

La théorie collective du risque et l'assurance de choses

Autor(en): **Ammeter, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **54 (1954)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-555100>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La théorie collective du risque et l'assurance de choses ¹⁾

Par *H. Ammeter*, Zurich

I. Introduction

Les phénomènes réels en matière d'assurance et dans d'autres domaines aussi sont dans leur détail si compliqués qu'il est pratiquement impossible d'observer tous les éléments dont ils se composent. Dans la plupart des problèmes, on ne s'intéresse pas non plus à tous les éléments, mais l'on étudie seulement ceux qui paraissent importants pour le problème considéré. On obtient ainsi un modèle qui simplifie la réalité en négligeant les éléments de peu d'importance pour n'en garder que les essentiels. Au point de vue géométrique, il s'agit en quelque sorte de la projection d'une figure dans un espace à n dimensions sur un plan ayant moins de dimensions. Or, l'on peut projeter la même figure sur différents plans suivant que telle ou telle des variables paraît ou non essentielle; par exemple, s'il s'agit d'un solide à 3 dimensions, on peut en établir le plan ou la coupe. Selon le but que l'on se propose, l'on considérera l'une ou l'autre de ces projections. De la même manière, dans l'assurance, on utilise différentes projections de la réalité ou, en d'autres termes, différents modèles selon les circonstances particulières d'une branche déterminée d'assurance et les problèmes qui se trouvent au premier plan.

La science actuarielle utilise avant tout deux modèles principaux, à savoir le modèle élémentaire et celui de la théorie collective du risque.

Le modèle élémentaire se fonde essentiellement sur deux principes, notamment:

le principe d'équivalence, les primes étant déterminées de telle manière que leur valeur actuelle soit égale à la valeur actuelle des engagements présumés de l'assureur,

¹⁾ Selon une conférence du 9 juin 1954 faite à Madrid au « Cercle international d'études actuarielles des assurances autres que l'assurance-vie ».

le principe de la collectivité fictive qui, dans tout calcul, part de l'hypothèse que toujours un très grand nombre d'assurances semblables sont conclues.

Ces deux principes forment le fondement éprouvé de l'assurance sur la vie. Le modèle ainsi établi permet de calculer d'une manière rationnelle le coût d'une assurance, même si le cours du risque en est compliqué. En particulier, il tient compte exactement de l'opération d'épargne qui constitue, en général, un élément essentiel de l'assurance sur la vie.

Du point de vue de la théorie du risque, les deux principes propres au modèle élémentaire ne forment pas nécessairement une base appropriée. En effet, le principe de la collectivité fictive implique que la charge présumée de l'assureur est une grandeur bien déterminée qui croît proportionnellement à l'effectif assuré. L'élément stochastique, caractéristique dans l'assurance, est dès lors complètement négligé. Mais c'est justement le caractère stochastique de l'opération de risque qui rend problématique le calcul du coût d'une assurance suivant le principe d'équivalence. On pourrait même démontrer qu'un assureur qui se tiendrait strictement au principe d'équivalence sans tenir compte d'aucune marge de sécurité devrait nécessairement faire faillite tôt ou tard.

Ces objections résultant de la théorie du risque ne sont pas décisives dans l'assurance sur la vie qui n'attribue d'ordinaire qu'un rôle secondaire à l'élément de risque. En effet, à l'exception par exemple de l'assurance temporaire en cas de décès, l'élément d'épargne dépasse de beaucoup l'élément de risque dans l'assurance sur la vie. Ainsi pour l'assurance mixte, en moyenne 90% environ de la prime pure sont affectés à la formation du capital. Cette prépondérance de l'épargne permet de comprendre pourquoi, dans l'assurance sur la vie, les problèmes y relatifs, surtout celui des placements et des intérêts, paraissent beaucoup plus importants que ceux qui concernent le risque. Le fait que les contrats d'assurances sur la vie sont en général à long terme (la durée d'assurance pouvant être de 60 à 80 ans) vient encore aggraver cet état de choses. Il est évident que les renforcements de réserves dictés par une évolution défavorable du cours de la mortalité, des frais de gestion ou du taux de rendement des capitaux, dépassent en importance les pertes éventuelles dues aux fluctuations aléatoires des risques assurés. Il est d'ailleurs possible de limiter ces pertes par des mesures

appropriées, prises en dehors du modèle élémentaire de la science actuarielle.

Il en va tout autrement en matière d'assurance de choses où la durée des contrats est en général courte. L'élément d'épargne n'intervient pas du tout ou ne joue qu'un rôle secondaire. Il s'ensuit dès lors que les objections formulées plus haut sont fondamentales dans l'assurance de choses.

En principe, le modèle élémentaire pourrait être aussi directement appliqué à l'assurance de choses mais, en pratique, une pareille tentative se heurte souvent à d'assez nombreuses difficultés, tout d'abord, parce que les probabilités de sinistres des différentes assurances ne sont connues qu'avec une approximation grossière, et d'autre part, parce que, vu les sinistres partiels, il faudrait encore une autre base technique sous forme d'une table de sinistres.

Mais abstraction faite de la difficulté pratique de se procurer ces éléments de calcul pour toutes les assurances individuelles, l'on doit se demander si le calcul individuel de la prime est vraiment nécessaire dans l'assurance de choses comme il l'est dans l'assurance sur la vie. Pour les assurances de risque du type de celles que l'on rencontre surtout dans l'assurance de choses, il est nécessaire en premier lieu que le total des primes encaissées suffise à payer les sinistres annoncés. Quant à savoir comment ces sinistres seront répartis entre les différentes assurances, cela n'est que d'importance secondaire. Le calcul individuel de la prime, il est vrai, peut être judicieux même dans l'assurance de choses jusqu'à un certain point, tant qu'il est pratiquement admissible, mais il n'est pas indispensable. Somme toute, le calcul individuel de la prime poussé à l'extrême aboutirait au résultat absurde que chaque contrat devrait couvrir ses propres sinistres.

Plutôt que de déterminer une prime individuelle, il importe beaucoup plus, en matière d'assurance de choses, de prendre soin que les sinistres annoncés puissent toujours être réglés. Mais la science actuarielle élémentaire, basée sur le principe d'équivalence, ne fournit aucun renseignement sur cet aspect du problème. Cette lacune, importante surtout en ce qui concerne l'assurance de choses, peut être comblée grâce au modèle de la théorie collective du risque.

Le modèle de la théorie collective du risque part de la considération qu'il n'est possible de couvrir d'après les principes actuariels les sinistres survenus d'une manière aléatoire que dans le cadre d'une collectivité.

Aussi la théorie collective du risque fait-elle complètement abstraction des assurances individuelles et étudie de préférence les propriétés de portefeuilles d'assurances non nécessairement homogènes, quelle que soit leur composition, pour lesquels des primes de risque sont encaissées régulièrement, tandis que des paiements d'indemnités se font à intervalles irréguliers. Les indemnités à la charge de l'assureur apparaissent dans ce modèle comme une variable aléatoire qui peut prendre n'importe quelle valeur suivant des probabilités données.

La valeur présumée de ces variables aléatoires est identique à la prime qui résulte de l'application, dans le modèle élémentaire, du principe de l'équivalence. Cette valeur présumée forme ainsi en quelque sorte le pont entre les deux modèles. Toutefois, le modèle collectif montre qu'une prime calculée d'après le montant présumé des indemnités serait insuffisante. Il permet de déterminer la prime de sorte que l'équilibre financier de l'assureur paraisse soit garanti pour une période déterminée, soit définitivement stable. C'est la méthode qui convient à l'assurance de choses. De plus, elle est assez simple dans la pratique parce que – comme nous devons encore le montrer – ce sont seulement quelques propriétés moyennes du portefeuille qui sont nécessaires comme éléments de calcul. La théorie collective du risque fournit donc une base appropriée à la théorie mathématique de l'assurance de choses.

II. Éléments de la théorie collective du risque

Le modèle de la théorie collective du risque – dont nous allons nous occuper un peu plus en détail du point de vue de l'assurance de choses – a été créé, dans ses parties essentielles, par les actuaires suédois. Après le fondateur de la théorie, Filip Lundberg, ce sont surtout Cramér, Laurin [6], Esscher, Segerdahl [10] et, plus récemment, Saxèn et Arfwedson qui ont fait connaître la théorie par leurs travaux. Au XIV^e Congrès International des Actuaires, en 1954, plusieurs mémoires se fondant sur la théorie collective du risque ont été présentés [13].

1. Probabilités fixes de sinistres

La théorie collective du risque repose sur un modèle de portefeuille qui se compose uniquement d'assurances de risque, à l'exclusion de tout élément d'épargne. Les primes de risque (y compris les chargements

de sécurité) viennent alimenter continuellement un fonds, dit fonds de risque, d'où sont prélevées les indemnités à la charge de l'assureur. La somme z absorbée pour le règlement d'un sinistre frappant un portefeuille d'assurances est considérée comme une variable aléatoire dont la fonction de fréquence sera désignée par $p(z)$. Il sera commode par la suite de prendre la valeur moyenne de z comme unité de calcul. On aura alors, les indemnités exigibles étant supposées positives :

$$\int_0^{\infty} p(z) dz = \int_0^{\infty} z p(z) dz = 1. \quad (1)$$

De plus il est judicieux d'exprimer la variable de temps à l'aide de la somme des primes de risque encaissées. L'intervalle infinitésimal de temps dt est alors remplacé par l'élément de risque dP au cours duquel, par hypothèse, au plus un sinistre peut se produire.

Si l'on désigne par x la dépense à laquelle le fonds de risque est exposé dans l'élément de risque dP , la fonction de fréquence relative à x est donnée par les formules suivantes

$$f(x, dP) = \begin{cases} 1 - dP & \text{pour } x = 0 \\ dP p(x) dx & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

La fonction caractéristique correspondante s'écrit :

$$\varphi_x(t, dP) = \int_0^{\infty} e^{itx} f(x, dP) dx = 1 + dP [\pi(t) - 1], \quad (2')$$

où $\pi(t)$ désigne la fonction caractéristique de la fonction de fréquence $p(z)$

$$\pi(t) = \int_0^{\infty} e^{itz} p(z) dz.$$

Toutes les formules ultérieures se laissent déduire des formules élémentaires (2) relatives à un élément de risque dP . A cet effet, on admet en outre que les montants des indemnités relatives à des éléments de risque distincts sont des variables aléatoires stochastiquement indépendantes et que la distribution $p(z)$ reste invariable. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par x le total des indemnités auxquelles le fonds de risque est exposé dans l'intervalle de temps P (c'est-à-dire la période durant laquelle le total des primes de risque encaissées atteint

le montant P), on obtient l'expression suivante pour la fonction caractéristique de la distribution relative à la variable stochastique x :

$$\begin{aligned} \varphi_x(t, P) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{P}{m} (\pi(t) - 1) \right]^m \\ &= e^{P(\pi(t)-1)}. \end{aligned} \quad (3')$$

A la fonction caractéristique (3') correspond la fonction de fréquence:

$$f(x, P) = \begin{cases} e^{-P} & \text{pour } x = 0 \\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{e^{-P} P^r}{r!} p^{(r)}(x) & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

où $p^{(r)}(z)$ désigne le produit de composition d'ordre r de $p(z)$ et représente la fonction de fréquence de l'indemnité totale exigible pour r sinistres. La fonction (3) est appelée d'habitude la distribution de Poisson généralisée qui se réduit à la distribution de Poisson ordinaire

$$f(x, P) = \frac{e^{-P} P^x}{x!} \quad (4)$$

lorsque les indemnités de sinistres sont uniformes.

Soit P le total des primes de risque encaissées pendant une année, la formule (3) représente alors la fonction de fréquence des indemnités exigibles pour cette période. De la fonction de distribution correspondante

$$F(S, P) = \int_0^S f(x, P) dx \quad (5)$$

il est, par exemple, possible de calculer la probabilité que le total S des montants accumulés dans le fonds de risque suffise à couvrir les indemnités exigibles.

D'une manière analogue, il est possible de déterminer la probabilité que le fonds de risque vienne à s'épuiser soit au cours d'une période déterminée P soit un jour ou l'autre. Si S désigne le montant initial du fonds de risque et λ le taux de chargement de sécurité compris dans les primes de risque, il vient alors pour cette probabilité de ruine:

$$\psi(S) = \alpha_S e^{-RS} \quad (6)$$

où le paramètre R est défini par l'équation de risque

$$1 + (1 + \lambda) R = \int_0^{\infty} e^{Rz} p(z) dz \quad (7)$$

et ne dépend, par conséquent, que du taux de chargement λ et de la distribution des indemnités exigibles $p(z)$. Le facteur α_S qui intervient dans (6) est toujours légèrement inférieur à l'unité et tend pour S augmentant indéfiniment vers la limite

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \alpha_S = \frac{\lambda}{\int_0^{\infty} z e^{Rz} p(z) dz - 1 - \lambda}.$$

Pratiquement, il se justifie de remplacer α_S par l'unité. Cette approximation conduit à une légère surestimation de la probabilité de ruine et, par conséquent, à une évaluation un peu trop prudente du fonds de risque.

Dans le cas particulier où aucun fonds de risque n'est constitué c'est-à-dire où $S = 0$, il est intéressant de constater que la formule (6) se réduit à la simple expression

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \lambda} \quad (6a)$$

dans laquelle la fonction de fréquence des indemnités $p(z)$ n'intervient plus.

Il importe aussi d'observer que les probabilités de ruine selon (6) ou (6a) ne dépendent pas du volume du portefeuille. Ce résultat qui peut paraître paradoxal à première vue s'explique aisément. En effet, pour un petit portefeuille, la prime de risque P accumulée augmente dans le temps plus lentement que celle pour un grand portefeuille mais, si l'on suppose le processus de risque répété indéfiniment, la limite de la somme des primes de risque accumulées est la même dans les deux cas. Plus précisément la grandeur du portefeuille n'influe que sur la vitesse du processus de risque, mais non sur le résultat final, pourvu que la somme des primes de risque portée en compte soit la même dans chaque cas. Il résulte de ce qui précède que le montant du fonds de risque devrait être le même pour des portefeuilles de volumes distincts, mais assujettis à part cela à des conditions identiques.

Il est aussi possible de calculer la probabilité de ruine dans le cas où la ruine se produirait à la fin des périodes $P, 2P, 3P \dots$. Il suffit de multiplier la valeur de la probabilité selon (6) par le facteur

$$\frac{1}{1 + \lambda RP}$$

Ce facteur peut être remplacé par l'unité, ce qui revient à accroître à nouveau la sécurité de l'assureur.

Dans la littérature actuarielle, d'autres cas de probabilité de ruine ont encore été traités. Ainsi, par exemple, le problème de ruine pour une période bien délimitée et celui où le chargement de sécurité λ est variable ont fait l'objet d'études spéciales. Pour ces cas particuliers, nous renvoyons le lecteur aux mémoires originaux indiqués dans la liste bibliographique.

2. Extension de la théorie collective du risque au cas des probabilités fluctuantes

Le modèle de la théorie collective du risque développé par les actuaires suédois repose, en dernière analyse, sur le schéma classique des urnes qui, partant d'une distribution binomiale, conduit aux distributions de Poisson et de Laplace-Gauss. Mais précisément les probabilités de sinistres qui interviennent dans l'assurance de choses ne présentent pas d'ordinaire les caractères conformes au schéma classique des urnes. En particulier, la dispersion des indemnités exigibles est d'ordinaire beaucoup plus prononcée qu'elle ne le serait si l'on partait de probabilités fixes. Des écarts très marqués se produisent par exemple dans l'assurance contre l'incendie et dans l'assurance contre la grêle. Des calculs effectués d'après le schéma classique des urnes présenteraient d'emblée un aspect quelque peu arbitraire.

Cette difficulté peut être surmontée si l'on remplace le schéma classique des urnes par celui des urnes à probabilités fluctuantes de sinistres. Ce schéma a été créé par Ove Lundberg pour être appliqué à des problèmes statistiques et, indépendamment de lui, introduit, il y a quelques années, par l'auteur de ce mémoire dans la théorie collective du risque. D'après ce modèle élargi, les probabilités de sinistres ne sont pas considérées comme fixes, mais comme soumises à des fluctuations entre 0 et 1, une probabilité déterminée étant attribuée à chaque valeur.

La valeur présumée des indemnités exigibles ou, en d'autres termes, la prime de risque théorique P est une valeur constante dans le cas de probabilités fixes de sinistres. Elle devient une variable aléatoire (Pq) dans le cadre du modèle élargi, où la variable q obéit à la fonction de fréquence primaire suivante

$$h(q) = \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} e^{-h_0 q} q^{h_0-1} \quad (0 < q < \infty). \quad (8)$$

La valeur moyenne de q relative à la fonction de distribution (8) est égale à 1, sa dispersion étant représentée par la valeur réciproque du paramètre h_0 . Les fluctuations des probabilités de sinistres perdent donc de leur importance lorsque la valeur du paramètre h_0 augmente. Pour $h_0 = \infty$, on est ramené au cas particulier des probabilités fixes de sinistres, traité sous chiffre 1.

Dans le schéma élargi, la fonction caractéristique correspondant à la période P s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_x(t, P, h_0) &= \frac{h_0^{h_0}}{\Gamma(h_0)} \int_0^\infty e^{-h_0 q} q^{h_0-1} e^{Pq[\pi(t)-1]} dq \\ &= \left\{ 1 - \frac{P}{h_0} [\pi(t) - 1] \right\}^{-h_0}. \end{aligned} \quad (9')$$

De (9') on déduit l'expression suivante pour la fonction de fréquence correspondante

$$f(x, P, h_0) = \begin{cases} \left(\frac{h_0}{P + h_0} \right)^{h_0} & \text{pour } x = 0 \\ \sum_{r=1}^{\infty} \binom{h_0-1+r}{r} \left(\frac{P}{P+h_0} \right)^r \left(\frac{h_0}{P+h_0} \right)^{h_0} p^{(r)}(x) & \text{pour } x > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Pour $h_0 = \infty$ (probabilités fixes de sinistres) les formules (9) et (9') se réduisent aux formules (3) et (3') valables pour les probabilités fixes de sinistres.

Or, les probabilités fluctuantes de sinistres ne sont pas la cause unique des difficultés qui se manifestent dans l'assurance de choses. Très souvent, les probabilités dites contagieuses jouent un rôle en ce sens que, lorsqu'un sinistre se produit, la probabilité d'un sinistre pour

les autres risques se trouve accrue. Par exemple, la probabilité d'incendie pour le reste des immeubles augmente lorsque, dans une localité, un immeuble est déjà en flammes. Pour tenir compte des probabilités contagieuses, Eggenberger et Polya ont développé un modèle spécial de probabilité théorique qui a été très remarqué à l'époque.

Une autre complication apparaît lorsqu'un événement rendant exigible le paiement d'indemnités a pour conséquence un grand nombre de sinistres individuels, par exemple une seule averse de grêle peut en produire 10 000. Ce phénomène est aussi susceptible d'être représenté par un schéma d'urnes spécial. Il est possible d'en tenir compte dans le modèle de la théorie collective du risque — ainsi que l'a montré Arfwedson [13] — en faisant l'hypothèse que dans un élément de risque plus d'un sinistre peut se produire.

Or, l'on peut montrer qu'aussi bien la distribution provenant du schéma des urnes pour les probabilités contagieuses que celle qui tient compte de la multiplication des sinistres causés par un seul événement sont identiques, lorsque les paramètres sont judicieusement interprétés, à la distribution obtenue en considérant les probabilités fluctuantes de sinistres.

La distribution (9) est susceptible d'une autre interprétation. En effet, on peut montrer que les formules (3) relatives aux probabilités fixes de sinistres se transforment en les formules généralisées (9) lorsque les éléments P et $p(z)$ sont remplacés par les éléments transformés P^* et $p^*(z)$. Plus exactement, on peut énoncer le théorème de transformation suivant :

$$\left. \begin{array}{l} f(x, P, p(z), h_0) = f(x, P^*, p^*(z), \infty) \\ \text{avec} \quad P^* = P \frac{\ln(1 + \chi)}{\chi} \\ \text{et} \quad p^*(z) = \frac{1}{\ln(1 + \chi)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\chi}{1 + \chi} \right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r} \end{array} \right\} \quad (10)$$

La somme moyenne des sinistres exigibles relative à la distribution transformée $p^*(z)$ est égale à

$$\frac{\chi}{\ln(1 + \chi)}$$

où l'on a posé $\chi = \frac{P}{h_0}$.

Grâce à ce théorème de transformation, la théorie collective du risque étendue aux probabilités fluctuantes de sinistres – particulièrement importante pour l'assurance de choses – peut être ramenée au cas particulier théoriquement bien connu des probabilités fixes de sinistres. Ainsi, par exemple, l'application de ce théorème permet de généraliser les formules (6) et (7) relatives à la probabilité de ruine et l'on obtient :

$$\psi(S) \sim e^{-RS}, \quad (6^*)$$

$$1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)Rz}}{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{Rz} p(z) dz. \quad (7^*)$$

* * *

Les diverses interprétations dont est susceptible la distribution généralisée (9) assurent à cette dernière un vaste champ d'application dans l'assurance de choses.

Mais en dehors des propriétés statistiques des probabilités de sinistres dans l'assurance de choses, d'autres considérations, par exemple l'incertitude des données essentielles dans l'assurance de choses, parlent en faveur du modèle élargi tel qu'il vient d'être décrit. En choisissant judicieusement la valeur du paramètre de fluctuations h_0 , on peut même tenir compte du degré d'incertitude dans un cas concret.

3. Décomposition d'un ensemble de portefeuilles en sous-ensembles

Les grandeurs qui interviennent dans les formules indiquées précédemment font uniquement état des propriétés de l'ensemble du portefeuille considéré. Il est fait complètement abstraction du nombre, respectivement des propriétés des assurances individuelles qui constituent ce portefeuille. Ce fait met bien en évidence le caractère collectif de la théorie moderne du risque.

Il est évident que les relations établies ne s'appliquent pas uniquement à l'ensemble total des portefeuilles d'un assureur, mais aussi à des sous-ensembles. Il suffit à cet effet de déterminer les éléments de calcul, P , $p(z)$ et h_0 individuellement pour chaque sous-ensemble et de les introduire ensuite dans les formules correspondantes. En opérant une telle décomposition, il est alors possible de calculer les fonds de risque respectifs nécessaires qui garantissent une compensation des risques à l'intérieur de chaque sous-ensemble.

Même lorsqu'il ne s'agit d'assurer une compensation des risques que pour l'ensemble des portefeuilles de l'assureur, il peut être opportun de décomposer ce dernier, au préalable, en quelques sous-ensembles importants et de déterminer ensuite les éléments de calcul pour chaque sous-ensemble envisagé. Il importe alors de pouvoir déduire les éléments de calcul de l'ensemble total des portefeuilles de ceux relatifs aux sous-ensembles considérés. En supposant que le risque évolue d'un sous-ensemble à l'autre d'une manière stochastiquement indépendante, on peut procéder de la manière suivante :

Soit P_i , $p_i(z)$ et h_{0i} les éléments de calcul du sous-ensemble i . Il vient alors pour des probabilités fixes de sinistres, c'est-à-dire pour $h_{0i} = \infty$,

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum_i P_i \\ p(z) &= \frac{1}{P} \sum_i P_i p_i(z) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ces relations restent valables pour des probabilités fluctuantes de sinistres, si l'on a soin de remplacer les éléments de calcul P_i , $p_i(z)$ et h_{0i} par les éléments de calcul transformés P_i^* , $p_i^*(z)$ et $h_{0i}^* \equiv \infty$ obtenus à l'aide du théorème de transformation (formule 10). Pour l'ensemble total des portefeuilles, les éléments de calcul transformés s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} P^* &= \sum P_i^* \\ p^*(z) &= \frac{1}{P^*} \sum P_i^* p_i^*(z) \\ h_0^* &\equiv \infty \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

La méthode indiquée n'est plus applicable lorsque l'évolution du risque par rapport à certains sous-ensembles n'est plus stochastiquement indépendante. Il convient alors de réunir les sous-ensembles dépendants en un seul et d'adopter le paramètre de fluctuations h_0 correspondant.

III. Applications

La théorie collective du risque permet de déterminer, même pour des portefeuilles composés arbitrairement, la marge de sécurité nécessaire et de calculer les réserves de risques telles que l'assureur soit,

avec une probabilité suffisamment grande, en mesure en tout temps de faire face au paiement des sinistres exigibles. Ce qu'il convient d'entendre par une probabilité suffisamment grande est dans une certaine mesure une question d'appréciation. En général, on ne choisira pas une probabilité de sécurité inférieure à 95 %; d'autre part une probabilité de 999‰ doit être considérée comme sévère. Normalement, il convient de fixer ce taux à 99 %.

En principe, l'assureur dispose de trois mesures pour obtenir le degré de sécurité nécessaire, notamment:

- a) inclusion d'un chargement de sécurité dans les primes de risque exigibles,
- b) constitution de réserves de risques,
- c) réassurance adéquate.

En général, il est indiqué d'appliquer ces mesures conjointement. Si l'on fixe la probabilité de ruine, l'une des trois mesures proposées se trouve complètement définie par les deux autres. Ainsi, par exemple, lorsque les réserves de risque et le mode de réassurance sont connus, il est possible d'en déduire les chargements de sécurité qui doivent être prélevés en même temps que les primes de risque. Le problème ainsi posé, qui revient au calcul du coût à l'aide de méthodes propres à la théorie collective du risque, est significatif dans l'assurance de choses et fera l'objet du paragraphe suivant.

1. Calcul de la prime à l'aide de la théorie collective du risque

Il a déjà été signalé que le calcul de la prime dans la science actuarielle élémentaire s'effectuait à l'aide du principe d'équivalence. Le maintien de ce principe dans le cadre du modèle élargi de la théorie collective du risque conduirait en fin de compte à la prime de risque théorique P . Cette prime ne contiendrait par contre aucun chargement de sécurité λ . Il résulte de la formule (6a) que la probabilité de ruine atteint la valeur 1 lorsque le chargement de sécurité λ et la réserve de risque S sont nuls. En d'autres termes, la ruine de l'assureur serait certaine s'il s'en tenait uniquement au principe d'équivalence. Le principe d'équivalence ne constitue donc pas un fondement adéquat pour le calcul de la prime dans les assurances de risque telles qu'elles se présentent dans l'assurance de choses. Il convient plutôt de déterminer

la prime de telle manière que l'assureur soit en mesure de faire face à ses engagements avec le degré désiré de probabilité de sécurité. Un tel résultat ne peut être obtenu qu'en prévoyant dans la prime un chargement de sécurité λ tel que la probabilité $1 - F$ d'un excédent de risques relative à une année d'assurance ou la probabilité de ruine ψ correspondante soit égale au complément de la valeur adoptée pour la probabilité de sécurité. Plus précisément, si aucune réserve de risque n'existe ou si une réserve de risque n'est constituée qu'en vue de cas de besoin extrême, il y a lieu de faire appel à la probabilité $1 - F$ d'un excédent de sinistres. Si par contre un excédent de sinistres peut être automatiquement prélevé du fonds de risque, il importe de partir de la probabilité de ruine $\psi(S)$ définie par les formules (6) et (7). Dans la suite, seule cette dernière éventualité sera étudiée plus à fond. Elle permettra d'obtenir des résultats particulièrement intéressants pour la pratique grâce à l'indépendance de la probabilité de ruine $\psi(S)$ de la grandeur du portefeuille considéré.

Dans les développements qui suivent, il sera opportun d'introduire comme unité de compte non plus la valeur moyenne des sinistres conformément au chapitre II mais l'unité de monnaie en vigueur. La valeur moyenne des sinistres exigibles, exprimée en unités de monnaie z' , s'écrit alors :

$$m = \int_0^{\infty} z' p(z') dz'.$$

Si, en vue de simplifier l'écriture, la variable z' est remplacée par z , les formules (6), (7) et (7') prennent la forme suivante :

$$\psi(S) = e^{-RS} \tag{12}$$

où le paramètre R est défini par les équations de risque

$$\int_0^{\infty} e^{Rz} p(z) dz = \begin{cases} 1 + (1 + \lambda) Rm & \text{pour } h_0 = \infty \\ 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)Rzm}}{\lambda} & \text{pour } h_0 \neq \infty. \end{cases} \tag{13a}$$

La formule (13b) peut être transformée en la formule (13a) à l'aide du théorème de transformation (10). Il suffit dès lors de ne considérer que la formule (13a).

Si l'on suppose la probabilité de ruine ψ égale à une valeur choisie judicieusement, par exemple $\psi = 10^{-2}$, on obtient pour R

$$R = \frac{-\ln \psi}{S} \quad (14)$$

et pour le taux de chargement $(1 + \lambda)$

$$1 + \lambda = \frac{\int_0^{\infty} e^{Rz} p(z) dz - 1}{Rm}. \quad (15)$$

Le taux de chargement (15) étant connu, il est alors possible de calculer la prime nette suffisante du point de vue de la théorie collective du risque. A cet effet, il suffit de multiplier la prime nette résultant de l'application du principe d'équivalence par le taux de chargement (15).

Selon la formule (15), le taux de chargement est déterminé d'une manière globale pour l'ensemble du portefeuille considéré. Si l'ensemble considéré peut être décomposé pratiquement en une série de sous-ensembles, il sera alors aussi possible de calculer le taux de chargement séparément pour chaque sous-ensemble. A l'intérieur de chaque sous-ensemble on pourra même procéder plus exactement et tenir compte, par exemple, de classes distinctes de risques. A cet effet, on attribue la réserve de risque disponible S dans sa totalité à la classe de risques considérée et l'on introduit comme distribution des sinistres exigibles $p(z)$ celle valable pour la classe de risques en question. Ainsi pour la classe i de risques, il vient

$$1 + \lambda_i = \frac{\int_0^{\infty} e^{Rz} p_i(z) dz - 1}{Rm_i} \quad (15i)$$

avec

$$m_i = \int_0^{\infty} z p_i(z) dz.$$

Si les taux de chargement sont calculés séparément pour chaque classe de risques conformément à la formule (15i), on obtient pour l'ensemble total des portefeuilles une recette en chargements de sécurité qui est égale à celle qui résulterait de l'application globale de la

formule (15) à l'ensemble des portefeuilles. En d'autres termes, la méthode de décomposition appliquée pour le calcul du taux de chargement conduit à une probabilité de ruine pour l'ensemble total des portefeuilles égale à celle qui a été admise pour les sous-ensembles respectivement pour les classes de risques. Ce résultat surprenant est une conséquence immédiate de la propriété remarquable et déjà signalée de la probabilité de ruine, à savoir son indépendance par rapport à la grandeur de l'ensemble des portefeuilles considérés. On peut le démontrer de la manière suivante: ¹⁾

Le montant total des primes encaissées, y compris les chargements de sécurité, s'élève à:

$$\sum_i P_i m_i (1 + \lambda_i) = \sum_i P_i m_i \frac{\int_0^\infty e^{Rz} p_i(z) dz - 1}{R m_i} = \frac{1}{R} \left\{ \int_0^\infty e^{Rz} \sum_i P_i p_i(z) dz - \sum_i P_i \right\}.$$

Mais on a d'après la formule (11)

$$\frac{1}{P} \sum_i P_i p_i(z) = p(z) \quad \text{et} \quad \sum_i P_i = P.$$

Il vient alors

$$\sum P_i m_i (1 + \lambda_i) = P \frac{\int_0^\infty e^{Rz} p(z) dz - 1}{R} = P m (1 + \lambda)$$

c. q. f. d.

Il résulte donc que le calcul de la prime selon la formule (15) peut s'effectuer soit d'une manière globale pour l'ensemble considéré, soit par l'intermédiaire de sous-ensembles constitués arbitrairement, pourvu que les risques assurés évoluent d'une manière stochastiquement indépendante d'un sous-ensemble à l'autre. La détermination du chargement de sécurité par l'intermédiaire de sous-ensembles présente l'avantage que la marge totale de sécurité obtenue correspond toujours, en vertu de la proposition démontrée ci-dessus, à la probabilité de ruine admise pour l'ensemble total, même lorsque la proportion des sous-ensembles se modifie avec le temps.

¹⁾ Une propriété semblable a déjà été signalée en relation avec des problèmes de réassurance par différents auteurs, entre autres Wilhelmsen [13] et Thépaut [11].

Il importe de préciser que le calcul du taux de chargement ne doit pas nécessairement s'effectuer exclusivement suivant les deux méthodes indiquées [méthode globale suivant la formule (15) ou méthode individuelle portant sur des sous-ensembles suivant la formule (15i)]; d'autres méthodes peuvent être utilisées, pourvu que le rapport entre le total des chargements de sécurité encaissés et la prime de risque théorique ne soit pas modifié.

En fin de compte, seul le total des chargements disponibles importe dans la recherche du degré de sécurité jugé nécessaire; il n'est pas fait état de la répartition individuelle des chargements, c'est-à-dire du chargement attaché à chaque assurance individuelle. Il est essentiel ici de noter une fois de plus le caractère collectif des méthodes indiquées en vue du calcul de la prime. L'empirisme qui si souvent préside inévitablement à la tarification dans l'assurance de choses, ne menacera donc pas la solvabilité de l'assureur, pourvu que les primes encaissées ne soient au total pas inférieures aux primes et chargements nécessaires du point de vue de la théorie collective du risque. Il va sans dire qu'une telle constatation ne modifie en rien le postulat qui tend à fixer la prime individuelle le plus équitablement possible.

Enfin notons que pour le calcul de la prime à l'aide de la théorie collective du risque, il est indifférent que le portefeuille étudié soit pris dans son ensemble ou décomposé en sous-ensembles homogènes ou non. Cette possibilité est d'une grande importance dans l'assurance de choses où il n'est pratiquement pas possible même approximativement d'obtenir une décomposition d'un ensemble de portefeuilles en sous-ensembles totalement homogènes, ainsi que c'est le cas dans l'assurance sur la vie.

2. Autres applications

La méthode collective relative au calcul de la prime, esquissée sous chiffre 1, constitue aussi le fondement de la majorité des autres applications de la théorie collective du risque dans l'assurance de choses. Par exemple, il est possible de calculer d'une manière analogue le problème inverse de celui traité sous chiffre 1, à savoir la réserve de risque nécessaire lorsque le taux de chargement de sécurité est connu. On peut aussi essayer de modifier par une réassurance en quote-part ou en excédent de plein appropriée la distribution des sinistres exigibles de telle manière que les réserves de risque disponibles soient suffisantes.

A ce sujet, on pourra consulter les mémoires [9] et [11] et tout particulièrement les travaux présentés sur le thème II au XIV^e Congrès International des Actuaires [13].

Finalement, il est possible d'étudier les répercussions d'une nouvelle branche d'opérations sur l'équilibre financier d'une entreprise d'assurances en s'appuyant sur la théorie collective du risque. Cette question est particulièrement importante lorsque les bases d'appréciation objective des risques relatifs à la nouvelle branche d'opérations sont insuffisantes, l'évolution des indemnités effectivement exigibles pouvant alors différer fortement des hypothèses adoptées. On pourra tenir compte du degré d'incertitude dans un tel cas en supposant que la probabilité des indemnités exigibles est fortement fluctuante, c'est-à-dire en choisissant judicieusement la valeur du paramètre de fluctuations h_0 . Toutes ces applications ont une importance fondamentale dans l'assurance de choses.

* * *

Essayons de résumer ce mémoire en quatre points:

- 1^o Le modèle de la théorie mathématique élémentaire des assurances, construit plus spécialement d'après les circonstances qui se rencontrent dans l'assurance sur la vie, n'est applicable que dans une mesure limitée à l'assurance de choses.
- 2^o Le modèle de la théorie collective du risque tient compte de la nature spéciale des assurances de risque pur de peu de durée, soit au point de vue de la théorie des probabilités, soit à celui des applications, et se trouve par conséquent tout désigné pour constituer le fondement de la théorie mathématique de l'assurance de choses.
- 3^o L'application de la théorie collective du risque à l'assurance de choses nécessite seulement la connaissance des trois éléments suivants:

prime de risque théorique P
distribution des indemnités exigibles $p(z)$
paramètre de fluctuations h_0

qui sont donnés directement tous trois par la statistique des sinistres survenus. Il n'est pas nécessaire de tenir compte des particularités des assurances individuelles.

4° Le calcul du coût à l'aide du modèle de la théorie collective du risque ne conduit à un résultat sans équivoque que pour la prime totale du portefeuille considéré. La tarification des assurances individuelles en fonction de la prime totale nécessaire peut s'effectuer de différentes manières en tenant compte de considérations d'ordre financier et d'ordre actuariel. Il est possible de fixer les primes en fonction de classes de risques de façon que les conditions de sécurité exigées soient remplies indépendamment de la composition du portefeuille.

* * *

Le développement de la théorie mathématique de l'assurance de choses à l'aide du modèle de la théorie collective du risque offre aux actuaires un champ de travail nouveau qui promet d'être particulièrement fécond. Si mon mémoire devait contribuer à intéresser un plus grand nombre d'actuaires à cette tâche considérable, son but aura été atteint.

Liste bibliographique

- [1] *H. Ammeter*: A generalisation of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic-probabilities. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1948.
- [2] *H. Ammeter*: Die Elemente der kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. Bulletin des actuaire suisses 1949.
- [3] *H. Ammeter*: The calculation of premium rates for Excess of Loss and Stop Loss reinsurance treaties. Amsterdam 1954.
- [4] *J. Dubourdieu*: Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition. Gauthier-Villars 1952.
- [5] *F. Eggenberger*: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Bulletin des actuaire suisses 1924.
- [6] *I. Laurin*: An introduction into Lundberg's theory of risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1930.
- [7] *J. Lefèvre*: Application de la théorie collective du risque à la réassurance Excess Loss. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1952.
- [8] *O. Lundberg*: On random processes and their application to sickness and accident statistics. Uppsala 1940.
- [9] *F. Pentikäinen*: On the net retention and solvency of insurance companies. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1952.
- [10] *C.-O. Segerdahl*: On homogeneous random processes and collective risk theory. Uppsala 1939.
- [11] *André Thépaut*: Essai de détermination pratique du plein de conservation. Paris 1954.
- [12] *H. Wyss*: Die Risikotheorie und ihre Bedeutung für die Versicherungsmathematik. Bulletin des actuaire suisses 1953.
- [13] Communications relatives au sujet II du XIV^e Congrès international d'actuaire 1954.