

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 54 (1954)

Artikel: Sterbegesetze, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten
darstellen lässt

Autor: Rufener, Ernst

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-555099>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SterbeGesetze, für welche sich der Leibrentenbarwert durch Zeitrenten darstellen lässt

Von *Ernst Ruffer*, Zürich

Einleitung

Seit der Ausgleichung der Halleyschen Sterbetafel durch Abraham de Moivre im Jahre 1724 wurden zahlreiche Versuche unternommen, mathematische Formeln für die Sterbetafeln, sogenannte SterbeGesetze, aufzustellen. Im 18. und 19. Jahrhundert wurde diesen Formeln vielfach die Bedeutung universeller Naturgesetze, etwa im Sinne der Keplerschen Planetengesetze oder des Gravitationsgesetzes, zugeschrieben. Später sah man in einer Sterbeformel nur noch ein Hilfsmittel für die bequeme Darstellung und Ausgleichung bestimmter Sterbetafeln. Der neuern Auffassung über Modelle, die im Hinblick auf bestimmte Anwendungen geschaffen werden, entspricht das Vorgehen, SterbeGesetze zu finden, die im Hinblick auf diese Anwendungen günstige analytische Eigenschaften aufweisen. Diese besondern Eigenschaften, die sich im Zusammenhang mit häufig wiederkehrenden Berechnungen in einer formelmässig geschickten Darstellung bestimmter Grössen äussern und so das Rechenverfahren abkürzen, sind dabei als gegeben vorauszusetzen. Beispielsweise führt die bei der Ermittlung von Versicherungswerten auf verbundene Leben zweckmässige Eigenschaft des Zentralalters auf die Überlebensordnungen von *Makeham* und *Quiquet* ¹⁾.

Einen interessanten Beitrag für die Konstruktion einer Sterbeformel nach der letztgenannten Methode haben *H. Jecklin* und *W. Leimbacher* ²⁾ geleistet, indem sie ein SterbeGesetz suchen, für das der temporäre Leibrentenbarwert durch Zeitrenten,

dargestellt wird.

$$a_{x:\overline{n}|} = \psi \{a_{\overline{n}|}\} + \chi \{a_{\overline{n}|}\} q_x,$$

¹⁾ *A. Quiquet*, «Représentation algébrique des Tables de survie. Généralisation des lois de Gompertz, de Makeham, etc.», Bulletin de l'Institut des Actuaire français, 1893.

²⁾ «Über ein SterbeGesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte erlaubt», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 53. Band, 1953, S. 129–139.

Ihre Ausführungen legen es nahe, den Ansatz zunächst in

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_1(t, \delta) \Phi_1(x) + A_2(t, \delta) \Phi_2(x) \quad (1)$$

zu verallgemeinern und hierauf Überlebensordnungen mit der Eigenschaft

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \sum_{i=1}^k A_i(t, \delta) \Phi_i(x), \quad (k \geq 1) \quad (2)$$

zu betrachten. Die Funktionen $A_i(t, \delta)$ bedeuten Zeitrentenwerte im weitern Sinne. Überlebensordnungen mit Eigenschaft (2) haben – wie wir zeigen werden – als notwendige und hinreichende Bedingung eine lineare homogene Differentialgleichung k -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erfüllen; ihre explizite Darstellung entspricht dem Auflösen der linearen Integralgleichung

$$\int_0^t l(x + \xi) e^{-\delta \xi} d\xi = l(x) \sum_{i=1}^k A_i(t, \delta) \Phi_i(x).$$

Für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals eines versicherten Bestandes ist im Hinblick auf eine Gruppierung nach Dauer und Alter im Leibrentenbarwert eine Separation von Dauer, (Zins) und Alter, wie sie durch Ansatz (2) gegeben wird, erwünscht.

Über Sterbeetze mit der Eigenschaft (2) ist die Literatur spärlich. Im Fall $k = 1$, $\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A(t, \delta) \Phi(x)$, ist das Gesetz von *Dormoy*, $l(x) = \lambda e^{\rho x}$, ($\rho < 0$), einzige Lösung; es hat nie praktische Bedeutung erlangt und ist insofern trivial, als der Rentenbarwert von x unabhängig wird. *H. Jecklin* und *W. Leimbacher* untersuchen in ihrer zitierten Arbeit Sterbeetze, welche auf eine zweigliedrige Barwertformel führen. *E. Albrecht*¹⁾ hat mit Hilfe des Ansatzes

$$\mu_x = c + \frac{a}{2} \frac{ab}{a + e^{bx}}$$

für $\bar{a}_{x:\bar{n}|}$ den Ausdruck

$$\bar{a}_{x:\bar{n}|} = \frac{1}{(a + e^{bx})^2} [e^{2bx} \bar{a}_{\bar{n}|}(\delta + c) + 2a e^{bx} \bar{a}_{\bar{n}|}(\delta + b + c) + a^2 \bar{a}_{\bar{n}|}(\delta + 2b + c)]$$

hergeleitet und zur gruppenweisen Reservenberechnung herangezogen.

¹⁾ «Beiträge zur gruppenweisen Berechnung der Prämienreserve», Diss. Bern, Stämpfli & Cie., 1947.

1. Der einfachste nichttriviale Fall ($k = 2$)

Für die Überlebensordnung, die zu bestimmen ist, lasse sich der temporäre Leibrentenbarwert durch

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_1(t, \delta) \Phi_1(x) + A_2(t, \delta) \Phi_2(x), \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

darstellen. Die Funktionen $A_i(t, \delta)$, ($i = 1, 2$), seien zweimal differenzierbar und für die folgenden, aus ihnen gebildeten Ausdrücke seien besondere Bezeichnungen eingeführt ¹⁾:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1(t, \delta)}{\partial t} & \frac{\partial A_2(t, \delta)}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 A_1(t, \delta)}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 A_2(t, \delta)}{\partial t^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial A_1(0, \delta)}{\partial t} = \dot{A}_1(0) = a_{11}, \quad \frac{\partial A_2(0, \delta)}{\partial t} = \dot{A}_2(0) = a_{21},$$

$$\frac{\partial^2 A_1(0, \delta)}{\partial t^2} = \ddot{A}_1(0) = a_{12}, \quad \frac{\partial^2 A_2(0, \delta)}{\partial t^2} = \ddot{A}_2(0) = a_{22},$$

und

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Einleitend führen wir einige Sätze als Hilfsmittel für spätere Betrachtungen an; sie helfen gleichzeitig die Frage nach den besondern Voraussetzungen, unter denen eine Verkürzung der Barwertformel (1) in

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A(t) \Phi(x)$$

möglich ist, klären.

Satz 1. Die Barwertformel $\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_1(t) \Phi_1(x) + A_2(t) \Phi_2(x)$ kann genau dann durch $\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A(t) \Phi(x)$ dargestellt werden, wenn die Funktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ oder $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ linear abhängig sind.

Beweis: Wird die Abhängigkeit der Funktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ vorausgesetzt, so kann in $c_1 A_1(t) + c_2 A_2(t) \equiv 0$ (identisch in t) $c_1 \neq 0$ angenommen werden; es folgt

$$A_1(t) = -\frac{c_2}{c_1} A_2(t) \quad \text{und für} \quad \bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_2(t) \left[c_2 \Phi_2(x) - \frac{c_2}{c_1} \Phi_1(x) \right] = A(t) \Phi(x),$$

die verkürzte Formel.

¹⁾ Auf die für unsere Betrachtungen unbedeutende Abhängigkeit der Funktionen A_i von δ wird in der Bezeichnung nicht mehr hingewiesen. Punkte bezeichnen Ableitungen nach t .

Ebenso schliesst man aus $\gamma_1 \Phi_1(x) + \gamma_2 \Phi_2(x) \equiv 0$ (identisch in x) auf

$$\bar{a}_{x:\bar{t}} = \left[\gamma_2 A_2(t) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_1(t) \right] \Phi_2(x) = A^*(t) \Phi^*(t).$$

Aus $\bar{a}_{x:\bar{t}} = A(t) \Phi(x)$ folgt umgekehrt eine zweigliedrige Darstellung $\bar{a}_{x:\bar{t}} = A_1(t) \Phi_1(x) + A_2(t) \Phi_2(x)$ vermittels der linear abhängigen Funktionen $\begin{cases} A_1(t) \equiv A(t), & A_2(t) \equiv 0, \\ \Phi_1(x) \equiv \Phi(x), & \Phi_2(x) \equiv 0. \end{cases}$

Satz 2. Sind die Funktionen $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ linear unabhängig, dann haben die $A_i(t)$ die Anfangswerte Null,

$$A_1(0) = A_2(0) = 0. \quad (3)$$

Beweis: Da die Funktionen $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ linear unabhängig vorausgesetzt sind, folgt aus

$$\bar{a}_{x:\bar{0}} \equiv 0 \equiv A_1(0) \Phi_1(x) + A_2(0) \Phi_2(x) \quad (\text{in } x)$$

bereits die Behauptung.

Satz 3. Haben die Funktionen $A_i(t)$ die Anfangswerte $A_i(0) = 0$, dann ist ihre lineare Abhängigkeit gleichbedeutend mit dem identischen Verschwinden der Determinante

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) \end{vmatrix}.$$

Beweis: Sind die Funktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ linear abhängig, dann hat das System $\begin{cases} c_1 \dot{A}_1(t) + c_2 \dot{A}_2(t) = 0 \\ c_1 \ddot{A}_1(t) + c_2 \ddot{A}_2(t) = 0 \end{cases}$

eine Lösung $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, d. h. es ist $\begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) \end{vmatrix} \equiv 0$ (in t).

Wird umgekehrt $\begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) \end{vmatrix} \equiv 0$ vorausgesetzt, so folgt zunächst $\dot{A}_1(t) = k \dot{A}_2(t)$, ($k \neq 0$, ohne Einschränkung der Allgemeinheit), hieraus $A_1(t) = k A_2(t) + h$ und wegen der Anfangsbedingung (3) $h = 0$, mithin die lineare Abhängigkeit der Funktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$.

Satz 4. Verschwindet die Determinante $\Delta(t)$ an einer Stelle, so verschwindet sie identisch.

Beweis: Aus den Darlegungen im Anschluss an Satz 8 geht hervor, dass die Funktionen $A_i(t)$ ein lineares homogenes System von Differentialgleichungen erster Ordnung erfüllen. Als dessen Wronskideterminante ist $\Delta(t)$ Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung und muss daher identisch verschwinden, sobald der Wert Null an einer Stelle angenommen wird.

Satz 5. Das durch $\mu_x = -\varrho$ charakterisierte Sterbegesetz von Dormoy, $l(x) = \lambda e^{\varrho x}$, ($\varrho < 0$), ist die einzige Überlebensordnung, für welche eine verkürzte Darstellung

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A(t) \Phi(x)$$

des Leibrentenbarwertes möglich ist. Die Funktionen $A(t)$ und $\Phi(x)$ sind durch

$$A(t) = \int_0^t e^{r\tau} d\tau = \frac{e^{rt} - 1}{r}, \quad (\varrho = r + \delta),$$

und

$$\Phi(x) = 1$$

bestimmt.

Beweis: Für das Sterbegesetz $\mu_x = -\varrho$ nimmt das Barwertintegral die einfache Gestalt

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \int_0^t e^{(\varrho-\delta)\xi} d\xi = \frac{e^{(\varrho-\delta)t} - 1}{\varrho - \delta} = \frac{e^{rt} - 1}{r} = A(t), \quad (\varrho = r + \delta),$$

an.

Umgekehrt, wenn $\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A(t) \Phi(x)$ gegeben ist, darf $A(t)$ von einer Konstanten A verschieden angenommen werden (andernfalls müsste wegen $\bar{a}_{x:\bar{0}|} \equiv 0 = A \Phi(x) \bar{a}_{x:\bar{t}|}$ identisch verschwinden). Aus den Beziehungen

$$\frac{\partial \bar{a}_{x:\bar{t}|}}{\partial t} = A(t) \Phi(x) = {}_t p_x e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_{x:\bar{t}|}}{\partial t^2} = \dot{A}(t) \Phi(x) = -{}_t p_x e^{-\delta t} (\mu_{x+t} + \delta),$$

folgt

$$\frac{\ddot{A}(t)}{\dot{A}(t)} = -(\mu_{x+t} + \delta),$$

und hieraus, $\dot{A}(0) = a_1$, $\ddot{A}(0) = a_2$, $\frac{a_2}{a_1} = r$, ($a_1 \neq 0$), gesetzt,

$$\mu_x = -(r + \delta) = -\varrho$$

oder

$$l(x) = \lambda e^{\varrho x}.$$

Durch $\ddot{A}(t) - r\dot{A}(t) = 0$, $A(0) = 0$ ist $A(t) = \int_0^t e^{r\tau} d\tau$ als Zeitrentenendwert bestimmt und man schliesst aus

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \int_0^t e^{(\varrho-\delta)\xi} d\xi = A(t) \Phi(x) = \Phi(x) \int_0^t e^{r\tau} d\tau$$

auf $\Phi(x) = 1$.

Satz 6. Der Barwertformel $\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_1(t) \Phi_1(x) + A_2(t) \Phi_2(x)$ entspricht

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = \begin{cases} y_1(t) + y_2(t) \mu_x, & \text{falls } \Delta \neq 0, \\ y(t), & \text{falls } \Delta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Im Falle $\Delta \neq 0$, $A_1(0) = A_2(0) = 0$, ist ausserdem

$$y_1(0) = y_2(0) = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_1(t) & \ddot{y}_2(t) \end{vmatrix} = -\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Beweis: Leitet man

$$\bar{a}_{x:\bar{t}|} = A_1(t) \Phi_1(x) + A_2(t) \Phi_2(x) = \int_0^t {}_t p_x e^{-\delta\xi} d\xi$$

nach t ab, so gewinnt man die Relationen

$$\frac{\partial \bar{a}_{x:\bar{t}|}}{\partial t} = \dot{A}_1(t) \Phi_1(x) + \dot{A}_2(t) \Phi_2(x) = {}_t p_x e^{-\delta t},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}_{x:\bar{t}|}}{\partial t^2} = \ddot{A}_1(t) \Phi_1(x) + \ddot{A}_2(t) \Phi_2(x) = -{}_t p_x e^{-\delta t} (\mu_{x+t} + \delta),$$

die für $t = 0$ zum System

$$\begin{aligned} a_{11} \Phi_1(x) + a_{21} \Phi_2(x) &= 1, \\ a_{12} \Phi_1(x) + a_{22} \Phi_2(x) &= -(\mu_x + \delta) \end{aligned} \quad (5)$$

führen, welches die Funktionen $\Phi_1(x)$ und $\Phi_2(x)$ bestimmt.

Ist $\Delta \neq 0$, dann hat (5) genau eine Lösung; man erhält

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \frac{1}{\Delta} [a_{22} + a_{21}(\mu_x + \delta)], \\ \Phi_2(x) &= \frac{1}{\Delta} [a_{12} + a_{11}(\mu_x + \delta)]\end{aligned}\tag{6}$$

und hieraus

$$A_1(t) \Phi_1(x) + A_2(t) \Phi_2(x) = y_1(t) + y_2(t) \mu_x$$

mit

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{\Delta} [(a_{22} + a_{21} \delta) A_1(t) - (a_{12} + a_{11} \delta) A_2(t)], \\ y_2 &= \frac{1}{\Delta} [a_{21} A_1(t) - a_{11} A_2(t)].\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionen $A_i(t)$ und $y_i(t)$ wird demnach vermittelt durch die Transformationen

$$Y = LA, \quad L = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{22} + a_{21} \delta & -(a_{12} + a_{11} \delta) \\ a_{21} & -a_{11} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$A = L^{-1}Y, \quad L^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} - (a_{12} + a_{11} \delta) \\ a_{21} - (a_{22} + a_{21} \delta) \end{vmatrix}, \tag{7'}$$

bei denen die Anfangswerte $A_1(0) = A_2(0) = 0$ und $y_1(0) = y_2(0) = 0$ einander zugeordnet sind. Für die Determinante der Matrix L ermittelt

man den Wert $-\frac{1}{\Delta}$, so dass

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_1(t) & \ddot{y}_2(t) \end{vmatrix} = |L| \begin{vmatrix} \dot{A}_1(t) & \dot{A}_2(t) \\ \ddot{A}_1(t) & \ddot{A}_2(t) \end{vmatrix} = -\frac{\Delta(t)}{\Delta}$$

und insbesondere

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_1(0) & \dot{y}_2(0) \\ \ddot{y}_1(0) & \ddot{y}_2(0) \end{vmatrix} = -1$$

wird.

$\Delta = 0$. Das System (5) ist nur dann lösbar, wenn

$$\text{Rang} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & -(\mu_x + \delta) \end{vmatrix} = \text{Rang} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

oder
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{12} & -(\mu_x + \delta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & 1 \\ a_{22} & -(\mu_x + \delta) \end{vmatrix} = \Delta = 0$$

und
$$\mu_x + \delta = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{a_{22}}{a_{21}},$$

mithin μ_x altersunabhängig ist, woraus nach Satz 5 die Behauptung folgt.

Satz 7. Durch eine nicht weiter verkürzbare Darstellung $\bar{a}_{x:\bar{t}} = y_1(t) + y_2(t)\mu_x$ wird die Überlebensordnung $l(x)$ als Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmt.

Beweis: Die Differentialgleichung des Leibrentenbarwertes

$$\frac{\partial \bar{a}_{x:\bar{t}}}{\partial x} = \bar{a}_{x:\bar{t}}(\mu_x + \delta) - 1 + \frac{\partial \bar{a}_{x:\bar{t}}}{\partial t}$$

liefert für den Ansatz $\bar{a}_{x:\bar{t}} = y_1(t) + y_2(t)\mu_x$ die Relation

$$y_2\mu_x' = y_2\mu_x^2 + (\dot{y}_2 + y_1 + \delta y_2)\mu_x + \dot{y}_1 + \delta y_1 - 1,$$

in der $y_2(t)$ nicht identisch Null angenommen werden kann und die nach den Festsetzungen

$$\frac{\dot{y}_2 + y_1 + \delta y_2}{y_2} = -P(t), \tag{8}$$

$$\frac{\dot{y}_1 + \delta y_1 - 1}{y_2} = Q(t),$$

in der Form

$$\mu_x' = \mu_x^2 - P(t)\mu_x + Q(t) \tag{9}$$

geschrieben werden kann. Eine Separation der Variablen wird durch Differentiation nach t erreicht; die abgeleitete Beziehung (9)

$$-\dot{P}(t)\mu_x + \dot{Q}(t) = 0 \tag{10}$$

gibt Anlass zu zwei Fallunterscheidungen:

Ist $P(t) \not\equiv 0$, so folgt aus

$$\mu_x = -\frac{\dot{Q}(t)}{\dot{P}(t)} = -\varrho$$

die für das SterbeGesetz von Dormoy charakteristische Altersunabhängigkeit der Sterbensintensität; nach Satz 5 kann die Barwertformel in $\bar{a}_{x:\bar{t}} = y(t)$ verkürzt werden, womit ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes entsteht.

$\dot{P}(t) \equiv 0$: Gemäss (10) verschwindet auch $\dot{Q}(t)$ identisch und die Funktionen $P(t)$ und $Q(t)$ sind Konstante:

$$P(t) = \kappa_2, \quad Q(t) = \kappa_1.$$

Die Sterbensintensität μ_x hat nun Gleichung (9),

$$\mu'_x = \mu_x^2 - \kappa_2 \mu_x + \kappa_1,$$

also einer *Riccatischen* Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu genügen, welche durch die Substitution

$$\mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)}$$

in die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$l''(x) + \kappa_2 l'(x) + \kappa_1 l(x) = 0 \quad (11)$$

für $l(x)$ mit der charakteristischen Gleichung

$$\varrho^2 + \kappa_2 \varrho + \kappa_1 = 0 \quad (12)$$

übergeht. Satz 7 ist damit bewiesen.

Satz 8. Durch $\bar{a}_{x:\bar{t}} = y_1(t) + y_2(t) \mu_x$, $\mu_x \neq -\varrho$, $[y_1(0) = y_2(0) = 0]$, sind die Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ als Zeitrentenendwerte eindeutig bestimmt.

Beweis: Unter Berücksichtigung von $P(t) = \kappa_2$ und $Q(t) = \kappa_1$ stellt (8) ein lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\delta y_1 + \kappa_1 y_2 + 1, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - (\kappa_2 + \delta) y_2 \end{aligned} \quad (13)$$

oder

$$\dot{Y} = P Y + Q \quad (13')$$

mit

$$P = \begin{vmatrix} -\delta & \kappa_1 \\ -1 & -(\kappa_2 + \delta) \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

$y_1(t)$ und $y_2(t)$ sind als dessen Lösung durch die Anfangswerte $y_1(0) = y_2(0) = 0$ eindeutig bestimmt.

Die beiden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die unbestimmten Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + (\kappa_2 + 2\delta)\dot{y}_1 + (\kappa_1 + \delta\kappa_2 + \delta^2)y_1 &= \kappa_2 + \delta, \\ \ddot{y}_2 + (\kappa_2 + 2\delta)\dot{y}_2 + (\kappa_1 + \delta\kappa_2 + \delta^2)y_2 &= -1 \end{aligned} \quad (14)$$

sind System (13) äquivalent. Die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad r^2 + (\kappa_2 + 2\delta)r + (\kappa_1 + \delta\kappa_2 + \delta^2) &= 0 \\ (r + \delta)^2 + \kappa_2(r + \delta) + \kappa_1 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

stimmt nach der Substitution

$$\varrho = r + \delta \quad (16)$$

mit dem zur Differentialgleichung der Überlebensordnung $l(x)$ gehörenden charakteristischen Polynom (12) überein. Ein zu

$$\ddot{y} + (\kappa_2 + 2\delta)\dot{y} + (\kappa_1 + \delta\kappa_2 + \delta^2)y = 0 \quad (14')$$

gehörendes Hauptsystem ist demnach bis auf den Faktor $e^{-\delta t}$ vom selben Typus wie die linear unabhängigen Lösungen für $l(x)$ ¹⁾.

Es ist im folgenden zweckmässig, die Relationen

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= r_1 + \delta, \quad \varrho_2 = r_2 + \delta, \\ \varrho_1 + \varrho_2 &= -\kappa_2, \quad \varrho_1 \varrho_2 = \kappa_1, \\ \varrho_2 - \varrho_1 &= r_2 - r_1, \\ \kappa_2 + \delta &= -\varrho_1 - r_2 = -\varrho_2 - r_1 \end{aligned} \quad (17)$$

zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichungen (12) und (15) festzuhalten.

1)

Tabelle 1

Wurzeln der charakteristischen Gleichung	Hauptsystem	
	zu Gleichung (11)	zu Gleichung (14')
a) $\varrho_1 \neq \varrho_2$ (reell)	$e^{\varrho_1 x}, e^{\varrho_2 x}$	$e^{-\delta t} e^{\varrho_1 t}, e^{-\delta t} e^{\varrho_2 t}$
b) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$	$e^{\varrho x}, x e^{\varrho x}$	$e^{-\delta t} e^{\varrho t}, t e^{-\delta t} e^{\varrho t}$
c) $\varrho_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$)	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$	$e^{(\alpha-\delta)t} \cos \beta t, e^{(\alpha-\delta)t} \sin \beta t$

Die durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0, & \dot{y}_1(0) &= 1, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten Lösungen der inhomogenen Gleichungen (14) sind nun gegeben durch ¹⁾

a) falls $\varrho_1 \neq \varrho_2, r_1 \neq r_2$ (reell)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\varrho_2 \int_0^t e^{r_1 \tau} d\tau - \varrho_1 \int_0^t e^{r_2 \tau} d\tau \right], \\ y_2(t) &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\int_0^t e^{r_1 \tau} d\tau - \int_0^t e^{r_2 \tau} d\tau \right]; \end{aligned} \tag{18a}$$

b) falls $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho, r_1 = r_2 = r$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t e^{r\tau} d\tau - \int_0^t \tau e^{r\tau} d\tau, \\ y_2(t) &= - \int_0^t \tau e^{r\tau} d\tau; \end{aligned} \tag{18b}$$

c) falls $\varrho_{1,2} = \alpha \pm i\beta, r_{1,2} = \alpha - \delta \pm i\beta, (\beta \neq 0)$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \cos \beta\tau d\tau - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta\tau d\tau, \\ y_2(t) &= - \frac{1}{\beta} \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta\tau d\tau. \end{aligned} \tag{18c}$$

Die Funktionen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ erfüllen wegen (7), $Y = LA$, $|L| \neq 0$, das System

$$\dot{A} = L^{-1}PLA + L^{-1}Q.$$

$\dot{A}_1(t)$ und $\dot{A}_2(t)$ sind unter der Voraussetzung $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung

$$\dot{A} = L^{-1}PLA;$$

¹⁾ Etwa *E. Kamke*, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, S. 242.

sie fallen wegen

$$|L^{-1}PL - rE| = |P - rE| = \begin{vmatrix} -\delta - r & \kappa_1 \\ -1 & -(\kappa_2 + \delta + r) \end{vmatrix} = (r + \delta)^2 + \kappa_2(r + \delta) + \kappa_1 = 0$$

mit einem Hauptsystem der Gleichung

$$\dot{Y} = PY \quad (13')$$

zusammen. Den Konstanten a_{ik} können daher die folgenden Werte beigelegt werden:

Tabelle 2

Fall	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
a) $\varrho_1 \neq \varrho_2, r_1 \neq r_2$ (reell)	1	r_1	1	r_2
b) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho, r_1 = r_2 = r$	1	r	0	1
c) $\varrho_{1,2} = \alpha \pm i\beta, r_{1,2} = \alpha - \delta \pm i\beta, (\beta \neq 0)$	1	$\alpha - \delta$	0	β

Mit der Tabelle 3 zu entnehmenden Matrix L^{-1} führt nun die Transformation (7')

$$A = L^{-1}Y$$

zum folgenden Ergebnis für $A_1(t)$ und $A_2(t)$:

Tabelle 3

Fall	A	L	L^{-1}	$A_1(t)$	$A_2(t)$
a)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{r_2 - r_1} \begin{vmatrix} \varrho_2 & -\varrho_1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -\varrho_1 \\ 1 & -\varrho_2 \end{vmatrix}$	$\int_0^t e^{r_1\tau} d\tau$	$\int_0^t e^{r_2\tau} d\tau$
b)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -\varrho \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -\varrho \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\int_0^t e^{r\tau} d\tau$	$\int_0^t \tau e^{r\tau} d\tau$
c)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha - \delta & \beta \end{vmatrix}$	$\frac{1}{\beta} \begin{vmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & -\beta \end{vmatrix}$	$\int_0^t e^{(\alpha - \delta)\tau} \cos \beta\tau d\tau$	$\int_0^t e^{(\alpha - \delta)\tau} \sin \beta\tau d\tau$

Satz 8a. Die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$, $A_1(t)$ und $A_2(t)$ werden durch Barwertintegrale

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\bar{t}|}(-r) &= \int_0^t e^{r\tau} d\tau = \frac{e^{rt} - 1}{r}, \\ (I\bar{a})_{\bar{t}|}(-r) &= \int_0^t \tau e^{r\tau} d\tau = \frac{r^2 e^{rt} - e^{rt} + 1}{r^2}, \end{aligned} \quad (r = \varrho - \delta)$$

konstanter oder linear steigender Zeitrenten dargestellt, falls das charakteristische Polynom der Differentialgleichung der Überlebensordnung reelle Nullstellen hat.

Im Fall konjugiert komplexer Wurzeln sind die Darstellungsintegrale

$$\int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \cos \beta\tau d\tau \quad \text{und} \quad \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta\tau d\tau$$

als Barwerte variabler Zeitrenten, die sich nach einer Cosinus- oder Sinusfunktion verändern, interpretierbar.

Fallen die Zinsintensitäten $r = \varrho - \delta$ oder $\alpha - \delta$ positiv aus, so haben die Integrale die Bedeutung von Endwerten.

2. Explizite Darstellung von Überlebensordnung und Leibrentenbarwert ($k = 2$)

Im nichttrivialen Fall, $\mu_x \neq -\varrho$, ist nach Satz 7 die Überlebensordnung $l(x)$ als allgemeines Integral der Differentialgleichung

$$l''(x) + \kappa_2 l'(x) + \kappa_1 l(x) = 0 \quad (11)$$

gegeben durch

$$\text{a) } l(x) = \lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x} = l_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(e^{\varrho_1 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\varrho_2 x} \right), \quad (19a)$$

falls $\kappa_2^2 - 4\kappa_1 > 0$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ (reell);

$$\text{b) } l(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{\varrho x} = l_0 \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x \right) e^{\varrho x}, \quad (19b)$$

falls $\kappa_2^2 - 4\kappa_1 = 0$, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$;

$$\text{c) } l(x) = e^{\alpha x} (\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x) = A e^{\alpha x} \sin \beta (\omega - x) = l_0 \frac{\sin \beta (\omega - x)}{\sin \beta \omega} e^{\alpha x},$$

falls $\kappa_2^2 - 4\kappa_1 < 0$, $\varrho_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, ($\beta \neq 0$). (19c)

Für Sterbensintensität und Überlebenswahrscheinlichkeit ermittelt man die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \text{a) } \mu_x &= -\frac{\lambda_1 \varrho_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 \varrho_2 e^{\varrho_2 x}}{\lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x}} = -\varrho_2 - (\varrho_2 - \varrho_1) \frac{\lambda_1 e^{\varrho_1 x}}{\lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x}}, \\ {}_{\xi}p_x &= \frac{\lambda_1 e^{\varrho_1(x+\xi)} + \lambda_2 e^{\varrho_2(x+\xi)}}{\lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x}} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} [\varrho_2 e^{\varrho_1 \xi} - \varrho_1 e^{\varrho_2 \xi} + \mu_x (e^{\varrho_1 \xi} - e^{\varrho_2 \xi})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mu_x &= -\varrho - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 x}, \\ {}_{\xi}p_x &= \left(1 + \frac{\xi}{\lambda_1 + \lambda_2 x}\right) e^{e\xi} = [1 - (\mu_x + \varrho) \xi] e^{e\xi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \mu_x &= -\alpha - \beta \frac{\lambda_2 \cos \beta x - \lambda_1 \sin \beta x}{\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x}, \\ {}_{\xi}p_x &= e^{\alpha \xi} \left[\cos \beta \xi + \frac{\lambda_2 \cos \beta x - \lambda_1 \sin \beta x}{\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x} \sin \beta \xi \right] \\ &= \frac{e^{\alpha \xi}}{\beta} [\beta \cos \beta \xi - (\mu_x + \alpha) \sin \beta \xi] \end{aligned}$$

und hieraus die nachfolgenden Beziehungen, welche zeigen, dass die durch (19) bestimmte Form eines Sterbegesetzes hinreicht für die Darstellbarkeit der temporären Leibrente durch Zeitrenten:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{a}_{x:\overline{t}|} &= \frac{\lambda_1 e^{\varrho_1 x}}{\lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x}} \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_1) + \frac{\lambda_2 e^{\varrho_2 x}}{\lambda_1 e^{\varrho_1 x} + \lambda_2 e^{\varrho_2 x}} \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_2) \\ &= \frac{1}{D_x} [\lambda_1 e^{r_1 x} \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_1) + \lambda_2 e^{r_2 x} \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_2)] \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \{ \varrho_2 \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_1) - \varrho_1 \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_2) + \mu_x [\bar{a}_{\overline{t}|}(-r_1) - \bar{a}_{\overline{t}|}(-r_2)] \}, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bar{a}_{x:\overline{t}|} &= \bar{a}_{\overline{t}|}(-r) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 x} (I\bar{a})_{\overline{t}|}(-r) \\ &= \bar{a}_{\overline{t}|}(-r) - \varrho (I\bar{a})_{\overline{t}|}(-r) - \mu_x (I\bar{a})_{\overline{t}|}(-r), \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bar{a}_{x:\overline{t}|} &= \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \cos \beta \tau \, d\tau + \frac{\lambda_2 \cos \beta x - \lambda_1 \sin \beta x}{\lambda_1 \cos \beta x + \lambda_2 \sin \beta x} \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta \tau \, d\tau \\ &= \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \cos \beta \tau \, d\tau - \frac{\alpha}{\beta} \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta \tau \, d\tau - \mu_x \frac{1}{\beta} \int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \sin \beta \tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (20c)$$

Die Ergebnisse lassen sich auf temporäre Leibrenten beliebiger Ordnung übertragen. Der Barwert

$$(I^\nu \bar{a})_{x:\bar{t}|} = \frac{1}{\nu!} \int_0^t \xi^\nu {}_x p_x e^{-\delta \xi} d\xi, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

zerfällt für die Sterbegesetze (19) in eine Summe von zwei Gliedern, in denen die Variablen x und t getrennt sind:

$$\begin{aligned} (I^\nu \bar{a})_{x:\bar{t}|} &= A_1^{[\nu]}(t) \Phi_1(x) + A_2^{[\nu]}(t) \Phi_2(x) \\ &= y_1^{[\nu]}(t) + y_2^{[\nu]}(t) \mu_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Die Werte der Koeffizientenfunktionen sind aus Tabelle 4 ersichtlich.

Tabelle 4

Fall	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x)$
a)	$\frac{\lambda_1 e^{\rho_1 x}}{D_x}$	$\frac{\lambda_2 e^{\rho_2 x}}{D_x}$
b)	1	$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 x}$
c)	1	$\frac{\lambda_2 \cos x - \lambda_1 \sin x}{\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x}$
	$A_1^{[\nu]}(t)$	$A_2^{[\nu]}(t)$
a)	$(I^\nu \bar{a})_{\bar{t} }(-r_1) = \frac{1}{\nu!} \int_0^t \tau^\nu e^{r_1 \tau} d\tau$	$(I^\nu \bar{a})_{\bar{t} }(-r_2) = \frac{1}{\nu!} \int_0^t \tau^\nu e^{r_2 \tau} d\tau$
b)	$(I^\nu \bar{a})_{\bar{t} }(-r) = \frac{1}{\nu!} \int_0^t \tau^\nu e^{r \tau} d\tau$	$(I^{\nu+1} \bar{a})_{\bar{t} }(-r) = \frac{1}{(\nu+1)!} \int_0^t \tau^{\nu+1} e^{r \tau} d\tau$
c)	$\int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \tau^\nu \cos \beta \tau d\tau$	$\int_0^t e^{(\alpha-\delta)\tau} \tau^\nu \sin \beta \tau d\tau$

Die Barwertformeln können im allgemeinen zur Darstellung lebenslänglicher Leibrenten nicht herangezogen werden, weil die Integrale $A_1(t)$ und $A_2(t)$ bei wachsendem t für die aus den Beobachtungswerten der $l(x)$ ermittelten Parametern ϱ_1 und ϱ_2 (r_1 und r_2) nicht zu konvergieren brauchen ¹⁾. Der Verfasser hofft, damit zusammenhängende Fragen später streifen zu können.

In einem SterbeGesetz der Form (19) lassen sich die Integrationskonstanten λ_1 und λ_2 durch Differentiation eliminieren, und es stellt z. B. im Falle (19 a)

$$\begin{vmatrix} l''(x) & \varrho_1^2 & \varrho_2^2 \\ l'(x) & \varrho_1 & \varrho_2 \\ l(x) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varrho_1 & \varrho_2 \end{vmatrix} = \varrho_2 - \varrho_1 \neq 0 \right),$$

oder
$$l''(x) - (\varrho_1 + \varrho_2)l'(x) + \varrho_1\varrho_2l(x) = 0$$

Gleichung (11) dar, die sich damit als charakteristisch für die verlangte Darstellungseigenschaft der Barwertfunktion erweist.

Satz 9. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich für ein SterbeGesetz $l(x)$ der temporäre Leibrentenbarwert in der Form

$$\bar{a}_{x:\overline{t}|} = A_1(t)\Phi_1(x) + A_2(t)\Phi_2(x) = y_1(t) + y_2(t)\mu_x, \quad (\mu_x = -\varrho),$$

darstellen lässt, ist das Bestehen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für $l(x)$.

Beachtenswert ist die formale Analogie zwischen Satz 9 und den Bedingungen für die Ableitung der Sterbensintensitäten μ_x in der Überlebensordnung von *Quiquet* ²⁾.

* * *

Es ist beabsichtigt, in einer weitem Mitteilung die Untersuchungen auf den durch (2) eingeführten allgemeinen Fall auszudehnen, sowie die theoretischen Erwägungen durch Beispiele, an denen die praktische Bedeutung der Sterbeformeln geprüft werden kann, zu ergänzen.

¹⁾ Die Überlebensordnung hat dann die Bedeutung eines Zonengesetzes.

²⁾ Damit für ein SterbeGesetz ${}^i p_{x_1 x_2 \dots x_n} = {}^i p_{\xi_1 \xi_2}$, ($n > 2$), gilt, hat die Ableitung der Sterbensintensität μ_x als notwendige und hinreichende Bedingung eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erfüllen.