $k = n - 1$, la «dette technique» est négative; comme dans le cas de l'assurance ordinaire la réserve mathématique est égale à la prime annuelle changée de signe. On a ici:

$$_{n-1}V(H_{xy:\overline{n}|}) = -h_{xy:\overline{n}|} \tag{18}$$

La formule 15 donne en effet:

$$_{n-1}V = a_{\overline{1}|} - (1 + h_{xy:\overline{n}|})\, a_{x'y':\overline{1}|} = -h_{xy:\overline{n}|}$$

Ainsi, quelles que soient les bases techniques adoptées, quels que soient les âges d'entrée et la durée, la rente familiale sur deux têtes, d'un montant R, présente au moins une réserve mathématique négative, l'avant-dernière, égale à $-P = -R\,h_{x:y:\overline{n}|}$; mais, en général, il existe plusieurs réserves négatives avant l'avant-dernière.

Cas des deux âges égaux

Si la table est ajustée par la formule de Makeham on peut trouver un âge actuarien ξ tel que $a_{\xi:\xi} = a_{xy}$; développées en séries les deux rentes sont égales *terme à terme*; on a par exemple $_tE_{\xi\xi} = {}_tE_{xy}$, t étant un terme de rang quelconque. On a donc aussi $a_{\xi\xi:\overline{n}|} = a_{xy:\overline{n}|}$.

Si la table n'est pas ajustée par la formule de Makeham on pourra trouver un âge λ tel que $a_{\lambda\lambda:\overline{n}|} \sim a_{xy:\overline{n}|}$; nous n'aurons plus une égalité, mais seulement, pour $a_{\lambda\lambda:\overline{n}|}$, une valeur approchée, l'approximation pouvant d'ailleurs être satisfaisante. Dans la suite nous supposerons que l'ajustement a lieu d'après Makeham [1]). Désignant l'âge unique

[1]) C'est la supposition que font généralement les compagnies pour établir leurs tarifs d'assurances mixtes sur 2 têtes où les primes sont données pour 2 âges égaux.

par x, au lieu de ξ, nous pouvons transcrire comme il suit les formules précédentes:

$$H_{xx:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{xx:\overline{n}|} \tag{19}$$

$$h_{xx:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}} - 1 \tag{20}$$

$$1 + h_{xx:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}} \tag{21}$$

Ainsi le rapport de la rente certaine à la rente sur deux têtes $\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}$ est égal à la prime annuelle $h_{xx:\overline{n}|}$ augmentée de l'unité. On a, pour les réserves mathématiques:

Assurance à prime unique:

$$_kV(H_{xx:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} \tag{22}$$

Assurance à primes annuelles:

$$_kV(H_{xx:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - (1 + h_{xx:\overline{n}|})\, \mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} \tag{23}$$

$$_kV(H_{xx:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}}\, \mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} \tag{24}$$

formule «des quatres rentes».

La réserve mathématique est négative toutes les fois que $b_2' < b_2$ si l'on pose

$$b_2' = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n'}|}}{\mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|}} \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}} \tag{25}$$

b_2 est le rapport des rentes «initiales» (âge d'entrée x, durée totale n), b_2' est celui des rentes relatives à l'âge actuel $x + k$ et à la durée restant à courir $n - k$; pour une police donnée il y a autant de rapports b_2' que de valeurs de k.

Remarquons enfin que si le premier décès survient cette k^{e} année, le terme négatif dans (24) s'annulant, la réserve mathématique augmente brusquement; de négative qu'elle était peut-être, elle devient subitement positive.

Comparaison entre les deux sortes d'assurances d'annuités

Mêmes bases techniques et mêmes caractéristiques étant données, on a, comme $\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|} < \mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$ $b_2 > b_1$ (voir pages 59 et 62)

$$H_{xx:\overline{n}|} > H_{x:\overline{n}|} \tag{26}$$

$$h_{xx:\overline{n}|} > h_{x:\overline{n}|} \quad \text{(sauf si } n = 1\text{!)}. \tag{27}$$

Dans la rente familiale sur deux têtes les primes sont donc plus élevées que dans la rente familiale ordinaire (sur une tête). Rien d'étonnant à cela, le risque pour la compagnie, étant doublé (voir exemples p. 65 et 66). Mais qu'en est-il du «capital de couverture»? Pour l'assurance à prime unique on a: $H_{x'x':\overline{n'}|} > H_{x':\overline{n'}|}$ sauf si $n' = 1$, cas très particulier où les deux membres seraient nuls. On a donc:

$$\varDelta \text{rés.} = \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} - \mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} \tag{28}$$

en posant

$$\varDelta \text{rés.} = {}_kV(2) - {}_kV(1) = {}_kV(H_{xx:\overline{n}|}) - {}_kV(H_{x:\overline{n}|})$$

comme on aurait d'ailleurs, pour les primes elles-mêmes:

$$H_{xx:\overline{n}|} - H_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} - \mathrm{a}_{xx:\overline{n}|} \tag{29}$$

Comparons maintenant les réserves mathématiques des assurances à primes annuelles. On a ici

$$\varDelta \text{rés.} = {}_kV(2) - {}_kV(1) = H_{x'x':\overline{n'}|} - H_{x':\overline{n'}|} - (h_{xx:\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} - h_{x:\overline{n}|}\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|})$$

Si la différence des deux premiers termes est positive qu'en est-il des autres termes? On a $h_{xx:\overline{n}|} > h_{x\overline{n}|}$ mais $\mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|} < \mathrm{a}_{x':\overline{n'}|}$. On ne peut donc rien dire *a priori* du signe de la différence des produits et, partant du signe de $\varDelta$rés.; mais en raison des formules 4, 6, 21 et 23, on peut écrire:

$$\varDelta \text{rés.} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}\,\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} - \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}}\,\mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|}$$

$$\varDelta \text{rés.} = \mathrm{a}_{\overline{n}|}\left(\frac{\mathrm{a}_{x'\overline{n'}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}} - \frac{\mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|}}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}}\right) \tag{30}$$

Cette différence ${}_kV(2) - {}_kV(1)$ est négative quand

$$\frac{a_{x':\overline{n'}|}}{a_{x:\overline{n}|}} < \frac{a_{x'x':\overline{n'}|}}{a_{xx:\overline{n}|}}$$

ou que

$$a_{x':\overline{n'}|}\, a_{xx:\overline{n}|} < a_{x:\overline{n}|}\, a_{x'x':\overline{n'}|} \tag{31}$$

Pour interpréter cette inégalité nous aurons recours aux formules approximatives rappelées par M. Jecklin (voir [III] p. 134). Partant de la relation

$$a_{xy:\overline{n}|} + a_{\overline{n}|} \sim a_{x:\overline{n}|} + a_{y:\overline{n}|}$$

on peut écrire puisque $x = y$.

$$a_{xx:\overline{n}|} \sim 2\, a_{x:\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} \tag{32}$$

et

$$a_{x'x':\overline{n'}|} \sim 2\, a_{x':\overline{n'}|} - a_{\overline{n'}|}$$

L'inégalité (31) devient dès lors:

$$(2\, a_{x:\overline{n}|} - a_{\overline{n}|})\, a_{x':\overline{n'}|} < a_{x:\overline{n}|}(2\, a_{x':\overline{n'}|} - a_{\overline{n'}|}) \quad \text{ou} \quad a_{\overline{n'}|}\, a_{x:\overline{n}|} < a_{\overline{n}|}\, a_{x':\overline{n'}|}$$

ou encore, en divisant les deux membres par $a_{x:\overline{n}|}\, a_{x':\overline{n'}|}$

$$\frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{x':\overline{n'}|}} < \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}} \quad \text{ou enfin} \quad b_1' < b_1,$$

les rentes sur deux têtes ayant disparu (voir p. 59).

Or nous savons que si $b_1' < b_1$ les réserves mathématiques de la rente familiale sur une tête sont négatives; si c'est le cas la différence Δrés. sera négative, elle aussi, à condition que les formules du Dr Jecklin donnent une bonne approximation, ce qui a lieu si x est un âge «habituel» et si $s = x + n$ ne dépasse pas 65 ans. (Voir les exemples donnés [III], p. 134.) On peut donc conclure de là que si $b_1' < b_1$ la «dette technique» de l'assurance sur deux têtes sera négative; en outre cette réserve est plus grande, en valeur absolue, que la «dette technique» correspondante de l'assurance sur une tête; c'est ce que montrent les calculs.

Assurance d'annuités

Exemple n° 1 Voir p. 58 $x = 30$ $n = 20$ MWI $3^1/_2\,^0/_0$

Réserves mathématiques [1])

	$R = 1000$			$R' = 679{,}83$		
	Assurance sur			Assurance sur		Assurance-épargne
	une tête	deux têtes		une tête	deux têtes	pour $C = 10\,000$
k			k	$R'_k\,K(1)$	$R'_k\,K(2)$	$C_k\,V_{\overline{n}|}$
1	— 33	— 63	1	— 22	— 43	354
3	— 97	— 184	3	— 66	— 125	1 098
5	— 155	— 298	5	— 105	— 203	1 896
7	— 208	— 402	7	— 141	— 273	2 751
10	— 269	— 522	10	— 183	— 355	4 149
13	— 291	— 575	13	— 198	— 391	5 698
15	— 273	— 544	15	— 186	— 370	6 823
17	— 211	— 424	17	— 143	— 288	8 029
19	— 89	— 182	19	— 61	— 124	9 321
Primes:	*89,47*	*181,91*		*60,82*	*123,67*	*341,67*

Les chiffres des trois dernières colonnes seront utilisés p. 69. Les cas, où toutes les réserves mathématiques sont négatives sont assez fréquents, surtout, semble-t-il, avec les anciennes tables. Ici l'on constate que, dans l'assurance sur deux têtes, toutes les réserves mathématiques sont plus élevées «négativement».

Mais que se passerait-il si l'on avait $b'_1 > b_1$? Dans la rente familiale sur une tête les réserves mathématiques sont alors positives. Le raisonnement précédent prouve que, sauf cas exceptionnels, Δrés. sera également positive. En résumé lorsque les réserves mathématiques de l'assurance d'annuités ordinaire sont *positives* celles de l'assurance d'annuités sur deux têtes sont aussi positives; d'autre part les calculs montrent que ces dernières réserves sont plus grandes en valeur absolue, quelques exceptions pouvant toutefois se produire au moment du changement de signe [2]).

[1]) Pour abréger l'écriture nous posons ${}_kV(H_{x:\overline{n}|}) = {}_kK(1)$ et
${}_kV(H_{xx:\overline{n}|}) = {}_kK(2)$.

[2]) Ce changement de signe des réserves mathématiques a toujours lieu, rappelons-le, au moins une fois vers la fin du contrat (voir p. 61).

Assurances d'annuités

Exemple n° 2 Voir p. 58 $x = 30$ $n = 30$ SM 1921/30 $2^3/_4\,{}^0/_0$

Réserves mathématiques

	$R = 1000$			$R' = 480,63$		
	Assurance sur			Assurance sur		Assurance-épargne
	une tête	deux têtes		une tête	deux têtes	pour $C = 10\,000$
k			k	$R'_k\,K(1)$	$R'_k\,K(2)$	$C_k\,V_{\overline{n}\vert}$
1	+ 6	+ 14	1	+ 3	+ 7	219
4	26	56	4	12	27	912
7	39	87	7	19	42	1 664
10	38	89	10	18	43	2 480
13	16	49	13	8	24	3 365
14	1	24	14	0	12	3 677
15	— 16	— 7	15	— 8	— 3	3 997
16	— 35	— 43	16	— 17	— 21	4 325
19	— 103	— 178	19	— 50	— 86	5 327
22	— 175	— 321	22	— 84	— 154	6 497
25	— 210	— 403	25	— 101	— 194	7 722
28	— 148	— 293	28	— 71	— 141	9 052
29	— 88	— 176	29	— 42	— 85	9 520
Primes:	*88,01*	*176,41*		*42,30*	*84,79*	*212,99*

Les chiffres des trois dernières colonnes seront utilisés p. 70. On constate une exception à la règle indiquée, pour $k = 15$; partout ailleurs on a:

$$\left|{}_kV(2)\right| > \left|{}_kV(1)\right|$$

Prime annuelle: Une formule approximative.

On peut établir facilement la curieuse formule:

$$h(2) \sim 2\,h(1) \tag{33}$$

$h(2)$ et $h(1)$ désignant respectivement la prime annuelle de l'assurance d'annuités sur deux têtes – sur une tête. On a, d'après les formules 20 et 3:

$$h(2) - h(1) = a_{\overline{n}|}\left[\frac{1}{a_{xx:\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{x:\overline{n}|}}\right] \tag{34}$$

Prouver (33) c'est démontrer la relation $h(2) - h(1) \sim h(1)$.

Or, en vertu de la formule de Lidstone, rappelée par le Dr Jecklin [III] p. 135, on peut écrire:

$$\frac{1}{\mathrm{a}_{xy:\overline{n}|}}+\frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}\sim\frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}+\frac{1}{\mathrm{a}_{y:\overline{n}|}}$$

qui devient ici:

$$\frac{1}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}}\sim\frac{2}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}-\frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}}-\frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}\sim\frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}-\frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}$$

Transformée au moyen de cette relation la formule (34) devient:

$$h(2)-h(1)\sim\frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}-1$$

ou

$$h(2)-h(1)\sim h(1) \qquad \text{CQFD}$$

D'après les exemples précédents on constate que l'approximation de cette formule (33) est satisfaisante, d'où la règle ci-après: pour obtenir «pratiquement» la prime de la rente familiale sur deux têtes il suffit de doubler $h_{x:\overline{n}|}$, prime de la rente familiale ordinaire.

Application à l'assurance mixte sur deux têtes au premier décès

Règle: Pour le capital-unité la mixte sur deux têtes peut être considérée, soit pour la prime, soit pour la réserve mathématique, comme la synthèse d'une assurance-épargne de un franc avec une assurance d'annuités sur deux têtes – de d francs ou de $(P_{\overline{n}|}+d)$ francs. On suppose évidemment mêmes bases techniques et mêmes caractéristiques pour les trois combinaisons.

I. *Mixte à prime unique:* L'assurance d'annuités «complémentaire» est égale ici à d – intérêt praenumerando du capital assuré. On peut poser:

$$A_{xx:\overline{n}|}=v^n+d\,H_{xx:\overline{n}|}, \tag{35}$$

relation qui, après transformations, devient:

$$A_{xx:\overline{n}|}=v^n+d\,\mathrm{a}_{\overline{n}|}-d\,\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}$$

ou

$$A_{xx:\overline{n}|}=1-d\,\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|} \quad \text{car} \quad v^n+d\,\mathrm{a}_{\overline{n}|}=1$$

On aboutit ainsi à une formule connue. La réserve mathématique après k années pourra prendre la forme:

$$ {}_kV_{xx:\overline{n}|} = v^{n'} + d\,H_{x'x':\overline{n'}|} \tag{36} $$

II. *Mixte à primes annuelles:* Au premier décès, si ce décès survient avant l'échéance, il y a «libération» de la prime d'épargne $P_{\overline{n}|}$ et, en outre paiement de l'intérêt d par la compagnie. Voir [II] p. 22. L'assurance d'annuités «complémentaire» est égale ici à francs

$$ P_{\overline{n}|} + d = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} $$

Et l'on peut poser:

$$ P_{xx:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,h_{xx:\overline{n}|}\ ^{1)} \tag{37} $$

Cette relation se démontre comme il suit; on a successivement:

$$ P_{xx:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|}(1 + h_{xx:\overline{n}|}) + d\,h_{xx:\overline{n}|} = \frac{v^n}{a_{xx:\overline{n}|}} + d\,\frac{a_{\overline{n}|} - a_{xx:\overline{n}|}}{a_{xx:\overline{n}|}} $$

$$ P_{xx:\overline{n}|} = \frac{v^n + d\,a_{\overline{n}|} - d\,a_{xx:\overline{n}|}}{a_{xx:\overline{n}|}} = \frac{1 - d\,a_{xx:\overline{n}|}}{a_{xx:\overline{n}|}} $$

On aboutit ainsi à $P_{xx:\overline{n}|} = \dfrac{A_{xx:\overline{n}|}}{a_{xx:\overline{n}|}}$

Pour la «dette technique» on a la relation:

$$ {}_kV_{xx:\overline{n}|} = {}_kV_{\overline{n}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,{}_kV(H_{xx:\overline{n}|}) \tag{38} $$

En effet:

$$ {}_kV_{xx:\overline{n}|} = v^{n'} - P_{\overline{n}|}\,a_{\overline{n'}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,a_{\overline{n'}|} - (P_{\overline{n}|} + d)\,(1 + h_{xx:\overline{n}|})\,a_{x'x':\overline{n'}|} $$

$$ {}_kV_{xx:\overline{n}|} = v^{n'} + d\,a_{\overline{n'}|} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{xx:\overline{n}|}}\,a_{x'x':\overline{n'}|} \quad \text{ou} \quad {}_kV_{xx:\overline{n}|} = 1 - \frac{a_{x'x':\overline{n'}|}}{a_{xx:\overline{n}|}} $$

formules des rentes.

En écrivant pour simplifier

$$ {}_kV(H_{xx:\overline{n}|} = {}_kK(2) \tag{39} $$

la formule (38) devient, pour un capital C:

$$ C\,{}_kV_{xx:\overline{n}|} = C P_{\overline{n}|}\,s_{\overline{k}|} + R'\,{}_kK(2) \tag{40} $$

---

1) Pour un capital C la formule pourrait s'écrire:

$$ C P_{xx:\overline{n}|} = C P_{\overline{n}|} + R'h(2) $$

Il existe une relation semblable pour la mixte sur une tête, la réserve $R'{}_kK(2)$ étant alors remplacée par $R'{}_kK(1)$. Voir [II] p. 23.

Exemples numériques: Primes des assurances mixtes. *Exemple n° 1*, p. 58.

On a pour une tête: $h_{30:\overline{20|}} = 89{,}47\ ^0/_{00}$ (voir p. 65), d'où

$$CP_{30:\overline{20|}} = 341{,}67 + 89{,}47\ ^0/_{00}\ R' = 341{,}67 + 60{,}82 = \mathit{402{,}49}$$

On a pour deux têtes: $h_{30:30:\overline{20|}} = 181{,}91\ ^0/_{00}$ (p. 65) d'où

$$CP_{30:30:\overline{20|}} = 341{,}67 + 181{,}91\ ^0/_{00}\ R' = 341{,}67 + 123{,}67 = \mathit{465{,}34}$$

Dans les deux combinaisons la prime de l'assurance-épargne est identique; seule change la prime de l'assurance d'annuités de R' francs.

Réserves mathématiques: On pourra les compter au moyen des chiffres donnés p. 65. On ajoute à $C\,{}_kV_{\overline{n|}} = 341{,}67\, s_{\overline{k|}}$ – réserve mathématique de l'assurance-épargne – soit $R'{}_kK(1)$, soit $R'{}_kK(2)$ et l'on obtient les réserves correspondantes des mixtes sur une tête – sur deux têtes. On a par exemple:

Réserves mathématiques de l'assurance sur une tête mixte	k	deux têtes mixte
1896 — 105 = 1791	5	1896 — 203 = 1693
4149 — 183 = 3966	10	4149 — 355 = 3794
6823 — 186 = 6637	15	6823 — 370 = 6453
9321 — 61 = 9260	19	9321 — 124 = 9197
Prime: *402,49*		Prime: *465,34*

Ainsi, dans cet exemple – et cela arrive souvent – des deux sortes d'assurances mixtes, celle qui a la prime la plus forte a toutes ses réserves mathématiques inférieures; cela provient de la réserve $R'{}_kK(2)$ qui est toujours plus grande «négativement» que la réserve $R'{}_kK(1)$.

Remarques: I. Si l'on change l'âge d'entrée en conservant la même durée, $C_k V_{\overline{n|}}$ étant indépendant de l'âge, seules se modifient les réserves $R'{}_kK$. Il en résulte que dans les diverses sortes d'assurances mixtes, pour une durée donnée, la variation des réserves mathématiques *avec l'âge d'entrée* est celle même des réserves mathématiques de l'assurance d'annuités «complémentaire» de R' francs, le montant R' étant, lui aussi, indépendant de x.

II. *Autre conséquence:* Changez de table de mortalité, en conservant le même taux technique, seule se modifiera la réserve mathémathique de l'assurance d'annuités; la réserve de l'assurance-épargne étant invariable est, peut-on dire, *l'élément stable* des diverses sortes d'assurances mixtes. Ainsi, avec la table SM 1921/30 à $3\,^1/_2\,^0/_0$ on a, pour les mêmes caractéristiques qu'à la p. 65:

Réserves mathématiques de l'assurance sur

une tête	mixte	k	deux têtes	mixte
1896 — 37	= 1859	5	1896 — 71	= 1825
4149 — 69	= 4080	10	4149 — 135	= 4014
6823 — 82	= 6741	15	6823 — 161	= 6662
9321 — 31	= 9290	19	9321 — 63	= 9258
Prime: *372,64*			Prime: *404,01*	

On voit ici combien «la marge négative» a diminué par suite du changement de table. Voir également d'autres exemples [II] p. 25.

Autre cas. Exemple n° 2, p. 58. SM 1921/30 à $2\,^3/_4\,^0/_0$. Durée 30 ans.

En appliquant, pour calculer les primes, les divers montants donnés p. 66 on trouvera aisément $CP_{30:\overline{30}|}$ et $CP_{30:30:\overline{30}|}$.

Pour les réserves mathématiques on a: assurance sur

une tête	mixte	k	deux têtes	mixte
2480 + 18	= 2498	10	2480 + 43	= 2523
3677 + 0	= 3677	14	3677 + 12	= 3689
3997 — 8	= 3989	15	3997 — 3	= 3994
4325 — 17	= 4308	16	4325 — 21	= 4304
9520 — 42	= 9478	29	9520 — 85	= 9435
Prime: *255,29*			Prime: *297,78*	

On calculera semblablement les autres valeurs. Ici, en raison de l'allure singulière des réserves mathématiques des deux sortes de rentes familiales, les réserves mathématiques de la mixte sur deux têtes sont *plus élevées* que les réserves correspondantes de la mixte sur une tête jusqu'à $k = 15$, plus faibles ensuite. Au moment du changement de signe, pour $k = 15$, la «marge négative» qui s'ajoute à $C_{15}V_{\overline{30}|}$ est plus faible, en valeur absolue, pour la mixte sur deux têtes. (Cas très exceptionnel.)

Comparaison entre les deux sortes d'assurances mixtes: sur deux têtes et sur une tête

Pour *l'assurance à prime unique*, si $C = 1$, on a (voir formule 35):

$$A_{xx:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} = d(H_{xx:\overline{n}|} - H_{x:\overline{n}|}) = \Delta\text{pr.} \tag{41}$$

$$\Delta\text{pr.} = d(\mathrm{a}_{x:\overline{n}|} - \mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}) \quad \text{(v. formule 29)} \tag{42}$$

La différence des primes uniques des deux sortes d'assurances mixtes est égale à la prime unique d'une rente de survie temporaire praenumerando de d francs. On aura semblablement pour la réserve mathématique:

$${}_kV_{xx:\overline{n}|} - {}_kV_{x:\overline{n}|} = d(\mathrm{a}_{x':\overline{n'}|} - \mathrm{a}_{x'x':\overline{n'}|}) > 0 \tag{43}$$

Pour *l'assurance à primes annuelles*, on peut poser:

$$P_{xx:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} h_{xx:\overline{n}|} \quad \text{(voir p. 68)}$$

et

$$P_{x:\overline{n}|} = P_{\overline{n}|} + \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} h_{x:\overline{n}|}$$

d'où par différence

$$P_{xx:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} h_{xx:\overline{n}|} - \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} h_{x:\overline{n}|} \tag{44}$$

ou, pour un capital C

$$CP_{xx:\overline{n}|} - CP_{x:\overline{n}|} = R' h_{xx:\overline{n}|} - R' h_{x:\overline{n}|} \tag{45}$$

car

$$\frac{C}{\mathrm{a}_{\overline{n}|}} = R' = C(P_{\overline{n}|} + d)$$

D'autre part, comme

$$h_{xx:\overline{n}|} - h_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} \left[\frac{1}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \right]$$

on tire de (44)

$$P_{xx:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}} - \frac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{46}$$

formule connue.

Appliquant la formule (45), on a par exemple (voir p. 69 et 65).

$$CP_{30:30:\overline{20}|} - CP_{30:\overline{20}|} = 465{,}34 - 402{,}49 = 123{,}67 - 60{,}82 = 62{,}85$$

Mêmes différences pour les primes de l'assurance mixte de fr. 10 000 et pour celles de l'assurance d'annuités de $R' = 679{,}83$ francs. Mais, eu égard à la relation $h(2) - h(1) \sim h(1)$ (voir p. 66), la formule (45) devient:

$$CP_{xx:\overline{n|}} - CP_{x:\overline{n|}} \sim R' h_{x:\overline{n|}} \tag{47}$$

Dans l'exemple ci-dessus la différence des primes, de 62,85 francs, est effectivement voisine de $R' h_{30:\overline{20|}} = 60{,}82$ (p. 69).

Quant aux réserves mathématiques, on a:

$$C\,{}_kV_{xx:\overline{n|}} = C\,{}_kV_{\overline{n|}} + R'\,{}_kK(2) \quad \text{(voir formule 40)}$$

et

$$C\,{}_kV_{x:\overline{n|}} = C\,{}_kV_{\overline{n|}} + R'\,K(1)$$

d'où

$$C\,{}_kV_{xx:\overline{n|}} - C\,{}_kV_{x:\overline{n|}} = R'\,{}_kK(2) - R'\,{}_kK(1) \tag{48}$$

La différence des réserves mathématiques des assurances mixtes sur deux têtes et sur une tête (capital C) est identique à celle des deux sortes d'assurances d'annuités de R' francs. Or, le second membre de (48) étant souvent négatif, on peut formuler la proposition suivante:

Mêmes bases techniques et mêmes caractéristiques étant données, si la prime de la mixte sur deux têtes est toujours plus élevée que celle de la mixte sur une tête, il n'en va pas de même des réserves mathématiques. Souvent les réserves mathématiques sont *plus faibles* pour la mixte sur deux têtes; il n'y a d'exception, en général, que dans les cas où certaines réserves mathématiques des assurances d'annuités correspondantes sont *positives* (voir p. 70).

La formule (48) peut s'écrire:

$${}_kX = C\,{}_kV_{x:\overline{n|}} + [R'\,{}_kK(2) - R'\,{}_kK(1)] \tag{49}$$

en désignant par ${}_kX$ la k^e réserve de la mixte sur deux têtes.

Applications: Donnée: la réserve mathématique de la mixte sur une tête.

Exemple n° 1 $n = 20$ MWI $3\,^1/_2\,\%$ Pour $k = 5$, on a:

$${}_5X = C\,{}_5V_{30:\overline{20|}} + R'\,{}_5K(2) - R'\,{}_5K(1) = 1791 - 203 + 105$$

$${}_5X = 1791 - 98 = \mathit{1693} \quad \text{(voir p. 69)}$$

Pour $k = 15$, il vient:

$${}_{15}X = 6637 - 370 + 186 = 6637 - 184 = \mathit{6453}$$

Exemple n° 2 $n = 30$ SM 1921/30 $2^3/_4\,\%$ Pour $k = 10$, on a:

$${}_{10}X = C\,{}_{10}V_{30:\overline{30}|} + R'\,{}_{10}K(2) - R'\,{}_{10}K(1)$$

$${}_{10}X = 2498 + 43 - 18 = 2498 + 25 = \mathit{2523} \text{ (voir p. 70).}$$

Pour $k = 15$, ${}_{15}X = 3989 - 3 + 8 = 3989 + 5 = \mathit{3994}$.

Remarques: I. L'avant-dernière réserve mathématique de la mixte sur deux têtes est toujours *plus faible* que la réserve correspondante de la mixte sur une tête [1]; la différence de ces deux réserves mathémathiques est approximativement égale à la prime, changée de signe, de l'assurance d'annuités ordinaire de R' francs. On a en effet:

$$C\,{}_{n-1}V_{xx:\overline{n}|} = C\,{}_{n-1}V_{\overline{n}|} - R'\,h(2) \text{ (voir p. 61)} \qquad (50)$$

et de même:

$$C\,{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = C\,{}_{n-1}V_{\overline{n}|} - R'\,h(1) \qquad (51)$$

d'où

$$C\,{}_{n-1}V_{xx:\overline{n}|} - C\,{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = R'\,h(1) - R'\,h(2) < 0 \qquad (52)$$

car $h(2) > h(1)$ [2].

D'ailleurs on peut écrire:

$$R'\,[h(1) - h(2)] \sim -R'\,h(1) \quad \text{(voir p. 67).}$$

On en déduit:

$$C\,{}_{n-1}V_{xx:\overline{n}|} - C\,{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} \sim -R'\,h_{x:\overline{n}|} \quad \text{CQFD} \qquad (53)$$

Application de la formule (52). On a p. 70:

$$C\,{}_{29}V_{30:30:\overline{30}|} - C\,{}_{29}V_{30:\overline{30}|} = 9435 - 9478 = +42 - 85 = -43$$

Or (p. 66) $-R'\,h_{30:\overline{30}|} = -42{,}30 \sim -43$ (formule 53).

II. Des formules (50) et (51) on tire:

$$R'\,h_{xx:\overline{n}|} = C\,P_{\overline{n}|}\,s_{\overline{n-1}|} - C\,{}_{n-1}V_{xx:\overline{n}|} \qquad (54)$$

$$R'\,h_{x:\overline{n}|} = C\,P_{\overline{n}|}\,s_{\overline{n-1}|} - C\,{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} \qquad (55)$$

relations qui permettent de trouver rapidement la prime annuelle des rentes familiales si les réserves mathématiques des assurances mixtes sont *données*.

---

[1]) On démontre aisément cette proposition par la formule des rentes.

[2]) Nous rappelons que $h(2) = h_{xx:\overline{n}|}$, $h(1) = h_{x:\overline{n}|}$.

III. Les assurances d'annuités sur trois têtes

Ici la rente de un franc est payée lors du premier décès des trois têtes x, y, z – et cela chaque année jusqu'au terme de la police, le premier arrérage étant dû au début de l'année qui suit le décès, le dernier une année avant l'échéance. Si le bénéficiaire désigné meurt avant cette date la compagnie versera la rente à un autre bénéficiaire.

Les formules donnant primes et réserves mathématiques sont analogues à celles des p. 60 et 62. Nous nous bornerons au cas où $x = y = z$. On a alors:

Assurance à prime unique:

$$\text{Prime: } H_{xxx:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{\overline{n}|} - \mathrm{a}_{xxx:\overline{n}|} \tag{56}$$

Réserve mathématique après k années écoulées:

$${}_kV(H_{xxx:\overline{n}|}) = \mathrm{a}_{\overline{n'}|} - \mathrm{a}_{x'x'x':\overline{n'}|} \tag{57}$$

Si le premier décès survient la k^{e} année d'assurance la «dette technique» augmente brusquement et devient $\mathrm{a}_{\overline{n'}|}$. Comparant la prime unique précédente avec celle de l'assurance sur deux têtes, il vient:

$$H_{xxx:\overline{n}|} > H_{xx:\overline{n}|} \quad \text{puisque} \quad \mathrm{a}_{xxx:\overline{n}|} < \mathrm{a}_{xx:\overline{n}|} \tag{58}$$

On aura de même:

$${}_kV(H_{xxx:\overline{n}|}) > {}_kV(H_{xx:\overline{n}|}) \tag{59}$$

Assurance à primes annuelles: On a ici:

Prime annuelle:
$$h_{xxx:\overline{n}|} = \frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xxx:\overline{n}|}} - 1 \tag{60}$$

et
$$\frac{\mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{xxx:\overline{n}|}} = 1 + h_{xxx:\overline{n}|} \tag{61}$$

Comme $\mathrm{a}_{xxx:\overline{n}|} < \mathrm{a}_{xx:\overline{n}|}$ il en résulte $h_{xxx:\overline{n}|} > h_{xx:\overline{n}|}$, ce qui est évident puisque, dans l'assurance sur trois têtes, le risque est plus grand pour l'assureur.

Des formules précédentes et de celles des pages 58 et 60 on arrive aux conclusions suivantes: Dans les différentes sortes d'assurances d'annuités les primes augmentent avec l'âge d'entrée ainsi qu' avec le nombre de têtes. On s'en rend bien compte par les chiffres ci-après:

Exemple numérique: $R = 1000$ $n = 25$ ans MWI $3^1/_2$ %

Comparaison des primes annuelles.

Age x	une	deux	trois têtes	Age x	une	deux	trois têtes
20 ans	96,00	195,88	299,46	40 ans	180,16	364,86	551,57
30 ans	116,58	237,16	360,83	50 ans	332,34	661,93	979,81

D'autre part, *pour un même âge d'entrée,* la prime augmente avec la durée et avec le nombre de têtes. On a, par exemple, pour $x = 30$ ans et les mêmes caractéristiques que ci-dessus.

Primes annuelles:

Durée:	15 ans	20 ans	25 ans	30 ans
Une tête:	64,09	89,47	116,58	146,54
Deux têtes:	130,06	181,90	237,16	296,82
Trois têtes:	197,61	277,02	360,83	449,26

Enfin les primes sont d'autant plus fortes que la mortalité est plus élevée et que le taux d'intérêt est plus faible (voir p. 59).

Une formule approximative. Par des relations analogues à celles de la p. 67 – quoique plus compliquées! – on peut arriver à la formule approximative suivante:

$$h(3) \sim 3\,h(1) \tag{62}$$

qui s'énonce ainsi: La prime annuelle de l'assurance d'annuités sur trois têtes est à peu près égale au triple de la prime de l'assurance ordinaire. En raison de la formule (33) on a: $h(1) \sim \frac{1}{2} h(2)$ et la relation ci-dessus devient:

$$h(3) \sim 1{,}5\,h(2) \tag{63}$$

Par les primes données précédemment on se rendra compte du degré d'approximation des formules (62) et (63). On a par exemple pour $x = 30$, $n = 25$, MWI $3^1/_2$ %.

Prime annuelle pour trois têtes $\sim 3 \cdot 116{,}58 = 349{,}74$ (formule 62)

ou $\sim 1{,}5 \cdot 237{,}16 = 355{,}74$ (formule 63)

La valeur exacte est *360,83*; si elles ne donnent qu'un résultat approché, les formules (62) et (63) fixent pourtant un ordre de grandeur.

Réserves mathématiques, formules exactes. On a successivement:

$$ {}_kV(3) = {}_kV(H_{xxx:\overline{n}|}) = H_{x'x'x':\overline{n'}|} - h_{xxx:\overline{n}|}\, a_{x'x'x':\overline{n'}|} \tag{64} $$

$$ {}_kV(3) = a_{\overline{n'}|} - (1 + h_{xxx:\overline{n}|})\, a_{x'x'x':\overline{n'}|} \tag{65} $$

$$ {}_kV(3) = a_{\overline{n'}|} - \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{xxx:\overline{n}|}}\, a_{x'x'x':\overline{n'}|}, \text{ formule des quatres rentes} \tag{66} $$

La réserve mathématique est négative quand $b'_3 < b_3$, si l'on pose

$$ b'_3 = \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{x'x'x':\overline{n'}|}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{xxx:\overline{n}|}} $$

Comparaison entre les réserves mathématiques des assurances d'annuités sur deux et sur trois têtes

Par un raisonnement semblable à celui de la page 64 on peut montrer qu'en général la différence Δrés. $= {}_kV(3) - {}_kV(2)$ est négative ou positive suivant que la réserve ${}_kV(2)$ est elle-même négative ou positive; la réserve ${}_kV(3)$ est presque toujours plus grande en valeur absolue que la réserve ${}_kV(2)$ et du même signe qu'elle. Comme illustration de ce fait nous nous contenterons des deux exemples suivants:

Assurance d'annuités

Exemple n° 1 MWI $3^1/_2$ % *Exemple n° 2* SM 1921/30 $2^3/_4$ %

Réserves mathématiques

Assurance sur

k	deux têtes $R = 1000$	trois têtes $R = 1000$	$n = 20$ $R' = 679{,}83$
1	— 63	— 88	— 60 (voir p. 79)
5	— 298	— 427	— 290
12	— 567	— 833	— 566
15	— 544	— 808	— 549
19	— 182	— 277	— 188
Primes:	*181,91*	*277,02*	

(voir p. 65)

k	deux têtes $R = 1000$	trois têtes $R = 1000$	$n = 30$ $R' = 480{,}63$
1	+ 14	+ 22	+ 11
4	56	89	43
10	89	150	72
15	— 7	20	10
16	— 43	— 30	— 14
19	— 178	— 227	— 109
25	— 403	— 578	— 278
28	— 293	— 435	— 209
29	— 176	— 265	— 127
Primes:	*176,41*	*264,80*	(v. p. 79)

Dans le deuxième exemple, au moment du changement de signe, pour $k = 15$ et 16, la règle indiquée ci-dessus ne se vérifie pas; mais on a presque partout:

$$\left|{}_kV(3)\right| > \left|{}_kV(2)\right|$$

Application à l'assurance mixte sur trois têtes au premier décès

Par des raisonnements analogues à ceux de la page 68 il est facile d'établir les formules ci-après:

Assurance à prime unique:

$$A_{xxx:\overline{n|}} = v^n + d\,H_{xxx:\overline{n|}} \tag{67}$$

$$_kV_{xxx:\overline{n|}} = v^{n'} + d\,H_{x'x'x':\overline{n'|}} \tag{68}$$

Assurance à primes annuelles:

$$CP_{xxx:\overline{n|}} = C\,P_{\overline{n|}} + R'\,h_{xxx:\overline{n|}} \tag{69}$$

$$\text{où } R' = CP_{\overline{n|}} + C\,d$$

Comparant cette formule à la formule (37) on voit que:

$$CP_{xxx:\overline{n|}} > CP_{xx:\overline{n|}}$$

On a en effet:

$$CP_{xxx:\overline{n|}} - CP_{xx:\overline{n|}} = R'\,h_{xxx:\overline{n|}} - R'\,h_{xx:\overline{n|}} \tag{70}$$

On déduit de cette relation la règle suivante:

La différence des primes des deux sortes d'assurances mixtes – sur trois têtes et sur deux têtes – est identique à celle des primes des deux sortes d'assurances d'annuités d'un montant de R' francs, à savoir $R'\,h(3) - R'\,h(2)$.

D'autre part, des formules (60) et (20) on tire, pour $C = 1$

$$P_{xxx:\overline{n|}} - P_{xx:\overline{n|}} = \frac{1}{\text{a}_{xxx:\overline{n|}}} - \frac{1}{\text{a}_{xx:\overline{n|}}}, \tag{71}$$

formule connue.

Quant à la réserve mathématique de la mixte sur trois têtes à primes annuelles elle peut s'exprimer par la relation ci-dessous:

$$C\,{}_kV_{xxx:\overline{n|}} = C\,{}_kV_{\overline{n|}} + R'\,{}_kV(H_{xxx:\overline{n|}}) \tag{72}$$

ou, en posant pour simplifier:

$$_kV(H_{xxx:\overline{n|}}) = {}_kK(3) \tag{73}$$

$$C\,_kV_{xxx:\overline{n|}} = C\,_kV_{\overline{n|}} + R'\,_kK(3)\,, \tag{74}$$

expression que l'on ramène sans peine à la formule des rentes.

D'après les formules (74) et (40) on obtient, pour la différence des réserves mathématiques:

$$C\,_kV_{xxx:\overline{n|}} - C\,_kV_{xx:\overline{n|}} = [R'\,_kK(3) - R'\,_kK(2)] \tag{75}$$

Or, le second membre est souvent négatif (voir p. 76) d'où la proposition suivante: la réserve mathématique de la mixte sur trois têtes est souvent inférieure à celle de la mixte sur deux têtes; cela arrive quand la différence $[R'\,_kK(3) - R'\,_kK(2)]$ est négative. La formule (75) peut d'ailleurs s'écrire:

$$_kZ = C\,_kV_{xx:\overline{n|}} + [R'\,_kK(3) - R'\,_kK(2)] \tag{76}$$

en désignant par $_kZ$ la k^e réserve mathématique de la mixte sur trois têtes. La formule (76) exprime $_kZ$ en fonction de la réserve mathématique de la mixte sur deux têtes. Mais en vertu de la formule (48) il vient:

$$_kZ = C\,_kV_{x:\overline{n|}} + [R'\,_kK(3) - R'\,_kK(1)]\,^{1)} \tag{77}$$

relation qui donne la réserve mathématique de la mixte sur trois têtes en fonction de celle de la mixte ordinaire. Voir exemple p. 79.

Applications numériques. Calculs des primes:

Exemple n° 1. MWI $3^1/_2\,^0/_0$. $n = 20$. Comme $h(3) = 27{,}702\,^0/_0$, on a:

$$CP_{30:30:30:\overline{20|}} = 341{,}67 + 679{,}83\,h(3) = 341{,}67 + 188{,}33 = \mathit{530}$$

Exemple n° 2. SM 1921/30 $2^3/_4\,^0/_0$. Ici $h(3) = 26{,}48\,^0/_0$ d'où

$$CP_{30:30:30:\overline{30|}} = 212{,}99 + 480{,}63\,h(3) = 212{,}99 + 127{,}27 = \mathit{340{,}26}$$

---

[1]) Pour la prime il existe une formule analogue, il est facile en effet d'établir que (voir formules 70 et 45):

$$C\,P_{xxx:\overline{n|}} = C\,P_{x\overline{n|}} + [R'\,h(3) - R'\,h(1)]$$

Assurance mixte sur trois têtes

Tableau des réserves mathématiques [1] (formule 74)

Exemple nº 1

MWI $3^1/_2\,^0/_0$ $n = 20$

k	$C_kV_{\overline{20}|}$	$R'_kK(3)$	$_kZ$
1	354	— 60	294
5	1896	— 290	1606
12	5164	— 566	4598
15	6823	— 549	6274
19	9321	— 188	9133
Primes:	*341,67*	*188,33*	*530*

Comparer avec les chiffres de la p. 69. Ici la réserve mathématique diminue avec le nombre de têtes

Exemple nº 2

SM 1921/30 $2^3/_4\,^0/_0$ $n = 30$

k	$C_kV_{\overline{30}|}$	$R'_kK(3)$	$_kZ$
1	219	11	230
4	912	43	955
10	2480	72	2552
15	3997	10	4007
16	4325	— 14	4311
19	5367	— 109	5258
25	7722	— 278	7444
28	9052	— 209	8843
Primes:	*212,99*	*127,27*	*340,26*

Comparer avec les chiffres de la p. 70; la mixte sur trois têtes présente des réserves mathématiques supérieures jusqu'à et y compris $k = 16$.

Application de la formule (76). Donnée: $C_kV_{xx:\overline{n}|}$

Exemple nº 1. $k = 12$. $_{12}Z = C_{12}V_{30:30:\overline{20}|} + R'_{12}K(3) - R'_{12}K(2)$

$$_{12}Z = 4778 - 566 + 385 = 4778 - 181 = \mathit{4597}$$

Exemple nº 2. $k = 15$. $_{15}Z = 3994 + 10 + 3 = 3994 + 13 = \mathit{4007}$

Application de la formule (77). Donnée: $C_kV_{x:\overline{n}|}$

Exemple nº 1. $k = 12$. $_{12}Z = C_{12}V_{30:\overline{20}|} + R'_{12}K(3) - R'_{12}K(1)$

$$_{12}Z = 4966 - 566 + 197 = 4966 - 369 = \mathit{4597}$$

Exemple nº 2. $k = 15$. $_{15}Z = 3989 + 10 + 8 = 3989 + 18 = \mathit{4007}$

Ainsi, grâce aux assurances d'annuités sur une et sur plusieurs têtes, il est facile d'exprimer la réserve mathématique de l'assurance mixte sur trois têtes en fonction de la réserve mathématique de l'assurance-épargne, formule (74) – de la mixte sur une tête, formule (77) ou de la mixte sur deux têtes, formule (76).

[1] Toutes les réserves mathématiques des assurances mixtes ont été contrôlées par la formule des rentes.

Assurances mixtes sur deux et trois têtes.
Calcul approximatif des réserves mathématiques

D'après le Dr Jecklin – [III] p. 136 – on peut écrire pour la mixte sur deux têtes:

$$_kV_{xy:\overline{n}|} \sim {_kV_{x:\overline{n}|}} + {_kV_{y:\overline{n}|}} - {_kV_{\overline{n}|}}$$

formule qui, pour $x = y$, devient:

$$_kV_{xx:\overline{n}|} \sim 2\,{_kV_{x:\overline{n}|}} - {_kV_{\overline{n}|}}$$

ou en vertu de la relation

$$_kV_{x:\overline{n}|} = {_kV_{\overline{n}|}} + (P_{\overline{n}|} + d)\,{_kV}(H_{x:\overline{n}|})$$

$$C\,{_kV_{xx:\overline{n}|}} \sim C\,{_kV_{\overline{n}|}} + 2\,R'\,{_kK}(1) \tag{78}$$

expression que l'on pourrait écrire:

$$C\,{_kV_{xx:\overline{n}|}} = C\,{_kV_{\overline{n}|}} + 2^*\,R'\,{_kK}(1) \tag{79}$$

en désignant par 2* un nombre «voisin» de 2.

Pour trois têtes on arrive aisément à la formule approximative:

$$C\,{_kV_{xxx:\overline{n}|}} \sim C\,{_kV_{\overline{n}|}} + 3\,R'\,{_kK}(1) \tag{80}$$

que l'on pourrait écrire:

$$C\,{_kV_{xxx:\overline{n}|}} = C\,{_kV_{\overline{n}|}} + 3^*\,R'\,{_kK}(1) \tag{81}$$

3* désignant un nombre «voisin» de 3. L'avantage de ces formules c'est qu'elles ne font intervenir – à côté de la réserve mathématique de l'assurance-épargne – que les réserves de l'assurance d'annuités ordinaire.

Applications numériques: Exemple no 1 MWI $3\,^1/_2\,^0/_0$ $n = 20$

Pour $k = 10$ on a: $R'\,{_{10}K}(1) = -183$ et $C\,{_{10}V_{\overline{20}|}} = 4149$

Il vient dès lors: Réserve mathématique de l'assurance mixte sur

une tête: $4149 - 183 = 3966$ (valeur exacte),
deux têtes: $4149 - 2 \cdot 183 = 3783$ (valeur approchée),
trois têtes: $4149 - 3 \cdot 183 = 3600$ (valeur approchée).

Pour deux et trois têtes les valeurs exactes sont 3794 et 3632; pour obtenir ces montants il aurait fallu prendre $2^* = 1{,}94$ et $3^* = 2{,}82$, formules (79) et (81). Au moyen des divers exemples donnés précédemment le lecteur pourra sans peine juger de la valeur pratique de ces curieuses relations qui ont surtout l'avantage de fixer un ordre de grandeur.

IV. Les assurances d'annuités sur *m* têtes

On peut aisément généraliser les formules précédentes et passer de deux et trois têtes à m têtes. Au premier décès – si ce décès a lieu après k années – la rente familiale de m têtes se transforme en une rente certaine de durée $n' = n - k$, soit $a_{\overline{n'}|}$.

Pour calculer primes et réserves mathématiques de la combinaison on utilisera la rente temporaire $a_{x(m):\overline{n}|}$, le symbole $_{x(m)}$ désignant m têtes d'âge x. Les formules sont semblables à celles que nous avons données; nous nous limiterons aux deux suivantes:

Prime annuelle:

$$h_{x(m):\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x(m):\overline{n}|}} - 1 \tag{82}$$

Réserve mathématique

$$_kV(H_{x(m):\overline{n}|}) = a_{\overline{n'}|} - (1 + h_{x(m):\overline{n}|})\, a_{x'(m):\overline{n'}|} \tag{83}$$

Cette réserve est négative si $b'_m < b_m$ en posant:

$$b'_m = \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{x'(m):\overline{n'}|}} \qquad b_m = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x(m):\overline{n}|}}$$

En appliquant ces relations au cas de l'assurance mixte sur m têtes on trouve des formules analogues aux formules (67) à (74). Nous laissons au lecteur le soin de transcrire ces nouvelles formules, nous bornant aux deux expressions ci-dessous:

Assurance mixte. Prime annuelle:

$$CP_{x(m):\overline{n}|} = CP_{\overline{n}|} + R'\, h_{x(m):\overline{n}|} \tag{84}$$

$$\text{où } R' = CP_{\overline{n}|} + Cd$$

Réserve mathématique:

$$C\,{}_kV_{x(m):\overline{n}|} = C\,{}_kV_{\overline{n}|} + R'\,{}_kK(m) \tag{85}$$

en désignant par ce dernier terme l'expression $R'\,{}_kV(H_{x(m):\overline{n}|})$.

Il sera facile d'appliquer ces formules aux cas de quatre ou cinq têtes, par exemple.

V. Résumé et conclusions

On le voit: rien ne distingue essentiellement les assurances d'annuités sur plusieurs têtes des assurances d'annuités sur une tête. Au point de vue *théorique* l'étude des diverses sortes de rentes familiales est intéressante par le fait surtout de leurs réserves mathématiques souvent négatives. Au point de vue *pratique* les assurances d'annuités sur plusieurs têtes aident à comprendre la formation de la prime des assurances mixtes sur plusieurs têtes ainsi que l'évolution, en fonction de k, de la «dette technique» de ces mixtes spéciales.

Partant des diverses formules établies, on aboutit à la conclusion suivante, à savoir que, dans l'assurance mixte sur plusieurs têtes, les combinaisons-clefs sont, d'une part, *l'assurance-épargne* qui a une importance décisive sur le montant de la prime et des réserves mathématiques et, d'autre part, *l'assurance d'annuités sur plusieurs têtes* dont les réserves mathématiques, souvent négatives, corrigent alors ce que la prime capitalisée de l'assurance-épargne pourrait avoir de trop élevé.

Bibliographie

Articles parus dans le «Bulletin de l'Association des actuaires suisses».

[I] *Ch. Jéquier:* L'assurance d'annuités, cas particulier de l'assurance temporaire. Fasc. 39, avril 1940.

[II] *Ch. Jéquier:* L'assurance d'annuités et les combinaisons usuelles. Fasc. 40, octobre 1940.

[III] *H. Jecklin:* Algebraische Begründung einer Klasse versicherungstechnischer Approximationen. Fasc. 50, avril 1950.

[IV] *A. Wenk:* Über einer Aufspaltung verschiedener Versicherungsformen nach Risiko- und Sparfunktion. Fasc. 53, octobre 1953.

De nombreux exemples numériques se trouvent en outre dans l'ouvrage suivant:

[V] *A. Burlet:* Essai d'une nouvelle théorie de l'assurance sur la vie. F. Rouge et C^ie^, S. A., Lausanne 1945.