

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	54 (1954)
Artikel:	Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung mechanischer Ausgleichung und deren praktische Anwendung
Autor:	Jecklin, H. / Strickler, P.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-555080

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung mechanischer Ausgleichung und deren praktische Anwendung

Von *H. Jecklin* und *P. Strickler*, Zürich

I.

Über die Ausgleichung von Sterbetafeln im allgemeinen und über die mechanische Ausgleichung derselben im besonderen ist schon sehr viel geschrieben worden. Auch über die Beurteilung der Güte von Ausgleichungen besteht eine umfangreiche Literatur. In dem klassischen Lehrbuch von Blaschke [1] wird Seite 251 ff. der Meinung Ausdruck gegeben, dass die Güte einer Ausgleichung nur relativ und nicht absolut gemessen werden könne. Diese Auffassung ist vorerst nicht befremdend, denn nachdem der Glaube an die Existenz bestimmter Sterbegesetze einmal überwunden war, handelte es sich bei der Ausgleichung nach allgemeiner Ansicht im wesentlichen darum, den empirischen Streckenzug der Sterbehäufigkeiten in eine Kurve zu verwandeln, die unseren Vorstellungen besser entspricht. So formuliert es auch Altmeister Czuber [2]. Es würde ein Buch füllen, die bis heute erfundenen und empfohlenen Verfahren zur Sterbetafel-Ausgleichung aufzuzählen und zu erläutern. Wir wollen lediglich einen charakteristischen Ausspruch von Tschuprow [3] nicht vorenthalten: «Bei allen Ausgleichsmethoden (graphisch, mechanisch oder analytisch) verfährt man ziemlich willkürlich, und man hat zwischen der Skylla eines allzu weitgehenden Schematismus, der die eigenartige Wellenbewegung der empirischen Zahlen durch eine allzu einfache Kurve nivelliert, und der Charybdis einer allzu getreuen Wiedergabe der ursprünglichen Zahlen, welche rein zufällige Schwankungen fortbestehen lässt, zu manövrieren.»

Wenn man die Sache so betrachtet, kann man allerdings der von Sachs [4] vertretenen Meinung beipflichten, die kurz gesagt dahin

geht, dass man sich im mittleren Bereich einer Sterbetafel die Mühe der Ausgleichung unbedenklich ersparen könne, und dass in den höchsten Altersklassen zumindest die analytische Ausgleichung zu verwerfen sei. Zufolge der willkürlichen Änderungen, welchen man die Sterbetafeln zu unterwerfen pflege, werde das wahre Bild der Sterblichkeit, die in ihnen zusammengestellt sein sollte, über die ohnehin vorhandenen Fehlerquellen hinaus noch verfälscht. Immerhin gibt auch Sachs zu, dass es zweckmässig sein kann, die Sterbetafel für den Gebrauch in dieser oder jener Weise zu modifizieren. In der Tat soll ja die Sterbetafel unter anderem dem praktischen Zweck der Prämienberechnung dienen, und man hat sich nur die Folgen auszudenken, wenn die Prämien der einjährigen Risikoversicherung nach unausgeglichenen Tafeln berechnet würden. Was dagegen den Erkenntniswert der Sterbetafeln anbetrifft, so möchten wir Sachs darin zustimmen, dass dieser wohl nicht so gross ist wie gemeinhin angenommen wird.

Nun glauben wir, dass in der Frage der Ausgleichung von Sterbetafeln der Natur der Angelegenheit nur dann richtig Rechnung getragen wird, wenn man die Wahrscheinlichkeitstheorie zum Ausgangspunkt nimmt. Man muss sich dann die Frage stellen, was für Konsequenzen sich bezüglich der Tafel-Ausgleichung ergeben, wenn man die sogenannten Sterbenswahrscheinlichkeiten als echte statistische Wahrscheinlichkeiten auffasst, so dass also die empirisch festgestellten q_x nur als Stichprobenerhebungen aus einem Material mit einer vorhandenen, aber nicht bekannten wahren Sterbenswahrscheinlichkeit anzusehen sind. In wertvollen Untersuchungen hat Ammeter [5] gezeigt, dass es bei Basierung auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt im Gegensatz zu den zitierten Auffassungen möglich ist, eindeutige Kriterien für die Güte einer Ausgleichung anzugeben. Es wäre aber nicht sinnvoll, sich bei der Beurteilung einer Ausgleichung auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt zu stellen, wenn man dies bei der vorangehenden Ausgleichung selbst nicht tun dürfte. Wir sind aber überzeugt, dass eine solche Stellungnahme gerechtfertigt ist, worauf wir noch näher eintreten werden. Wenn man sich jedoch bei der Ausgleichung auf einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt stellen darf, dann sollte man diesen Standpunkt einnehmen und die bezüglichen Konsequenzen ziehen, indem dann die Ausgleichung nicht mehr bloss eine willkürliche Schönheitsoperation darstellen wird.

Zwar sagt Sachs [4], dass die Ausgleichung einer Sterbetafel mit der Ausgleichung der Beobachtungsfehler z. B. nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate im Grunde nichts gemein habe, wenn auch das gleiche mathematische Rüstzeug Verwendung finde. Denn bei der Ausgleichung einer Sterbetafel handle es sich nicht darum, aus einer grösseren Zahl einander in gewissen «Fehlergrenzen» widersprechender Beobachtungsergebnisse ein einheitliches Bild herzustellen, sondern nur um ein Glätten der Kurve, als die sich die Sterbetafel darstellen lässt. Aber die Abweichungen von der geglätteten Kurve seien nicht das Ergebnis mehrerer Beobachtungen desselben Vorganges, die Widersprüche enthalten, welche beseitigt werden müssen; sie röhren vielmehr nur daher, dass man willkürlich, um nicht zu sagen gewaltsam, eine vorgefasste Meinung darüber, wie eine Sterbetafel aussehen müsse, in die Tat umsetze. In diesem Punkte sind wir etwas anderer Ansicht, und wollen versuchen, diese in den nächstfolgenden Ausführungen zu begründen.

Es ist die Frage voranzustellen, ob die Sterbenswahrscheinlichkeit als echte statistische Wahrscheinlichkeit angesprochen werden kann. Wenn dies der Fall ist, kann – wie wir zeigen werden – gefolgert werden, dass die empirischen Werte der q_x zufällig um die wahre Sterblichkeitskurve schwanken, und wir können mit Recht für die Ausgleichung in gewissen Grenzen analoge Überlegungen anstellen, wie sie aus der Theorie der Beobachtungsfehler bekannt sind. Nur hat man sich dem Umstande anzupassen, dass es sich nicht um Schwankungen bezüglich einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit handelt, sondern um Schwankungen bezüglich einer von Beobachtung zu Beobachtung sich ändernden Grundwahrscheinlichkeit.

Die Frage nach der Natur der Sterbenswahrscheinlichkeit ist aber heute hinreichend geklärt. Wir wissen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit einer säkularen Änderung unterworfen ist, und dass man daher bei der Prüfung der Sterblichkeitsschwankungen einer bestimmten Altersklasse innerhalb bestimmtem Zeitraum nicht einfach auf das arithmetische Mittel abstellen darf, sondern die Abweichungen vom Trend, der uns die zeitliche Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeit repräsentiert, auf ihren Zufallscharakter prüfen muss. Da wir nicht einen festen Mittelwert haben, kann nicht die Verteilung der absoluten Abweichungen betrachtet werden, die Prüfung wird sich vielmehr auf die Verteilung der relativen Abweichungen in bezug auf den jeweiligen

Trendwert erstrecken. Was die Darstellung des Sterblichkeits-Trend selbst anbetrifft, so kann er in den letzten Jahrzehnten genähert als linear aufgefasst werden, mit schwächerem Gefälle je höher die Altersklasse. Dass dieser Trend auf die Dauer keine Gerade sein kann ist klar. Im übrigen verweisen wir hier auf die einschlägige Literatur, vor allem auch auf die Dissertationen von Baltensberger [6] und Schuler [7]. Abgesehen von Kriegs- und Epidemiezeiten schwanken die empirischen q_x -Werte im grossen und ganzen normal, also rein zufallsmässig um den säkularen Trend, welche Aussage insbesondere auf Grund der Untersuchungen von Lange [8], Wiesler [9] und Ammeter [10] als plausibel anzusehen ist.

Man kann also von der Voraussetzung ausgehen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit einer bestimmten Altersklasse eine echte statistische Wahrscheinlichkeit ist, wobei immerhin im Hinblick auf praktische Untersuchungen verschiedene Schwierigkeiten im Auge zu behalten sind. So pflegt man bekanntlich zur Erreichung grösserer Kollektive die Beobachtungen mehrerer Jahre zusammenzufassen. Wegen der säkularen Sterblichkeitsabnahme erscheinen dadurch die Schwankungen grösser, als es nach reiner Zufallsverteilung der Fall wäre, worauf z. B. in einer Arbeit von Ruchti [11] hingewiesen wird. Das Streben nach Kollektiven möglichst grossen Umfanges birgt überhaupt gewisse Gefahren in sich. Ein Material kleinen Umfanges, aber homogenen Inhaltes, kann oft nützlichere Resultate liefern als ein ungleich grösseres, aber aus charakterlich verschiedenen Teilkollektiven zusammengesetztes Material. Ein lehrreiches Beispiel in dieser Hinsicht sind die Sterblichkeitsuntersuchungen der englischen Versicherungsgesellschaften für die Periode 1924–29 [12].

Die Gesamtheit der Trendlinien für die Sterblichkeit der verschiedenen Altersklassen liegen auf der sog. Sterblichkeitsfläche. Wenn der Sterblichkeitsabfall tatsächlich in jeder Altersklasse dauernd linear wäre, könnte man die Sterblichkeitsfläche mit den Trendlinien als Regelfläche bestimmen. Man pflegt bekanntlich auf der Sterblichkeitsfläche drei Kurvenscharen auszuzeichnen:

$x = \text{konst.}$, d. h. die zeitliche Änderung der Sterblichkeit für die Altersklasse x .

$t = \text{konst.}$, d. h. Sterbetafel gleichzeitig Lebender.

$t - x = \tau = \text{konst.}$, d. h. Verlauf der Sterblichkeit einer Generation.

Wir wollen nun die ganze Sterblichkeitsfläche als ein Kollektiv auffassen, von welchem die Trendlinien mit $x = \text{konst.}$ Teilkollektive bilden, und wollen das Flächengitter der q_x -Punkte in Vergleich setzen zu einem Urnenschema von n Serien zu je s Versuchen mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit. Anstelle des durch dieses einfache Urnen-schema veranschaulichten Kollektivs mit Schwankung der Ereigniszahlen um eine feste Grundwahrscheinlichkeit, d. h. also anstelle eines ebenen Gitters, haben wir ein Flächengitter mit Schwankungen um die Gitterpunkte, welche ihrerseits eine von Gitterpunkt zu Gitterpunkt sich ändernde Grundwahrscheinlichkeit repräsentieren. Es gehört zu den grundlegenden Fakten der Wahrscheinlichkeitstheorie, dass man aus einem Gesamtkollektiv mit Wahrscheinlichkeitscharakter nicht einen Teil herausheben kann, der diesen Charakter nicht besässe. Bei dem durch unser Urnenschema gegebenen ebenen Gitter können wir irgendwelche Punktfolgen herausgreifen, sie bilden immer ein Teilkollektiv mit Wahrscheinlichkeitscharakter. Man vergleiche hiezu die Forderung nach Unempfindlichkeit gegenüber Stellenauswahl, welche v. Mises [13] in seiner Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgestellt hat. Nun haben auf der Sterblichkeitsfläche die Gitterpunkte der durch die Trendlinien mit $x = \text{konst.}$ gegebenen Teilkollektive sicher Wahrscheinlichkeitscharakter. Wenn wir nun statt dieser Teilkollektive jene der Gitterpunkte auf den Kurven mit $t = \text{konst.}$, d. h. auf den Sterblichkeitskurven gleichzeitig Lebender, herausgreifen, so ist man versucht zu argumentieren, dass man wieder Teilkollektive mit Wahrscheinlichkeitscharakter erhalte, so dass also die empirischen Werte rein zufällige Schwankungen um eine a priori unbekannte q_x -Kurve aufweisen müssten. Es könnte aber doch eine Abhängigkeit der säkularen Trendlinien voneinander bestehen. Die Schwankung der Gitterpunkte auf den Kurven mit $t = \text{konst.}$ erfordert daher eine gesonderte Untersuchung. Eine solche wurde von Niedermann [14] durchgeführt und hat eindeutig die Vermutung bestätigt, dass die Streuung der Sterblichkeitsschwankungen auch durch die verschiedenen Altersklassen hindurch als normal betrachtet werden darf.

Wenn im einfachen Fall einer in Wirklichkeit konstanten Beobachtungsgrösse zu vermuten ist, dass die empirischen Werte nur zufällige Abweichungen vom wahren Wert darstellen, so ist bekanntlich das arithmetische Mittel der empirischen Werte der wahrscheinlichste Wert der unbekannten wahren Grösse. Oder mit andern Worten:

Unter Voraussetzung einer normalen Schwankung der Beobachtungswerte ist das arithmetische Mittel derselben die mit dem kleinsten Fehlerrisiko behaftete Bestimmung des unbekannten wahren Wertes; die Summe der scheinbaren Abweichungsquadrate ist dann ein Minimum. Nun liegt die Sache bei der Sterbetafelausgleichung zugegebenermassen nicht so einfach, denn wir haben hier nicht zufällige Abweichungen von einem konstanten Wert, sondern von einer vorläufig unbekannten Kurve. Man wird sich deshalb fragen, ob es nicht eine Art Verallgemeinerung der Bildung des arithmetischen Mittels gibt für den Fall der mit fortschreitender Abszissenordnung sich ändernden Unbekannten. Nach Lorenz [15] ist die Darstellung einer empirischen Wertreihe durch eine ganze rationale Funktion, erhalten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die natürliche Fortbildung des arithmetischen Mittels. Mit Hilfe der von ihm veröffentlichten Tabellen wird die Ausgleichung empirischer Reihen durch orthogonale ganze rationale Funktionen sehr leicht gemacht. Wir haben also eine Darstellung der Form

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k,$$

wobei a_i Konstante und X_i ganze rationale Funktionen i. Grades der Veränderlichen x sind; a_0 ist dabei das arithmetische Mittel.

In seinem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat Poincaré [16] der Approximation einer empirischen Wertreihe durch eine ganze rationale Funktion ein spezielles Kapitel gewidmet. Quiquet [17] hat in der Folge die Frage aufgeworfen, ob die Methode wohl zur Ausgleichung von Sterbetafeln verwendet werden könnte, glaubte sie aber verneinen zu müssen, da man nach seiner Meinung im Grade der rationalen Funktion zu hoch gehen müsste, wenn eine ausgedehnte Tafel repräsentiert werden sollte, so dass die Formel praktisch zu unhandlich würde. Interessant ist in diesem Zusammenhang ein Vorschlag von Gram [18]. Er zerlegt die Beobachtungsreihe in kleinere Abschnitte, gleicht diese aus mittels ganzer rationaler Funktionen dritten Grades auf Basis von Orthogonalfunktionen, und verknüpft dann die ausgeglichenen Kurventeile. Als Grösse der Kurventeile nennt Gram 10 bis 20 Reihenglieder. Es wird also offenbar auch hier die Befürchtung gehegt, dass ein nur niederer Grad der rationalen Funktion für die Ausgleichung einer ganzen Tafel nicht ausreichend sei. Durch die Tabellen von Lorenz [15] hätte man nun allerdings die Möglichkeit in

der Hand, mit leichter Mühe nach ganzen rationalen Funktionen bis zum 6. Grade auszugleichen. Praktische Versuche zeigen, dass man bei Weglassung der jüngeren Altersklassen schon bei Darstellung durch eine Funktion 3. Grades befriedigende Resultate erhalten kann. – Im Hinblick auf die Verwendung orthogonaler ganzer rationaler Funktionen zur Tafel-Ausgleichung sei auch noch auf die bereits genannte Arbeit von Ruchti [11] sowie auf eine weitere interessante Abhandlung von Lorenz [19] verwiesen.

Die Ausgleichung mittels ganzer rationaler Funktionen in genannter Art dürfte aber doch keine Lösung des Problems in dem von uns anvisierten Sinne darstellen. Ohne Verwendung von Kriterien, welche auf die bereits ausgeglichenen Tafel abstellen müssen, kann gar nicht festgestellt werden, welcher Grad der Funktion in einem vorliegenden Falle optimal ist, d. h. wohl zufällige Schwankungen nach Möglichkeit glättet, ohne aber charakteristische Höcker zu verwischen. Sodann ist nicht zu übersehen, dass das ausgeglichene q_x als eine einfache analytische Funktion der Ordnungsnummer x erscheint, es wird also der Beobachtungsreihe gewissermassen ein bestimmtes Gesetz supponiert, so dass es sich unseres Erachtens nicht um mechanische, sondern um analytische Ausgleichung handelt, und man kann die gleichen Einwände erheben, welche gegen die analytischen Ausgleichsverfahren ins Feld geführt werden. Immerhin wäre dabei nicht zu übersehen, dass Begründung sowohl als Funktionsform wesentlich verschieden sind.

Wir glauben, dass die Lösung vielmehr zu suchen ist in einer sinngerechten Modifikation der mechanischen Ausgleichung, deren Formeln ja bekanntlich im wesentlichen gewichtete arithmetische Mittel sind. Anderson [20] hat sich mit einer analogen Fragestellung befasst in bezug auf Wirtschafts-Zeitreihen, und es erscheint uns nicht abwegig, unsere Untersuchung dazu in Parallel zu setzen. Die Absterbeordnung nimmt nämlich insofern eine interessante Stellung ein, als sie im wesentlichen biologisch verursacht ist, aber doch nur bei Ordnung nach steigender Ordnungszahl sinnvoll dargestellt erscheint. Nach letzterer Eigenschaft wäre sie eine typische Zeitreihe. Anderson geht bei seinen Untersuchungen von der Annahme aus, dass ein jedes Glied der Zeitreihe eine zufällige Variable im strengen Sinne des Wortes ist, so dass es also verschiedene Werte mit verschiedener mathematischer Wahrscheinlichkeit annehmen kann. Als richtiger Wert des einzelnen Reihen-

gliedes wird seine mathematische Erwartung angesehen, d. h. das Ideal des arithmetischen Durchschnittes, der die zufälligen Einflüsse zu eliminieren hat. Anderson kommt zum Schluss, dass eine auf Sheppard zurückgehende mechanische Ausgleichung der Sachlage am besten gerecht werde. (Es handelt sich dabei einfach darum, dass nach einer Parabel n -ter Ordnung, $n \geq 1$, gemittelt wird, wobei die Ordnung je nach dem gewünschten Grad der Annäherung der empirischen an die ausgeglichene Reihe zu wählen ist. Auf die bezüglichen Ausgleichungsformeln, welche sich auch bei Blaschke [1], Seite 226 ff., vorfinden, werden wir noch ausführlicher zurückkommen.) Offensichtlich ist die Ausgangslage bei unserem Problem die gleiche wie bei den Überlegungen Andersons. Wenn wir trotzdem auf eine spezielle mechanische Ausgleichsformel hinzielen, so deshalb, weil man bei der Sterblichkeitskurve in bezug auf den Kurventrend im Gegensatz zu einer beliebigen Zeitreihe *a priori* einigermassen orientiert ist. In den bereits genannten Untersuchungen über die Beurteilung der Güte von Sterbetafel-Ausgleichungen auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage hat Ammeter [5] anhand praktischer Beispiele festgestellt, dass die analytische Ausgleichung nach Makeham unter Umständen bessere Resultate liefert als mechanische Ausgleichungen nach bekannten Formeln. Nachdem man aber auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis sozusagen zwangsläufig zur mechanischen Ausgleichung gelangt, ist zu vermuten, dass in den üblichen Formeln der mechanischen Ausgleichung, als arithmetische Mittel gedeutet, die Gewichte nicht glücklich gewählt sind. Zur Festlegung dieser Gewichte gelangt man bekanntlich, indem im wesentlichen die Ausgleichung nach einer Parabel nicht zu hohen Grades als Grundkurve vorgenommen wird. Hier nun möchten wir einsetzen, und anstelle der üblichen Parabel eine Makehamkurve treten lassen.

In diesem Zusammenhange ist an sehr interessante Meinungsäusserungen zu erinnern, welche Blaschke [1] Seite 240 ff. zum Problem der mechanischen Ausgleichung publiziert hat. Er weist darauf hin, dass durch die Abgrenzung eines bestimmten Bereiches und durch die Beschränkung auf jene Parabeln, welche sich in diesem Bereich nach einem bestimmten Prinzip mit Hilfe äquidistanter Punkte bilden lassen, eine gewisse Aufteilung der Gewichte, je nach ihrer Stellung zum Mittelwert, bewirkt wird. Zwangsläufig werden jenen Beobachtungswerten, welche bei der Parabelbildung öfter mitwirken, höhere

Gewichte zuerkannt, woraus folge, dass im mechanischen Ausgleichsprozess willkürliche Gewichte an die Stelle der beobachteten treten. Man habe versucht, die durch einfache Mittelbildung nach Parabeln resultierenden mechanischen Ausgleichsformeln durch Änderung des Gefälles der Koeffizienten, insbesondere im Sinne stärkerer Gewichtung der mittleren Werte, zu verbessern. Es sei aber klar, dass die besten Resultate der mechanischen Ausgleichung erhalten werden, wenn die für die Ausgleichung jedes einzelnen Bereiches herangezogene Kurve das gesuchte Kurvengesetz selbst sei. Dieser Forderung entspreche für die Absterbeordnung nahezu die Makehamsche Funktion, und man könnte daher die Frage aufwerfen, wie sich die mechanische Ausgleichung unter ihrer Verwendung gestalte. Die resultierende Formel erweise sich aber als überaus kompliziert. In diesem letzteren Punkte hat sich Blaschke jedoch getäuscht.

Das Ziel unserer Untersuchungen liegt somit fest. Wir legen aber Wert darauf, vorerst eine allgemeine Herleitung von mechanischen Ausgleichsformeln darzustellen, woraus sich die gesuchte Ausgleichsformel als Spezialfall ergeben wird.

II.

Zur Herleitung der mechanischen Ausgleichsformeln machen wir zunächst die vorstehend begründete Voraussetzung, dass den beobachteten relativen Häufigkeiten

$$\dots, y_{x-1}, y_x, y_{x+1}, \dots$$

des Eintretens oder Nichteintretens einer Reihe von Ereignissen wohlbestimmte Wahrscheinlichkeitswerte

$$\dots, y(x-1), y(x), y(x+1), \dots$$

zugrunde liegen. Von diesen letzteren nehmen wir weiter an, dass sie sich zumindest in gewissen Bereichen um jeden beliebig herausgegriffenen Wert x herum darstellen lassen durch eine analytische Funktion der Form

$$y(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

wobei die Parameter λ_k wertmässig noch nicht näher bekannt sein müssen. Die Funktionen $\varphi_k(x)$ sollen untereinander linear unabhängig sein. Wir bezeichnen die Funktion $y(x)$ kurz als «Grundfunktion».

Die beobachteten Werte y_x weichen von den Erwartungswerten $y(x)$ um gewisse Beträge ε_x ab, die wir «Beobachtungsfehler» benennen:

$$\varepsilon_x = y_x - y(x). \quad (2)$$

Wir suchen nun eine Ausgleichsoperation $A(y_x)$ für die beobachteten Werte y_x mit den folgenden Eigenschaften:

a) *Linearität*: Die Operation A soll linear sein, also die Form besitzen

$$A(y_x) = \sum_{(j)} a_j y_{x+j}. \quad (3)$$

b) *Erhaltung der Grundfunktion*: Die Operation A soll alle Funktionen, welche sich in der Form (1) mit beliebiger Wahl der Parameter λ_k darstellen lassen, invariant lassen, d. h. es soll gelten

$$A(y(x)) = y(x) \quad \text{für} \quad y(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x). \quad (4)$$

c) *Fehlerreduktion*: Die unausgeglichenen und die ausgeglichenen Werte sollen im Mittel möglichst wenig voneinander verschieden sein, d. h. es soll

$$\sum_{(x)} [y_x - A(y_x)]^2 \quad (5)$$

möglichst klein werden.

Um eine Ausgleichsoperation zu erhalten, welche diese drei Forderungen befriedigt, machen wir den folgenden Ansatz: Nach Voraussetzung sollen sich die erwartungsmässigen Werte darstellen lassen in der Form (1). Mittels ϱ Werten $x + j$, wobei $\varrho > m$ (\equiv Anzahl der Parameter λ_k in (1)), aber $\varrho \leq n$ (\equiv Anzahl der Beobachtungswerte y_x) sein möge, bilden wir die Summe der Differenzenquadrate

$$\sum_{(j)} [y_{x+j} - y(x+j)]^2. \quad (6)$$

Wir bestimmen nun die Parameter λ_k in (1) so, dass dieser Ausdruck zu einem Minimum wird. Dadurch ist uns eine wohlbestimmte Funktion $y^{(\text{Min})}(x)$ festgelegt, und als ausgeglichenen Wert $A(y_x)$ erklären wir den Wert

$$A(y_x) = y^{(\text{Min})}(x). \quad (7)$$

Wir bestimmen also den ausgeglichenen Wert $A(y_x)$ nach der bekannten Methode der kleinsten Quadrate, um die dritte Forderung zu erfüllen. Man vergleiche in diesem Zusammenhange die Ausführungen Czubers in seinem bekannten Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung [21].

Es ist nunmehr noch zu zeigen, dass auch die beiden anderen Forderungen erfüllt sind. Vorerst zeigen wir, dass die Forderung der Erhaltung der Grundfunktion erfüllt ist, und nehmen zu diesem Zwecke an, dass sich die auszugleichenden Werte y_x selber in der Form (1) darstellen lassen, also

$$y_x = \sum_{k=1}^m \lambda_k^0 \varphi_k(x). \quad (8)$$

Die Quadratsumme (6) nimmt in diesem Falle dann – und wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der $\varphi_k(x)$ nur dann – für alle beliebigen x den minimalen Betrag null an, wenn wir auch $y(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_k^0 \varphi_k(x)$ setzen. Nach unserer Definition von $A(y_x)$ wird nun aber $A(y_x) = y(x) = y_x$, was zu beweisen war.

Als zweites zeigen wir, dass unsere durch (7) definierte Ausgleichsoperation $A(y_x)$ linear ist, also auf die Form (3) gebracht werden kann. Dazu schreiben wir die Minimumbedingung (6) ausführlich als:

$$\sum_{(j)} \left[y_{x+j} - \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x+j) \right]^2 = \text{Min.} \quad (9)$$

Durch Ableiten nach den Parametern λ_r erhalten wir die notwendigen Minimumbedingungen

$$\sum_{(j)} \left[y_{x+j} - \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x+j) \right] \varphi_r(x+j) = 0, \quad (r = 1, \dots, m), \quad (10)$$

was wir einfacheitshalber wie folgt schreiben

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k A_{kr}(x) = \sum_{(j)} y_{x+j} \varphi_r(x+j). \quad (11)$$

Die Grösse $A_{kr}(x) = \sum_{(j)} \varphi_k(x+j) \varphi_r(x+j)$ hängt dabei nicht von den Werten y_x ab. Bezeichnet $D(x)$ die Determinante, welche aus den $A_{kr}(x)$ gebildet wird, so erhalten wir aus (11) die Parameter λ_p dadurch, dass wir in $D(x)$ die p -te Spalte durch die in (11) rechts stehenden Werte $\sum_{(j)} y_{x+j} \varphi_r(x+j)$ ersetzen und durch $D(x)$ dividieren. Es besitzt also λ_p die Form

$$\lambda_p = \sum_{(r,j)} y_{x+j} \varphi_r(x+j) B_{rp}(x), \quad (12)$$

ist also wieder linear in den Grössen y_x .

Setzen wir (12) in (7) ein, so erhalten wir nunmehr für $A(y_x)$ nach einer Umstellung der Summationsreihenfolge:

$$A(y_x) = \sum_{(j)} \left\{ \sum_{r=1}^m \left[\sum_{p=1}^m \varphi_p(x) B_{rp}(x) \right] \varphi_r(x+j) \right\} y_{x+j}. \quad (13)$$

Dieser Ausdruck ist tatsächlich linear in den Größen y_{x+j} , und die Werte der Koeffizienten a_j in (3) sind

$$a_j = \sum_{r=1}^m \left[\sum_{p=1}^m \varphi_p(x) B_{rp}(x) \right] \varphi_r(x+j). \quad (14)$$

Daraus ergibt sich als *Hauptsatz*:

Für jedes feste x bilden die Ausgleichskoeffizienten a_j in (3) auf Grund unserer Forderungen eine Folge, die nach dem Gesetze (1) der Grundfunktion gebildet ist.

Dieser Satz erlaubt bereits, eine charakteristische Eigenschaft unserer Ausgleichsoperation $A(y_x)$ anzugeben. Wenden wir nämlich A auf die Ausgleichskoeffizienten a_j selber an, bilden also $A(a_0)$, so muss diese Größe den Wert a_0 besitzen, weil ja alle Wertefolgen, welche der Grundfunktion (1) genügen, unverändert bleiben. Es gilt demnach die Beziehung

$$a_0 = \sum_{(j)} a_j^2. \quad (15)$$

Diese sich hier als einfache Folgerung ergebende Beziehung ist von Landré für den speziellen Fall der mechanischen Ausgleichung nach Parabeln hergeleitet worden [22], und er erwähnt sie in seinem bekannten Lehrbuch [23] als einen merkwürdigen Satz. An speziellen Beispielen hat Landré auch nachgewiesen, dass diese Beziehung charakteristisch ist dafür, dass $\sum_{(j)} a_j^2$ möglichst klein wird, dass es sich also um Ausgleichungen mit maximaler «Ausgleichungskraft» handelt. Schreibt man nämlich gem. (2) die beobachteten Werte y_x in der Form

$$y_x = y(x) + \varepsilon_x, \quad (16)$$

so wird nach (4) auf Grund der Linearität von A :

$$A(y_x) = A(y(x) + \varepsilon_x) = A(y(x)) + A(\varepsilon_x) = y(x) + A(\varepsilon_x). \quad (17)$$

Die Grösse $A(\varepsilon_x)$ gibt somit ein Mass für die Abweichung des ausgeglichenen Wertes vom erwarteten Wert $y(x)$. Auf Grund der Schwarzschen Ungleichung findet man die Abschätzung

$$[A(\varepsilon_x)]^2 = \left[\sum_{(j)} a_j \varepsilon_{x+j} \right]^2 \leq \left(\sum_{(j)} a_j^2 \right) \left(\sum_{(j)} \varepsilon_{x+j}^2 \right), \quad (18)$$

so dass also tatsächlich die ausgeglichenen Werte um so weniger von $y(x)$ abweichen, je kleiner $\sum_{(j)} a_j^2$ ist. Wir werden auf diesen Punkt noch zurückkommen.

Obwohl es theoretisch durchaus denkbar ist, Ausgleichsoperationen A zu definieren, bei denen die Koeffizienten a_j noch vom Index x des auszugleichenden Wertes abhängen, wird man sich aus praktischen Gründen auf die Verwendung solcher Operationen beschränken, bei denen dies nicht der Fall ist, bei denen also mit einem einzigen System von Ausgleichskoeffizienten a_j über den ganzen Bereich der x ausgeglichen wird. Diese Forderung der Konstanz der a_j ist nur für sehr spezielle Grundfunktionen (1) erfüllbar, und wir stellen uns nun die Aufgabe, alle jene Funktionen zu bestimmen, welche auf solche im eigentlichen Sinne mechanischen Ausgleichungen führen. Da wir die Funktionen $\varphi_k(x)$ in (1) als linear unabhängig vorausgesetzt haben, folgt aus der Bedingung (4), dass in diesem Falle durch unsere Ausgleichsoperation A jedes einzelne $\varphi_k(x)$ in sich selber übergeführt werden muss, und die Frage reduziert sich deshalb auf die Bestimmung aller möglichen linear unabhängigen Funktionen $\Phi(x)$, für welche eine Beziehung

$$\Phi(x) \equiv \sum_{(j)} \alpha_j \Phi(x + j) \quad (19)$$

mit konstanten α_j richtig sein kann.

Als erste Möglichkeit haben wir die m Funktionen $\Phi(x) = x^p$, mit $0 \leq p \leq m-1$, wobei $m =$ Anzahl der Koeffizienten α_j . Bilden wir nämlich $\sum_{(j)} \alpha_j (x + j)^p$, so finden wir, dass (19) auf die Bedingungsgleichung führt:

$$x^p = \sum_{(j)} \alpha_j (x + j)^p = \sum_{(k, j)} \alpha_j \binom{p}{k} x^{p-k} j^k. \quad (20)$$

Koeffizientenvergleich ergibt folgendes System von $p+1$ Bestimmungsgleichungen für die α_j :

$$\begin{cases} \sum \alpha_j = 1 \\ \sum \alpha_j j^k = 0, \quad \text{für } k = 1, \dots, p, \end{cases} \quad (21)$$

welches für $p \leq m-1$ immer lösbar ist.

Wir haben somit m linear unabhängige Funktionen x^p , ($p = 0, \dots, m-1$) gefunden, die unseren Forderungen genügen.

Als weitere Möglichkeit ziehen wir die Funktion $\Phi(x) = e^{\mu x}$ mit reellem oder komplexem μ in Betracht. Die Bedingungsgleichung (19) führt auf

$$e^{\mu x} = \sum_{(j)} \alpha_j e^{\mu(x+j)} = e^{\mu x} \sum_{(j)} \alpha_j e^{\mu j}, \quad (22)$$

so dass also nur

$$\sum_{(j)} \alpha_j e^{\mu j} = 1 \quad (23)$$

erfüllt zu sein braucht, damit (19) befriedigt ist. So ergibt sich hier eine ganze einparametrische Schar von Funktionen zu den m Funktionen x^p hinzu, welche für unsere Zwecke in Betracht kommen können. Die Reihenentwicklung von $\Phi(x+j)$ in der Form

$$\Phi(x+j) = \Phi(x) + \frac{j}{1!} \Phi'(x) + \frac{j^2}{2!} \Phi''(x) + \dots \quad (24)$$

zeigt, dass damit im Bereich der analytischen Funktionen keine weiteren linear unabhängigen Funktionen mehr gebildet werden können, welche (19) befriedigen. Als allgemeinste Funktion, die zu einer mechanischen Ausgleichsoperation A mit von x unabhängigen Koeffizienten führt, haben wir daher die Linearkombination

$$y(x) = \sum_{p=0}^{m-1} \lambda_p x^p + \sum_{r=1}^R \lambda_r^* e^{\mu r x} \quad (25)$$

in Betracht zu ziehen, wobei R eine beliebig grosse Zahl sein kann. Ob es tatsächlich möglich ist, zu jeder dieser Funktionen auch eine Ausgleichsoperation $A(y_x)$ zu bestimmen, kann mit Hilfe des vorgängig ausgesprochenen Hauptsatzes entschieden werden, nach welchem die Koeffizienten a_j selber die Gestalt (25) haben müssen. Machen wir den Ansatz

$$a_j = \sum_{p=0}^{m-1} A_p j^p + \sum_{r=1}^R A_r^* e^{\mu r j} = y(j), \quad (26)$$

so führt die Invarianzbedingung (4) auf

$$\sum_{p=0}^{m-1} \lambda_p x^p + \sum_{r=1}^R \lambda_r^* e^{\mu r x} = \sum_{(j)} \left\{ \sum_{p'=0}^{m-1} A_{p'} j^{p'} + \sum_{r'=1}^R A_{r'}^* e^{\mu r' j} \right\} \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} \lambda_p (x+j)^p + \sum_{r=1}^R \lambda_r^* e^{\mu r (x+j)} \right\}.$$

Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite dieser Gleichung erhalten wir neben einem konstanten Glied solche, welche die Potenzen x , $x^2, \dots x^{m-1}$, und solche, welche die Exponentialfunktionen $e^{\mu_1 x}, \dots e^{\mu_R x}$ enthalten. Die Koeffizienten dieser Größen müssen links und rechts dieselben sein, also folgt speziell aus dem Vergleich der Koeffizienten von x^{m-1} , dass

$$\sum_{(j)} a_j = 1 = \sum_{(j)} \left[\sum_{p'=0}^{m-1} A_{p'} j^{p'} + \sum_{r'=1}^R A_{r'}^* e^{\mu r' j} \right] \quad (28)$$

sein muss. Gehen wir der Reihe nach zu den Potenzen $x^{m-2}, x^{m-3}, \dots x^0$ über, so folgen sukzessive die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{(j)} a_j j = 0 &= \sum_{(j)} \left[\sum_{p'=0}^{m-1} A_{p'} j^{p'+1} + \sum_{r'=1}^R A_{r'}^* j e^{\mu r' j} \right] \\ \dots &\quad \dots \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\sum_{(j)} a_j j^{m-1} = 0 = \sum_{(j)} \left[\sum_{p'=0}^{m-1} A_{p'} j^{p'+m-1} + \sum_{r'=1}^R A_{r'}^* j^{m-1} e^{\mu r' j} \right].$$

Ein Vergleich der Koeffizienten von $e^{\mu r x}$ ergibt schliesslich noch die R weiteren Gleichungen

$$\sum_{(j)} a_j e^{\mu r j} = 1 = \sum_{(j)} \left[\sum_{p'=0}^{m-1} A_{p'} j^{p'} e^{\mu r j} + \sum_{r'=1}^R A_{r'}^* e^{(\mu r' + \mu_r) j} \right], \quad (30)$$

$$(r = 1, \dots, R).$$

In den Gleichungen (28), (29), (30) haben wir ein System von $m + R$ linearen Gleichungen gefunden, das gerade die $m + R$ Parameter A_p und A_r^* zu bestimmen gestattet. Dabei ist zu beachten, dass die Anzahl der a_j grösser als die Zahl $m + R$ sein muss, damit nicht $a_0 = 1$, $a_j = 0$ für $j \neq 0$, die einzige mögliche Lösung unseres Gleichungssystems wird. Diese letztere bedeutet natürlich diejenige Ausgleichung, bei der die ausgeglichenen mit den unausgeglichenen Werten übereinstimmen, und die stets dann auftritt, wenn die Anzahl der Parameter grösser oder gleich ist wie die Anzahl der in der Minimumsbedingung (9) verwendeten Punkte y_{x+j} . Wenn schon einerseits die Zahl der auszugleichenden Werte grösser als $m + R$ sein muss, so wird man anderseits die Ausgleichsbereiche nicht unnötig weit fassen. Blaschke [1] (Seite 243) bezeichnet jene Ausgleichsformel, welche erhalten wird, wenn die Zahl der zur Ausgleichung herangezogenen Werte die Zahl der Parameter der Grundfunktion nur um eine Einheit überschreitet, als eine Ausgleichung kleinsten Zwanges.

Wir können mithin das Ergebnis der bisherigen Untersuchungen folgendermassen zusammenfassen: Zu jeder $m + R$ -parametrischen Funktionenschar (25) und zu jeder vorgegebenen Anzahl $\varrho > m + R$ lässt sich auf Grund der Minimumsbedingung (9) genau eine lineare Ausgleichsoperation $A(y_x)$ mit ϱ konstanten (d. h. von x unabhängigen) Koeffizienten a_j bestimmen, welche alle Funktionen der Schar invariant lässt.

Bis jetzt haben wir nichts genaueres bezüglich der Werte j ausgesagt, über welche in der allgemeinen Ausgleichsformel (3) zu summieren ist. Im Prinzip können diese ganz beliebig gewählt werden, sofern nur die Werte $x + j$ gewisse Indizes ergeben, die im auszugleichenden Material enthalten sind. So wird man zwar in der Regel Ausgleichsformeln zu verwenden suchen, deren Indizes symmetrisch bezüglich des auszugleichenden Wertes gelagert sind, man wird also j die Werte $-r, -r+1, \dots, 0, \dots, r-1, r$ durchlaufen lassen. Aber nichts hindert daran, insbesondere zur Ausgleichung von Randwerten auch vollständig asymmetrisch gebaute Formeln zu verwenden. Es braucht nicht, wie bei den symmetrisch gebauten Formeln, die Zahl der zu mittelnden Werte ungerade zu sein. So ist es z. B. möglich, auf mechanischem Wege eine nach dem gewohnten Minimumsprinzip ausgegliche n -gliedrige Tafel zu erhalten, indem man die Anzahl der Glieder in (3) gleich der Anzahl der auszugleichenden Werte y_j wählt und die Ausgleichskoeffizienten a_j der Reihe nach so bestimmt, dass sich sukzessive die ausgeglichenen Werte $A(y_1), \dots, A(y_n)$ ergeben. Dies würde allerdings zuerst die Bestimmung von n Koeffizientensystemen erfordern, so dass die direkte Minimumbestimmung und die nachherige analytische Berechnung der ausgeglichenen Werte rascher zum Ziele führt. Auch lässt sich – wenn auch nur in beschränktem Masse – auf mechanischem Wege eine Extrapolation der auszugleichenden Wertereihe vornehmen, indem man beispielsweise einfach $j = -r_1, -r_1+1, \dots, -r_2$ mit $r_1 > r_2 > 0$ setzt.

Mit der Ausgleichung kann zugleich eine Interpolation verbunden werden. Im häufig vorkommenden Falle, dass die unausgeglichenen einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Alter $x + \frac{1}{2}$ statt für die ganzzahligen Alter x gegeben sind, interpoliert man bzw. gleicht man aus vermittels einer Formel, die man erhält, indem man $j = \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm (r + \frac{1}{2})$ setzt. Allerdings wird es kaum möglich sein, die Güte einer auf diesem Wege gewonnenen Ausgleichung direkt nachzuprüfen.

III.

Wir wollen nach den vorstehenden theoretischen Untersuchungen nun in einem mehr auf die Praxis ausgerichteten Teil einige Beispiele von Ausgleichsformeln geben, die aus dem allgemeinen Ansatz (25) hervorgehen. Setzen wir speziell die Größen $\lambda_r^* = 0$, so ergeben sich diejenigen Ausgleichsoperationen, welche Parabeln einer gewünschten Ordnung invariant lassen. In diesem Zusammenhange beweist man sehr leicht folgenden bekannten Satz: Lässt eine symmetrische Ausgleichsoperation $A(y_x)$ die Werte aller Parabeln der Ordnung $2s$ unverändert, so lässt sie auch die Werte der Parabeln von der Ordnung $2s+1$ unverändert.

Beweis: Sind die Koeffizienten a_j symmetrisch, d. h. ist $a_j = a_{-j}$, so wird identisch für alle ganzzahligen t

$$\sum_{j=-r}^r a_j j^{2t+1} \equiv 0, \quad (31)$$

so dass das Gleichungssystem (29) ohne weiteres für $m = 2k+2$ richtig ist, wenn es nur für $m = 2k+1$ gilt, was zu beweisen war.

Der einfachste Spezialfall liegt vor, wenn wir die Invarianz einer Geraden fordern. Dies führt, falls wir j die Werte $-r \leq j \leq r$ annehmen lassen, auf Grund der beiden Gleichungen (28) und (29), welche hier die Form haben

$$1 = (2r+1) A_0; \quad 0 = \left(\sum_{j=-r}^r j^2 \right) A_1 \quad (32)$$

sofort auf $A_0 = \frac{1}{2r+1}$ und $A_1 = 0$, so dass nach (26) gilt

$$a_j = \frac{1}{2r+1}. \quad (33)$$

Wir haben also den Fall der einfachen arithmetischen Mittelbildung.

Für die numerische Bestimmung der Koeffizienten a_j erweist sich die Methode des Koeffizientenvergleichs, in Anwendung des Hauptsatzes, als besonders praktisch. Nach dem Hauptsatz haben die Koeffizienten a_j die gleiche Bauart, wie die Grundfunktion, so dass wir gem. Beziehung (19), wenn wir $\Phi(x) = y(x)$ setzen, haben

$$y(x) = \sum_{(j)} a_j y(x+j) \quad (34)$$

wobei a_j als Funktion von j von gleicher Form ist wie $y(x)$ bezüglich x .

Im speziellen Falle der Geraden als Grundfunktion ist beispielsweise

$$\begin{aligned}\alpha + \beta x &= \sum_{(j)} (A + Bj) (\alpha + \beta (x + j)) \\ &= (\alpha + \beta x) \sum (A + Bj) + \beta \sum (Aj + Bj^2).\end{aligned}\quad (35)$$

Es muss demnach $\sum (A + Bj) = 1$, $\sum (Aj + Bj^2) = 0$ sein. Bedenken wir noch, dass wenn j symmetrisch die Werte $-r \leq j \leq r$ annehmen soll, die Anzahl der j gleich $2r + 1$, und $\sum j = 0$ ist, so gilt

$$A(2r + 1) = 1, \quad B \sum j^2 = 0 \quad (36)$$

woraus, weil $\sum j^2 \neq 0$, folgt, $B = 0$ und $A = \frac{1}{2r + 1}$, das heisst:

$$a_j = A + Bj = \frac{1}{2r + 1}.$$

Fordern wir dagegen die Invarianz von Parabeln zweiter (und damit auch dritter) Ordnung, so ergibt sich, wenn wir wieder $-r \leq j \leq r$ wählen, in analogen Berechnungen

$$a_j = \frac{9(r^2 + r) - 3 - 15j^2}{(2r + 1)(2r - 1)(2r + 3)}, \quad (37)$$

also z. B. für

$$r = 2: \quad a_j = \frac{17 - 5j^2}{35},$$

$$\text{somit } a_0 = \frac{17}{35}, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{12}{35}, \quad a_2 = a_{-2} = -\frac{3}{35};$$

$$r = 3: \quad a_j = \frac{7 - j^2}{21},$$

$$\text{somit } a_0 = \frac{7}{21}, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{6}{21}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{3}{21}, \quad a_3 = a_{-3} = -\frac{2}{21};$$

$$r = 4: \quad a_j = \frac{59 - 5j^2}{231}$$

$$\text{somit } a_0 = \frac{59}{231}, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{54}{231}, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{39}{231}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{14}{231}, \quad a_4 = a_{-4} = -\frac{21}{231}.$$

Wir wollen hier die Frage der Ausgleichung nach Parabeln nicht im Detail weiter verfolgen, es wurde darüber von anderer Seite genügend publiziert, und wir verweisen z. B. auf die genannte Schrift von Anderson [20], Seite 120 ff., sowie auf ein vom gleichen Autor kürzlich veröffentlichtes Lehrbuch [24], dann auf das Buch von Blaschke [1], Seite 226 ff., und auf einen Aufsatz von Koeppeler [25].

Dagegen erscheint uns ein anderer Hinweis erwähnenswert. Lassen wir in (25) komplexe Werte für die Konstanten λ_p , λ_r^* und μ_r zu, so ergeben sich im einfachsten Falle, wenn wir nur den Realteil hinschreiben, Ansätze von der Form

$$y(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin \mu x + \lambda_2 \cos \mu x, \quad (38)$$

welche unter Umständen zur mechanischen Ausgleichung von quasi-periodischen Funktionen (z. B. Schwingungen mit veränderlicher Amplitude) nützlich sein können, sofern die Länge einer Periode und damit μ wenigstens angenähert bekannt ist.

Die bisherigen Ausführungen zur mechanischen Ausgleichung sind – abgesehen von speziellen Hinweisen – nicht nur für die Ausgleichung von Reihen einjähriger Sterbenswahrscheinlichkeiten von Bedeutung. Wenn wir uns nun insbesondere der Betrachtung letzterer zuwenden, so kommen in (25) nur reelle Konstanten in Frage, und wenn wir $y(x) = q_x$, $e^{\mu r} = c_r$ setzen, so umfasst die Linearkombination

$$q_x = \sum_{(p)} \lambda_p x^p + \sum_{r=1}^R \lambda_r^* c_r^x \quad (39)$$

eine Grosszahl der bekannten «Sterbegesetze», z. B.:

$$\lambda_r^* \equiv 0$$

$$\lambda_p = 0 \quad \text{für } p > 0 : q_x = \lambda_0 = \text{konst.} \quad (\text{Dormoy I})$$

$$\lambda_p = 0 \quad \Rightarrow \quad p > 1 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1 x \quad (\text{Dormoy II})$$

$$\lambda_p = 0 \quad \Rightarrow \quad p > 2 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \quad (\text{Quiquet II, 2}) [26]$$

$$\lambda_r^* = 0 \text{ für } r > 1$$

$$\lambda_p \equiv 0 \quad : q_x = \lambda_1^* c^x \quad (\text{Gomperz})$$

$$\lambda_p = 0 \text{ für } p > 0 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1^* c^x \quad (\text{Makeham I})$$

$$\lambda_p = 0 \quad \Rightarrow \quad p > 1 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_1^* c^x \quad (\text{Makeham III})$$

$\lambda_p = 0 \Rightarrow p > 2 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_1^* c^x$ (Vermeeren) [27]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

$$\lambda_x^* = 0 \text{ für } r > 2$$

$$\lambda_p \equiv 0 : q_x = \lambda_1^* c_1^x + \lambda_2^* c_2^x \quad (\text{Rosmanith}) [28]$$

$$\lambda_p = 0 \text{ für } p > 0 : q_x = \lambda_0 + \lambda_1^* c_1^x + \lambda_2^* c_2^x \quad (\text{Lazarus})$$

usw.

Aus guten Gründen beschränken wir uns bei diesen Möglichkeiten für die Wahl einer Grundfunktion auf Makeham I. Es sei also

$$y(x) = \lambda_0 + \lambda_1^* c^x. \quad (40)$$

Die Konstante c muss fest gewählt werden, und die gesuchte Ausgleichsoperation lässt dann alle Makehamkurven mit diesem vorgegebenen c invariant. Setzen wir, nach der Methode des Koeffizientenvergleichs, zur Bestimmung der a_j

$$\lambda_0 + \lambda_1^* c^x = \sum_{(j)} (\Lambda_0 + \Lambda_1^* c^j) (\lambda_0 + \lambda_1^* c^{x+j}) \quad (41)$$

so folgt, wenn wir die Anzahl der a_j mit ϱ bezeichnen, dass

$$\begin{aligned} \Lambda_0 \varrho + \Lambda_1^* \sum c^j &= 1, \\ \Lambda_0 \sum c^j + \Lambda_1^* \sum c^{2j} &= 1 \end{aligned}$$

sein muss, woraus sich Λ_0 und Λ_1^* und damit $a_j = \Lambda_0 + \Lambda_1^* c^j$ leicht bestimmen lassen. Soll j in symmetrischer Weise die Werte $-r \leq j \leq r$ durchlaufen, so ist $\varrho = 2r + 1$ und

$$a_j = \frac{(\sum c^{2j} - \sum c^j) + c^j ((2r + 1) - \sum c^j)}{(2r + 1) \sum c^{2j} - (\sum c^j)^2}. \quad (42)$$

Die Koeffizienten a_j sind hier natürlich irrational, und im Gegensatz zur Ausgleichung nach Parabeln ist $a_j \neq a_{-j}$. Für den Ansatz $c = 1,1$ sind in Tabelle I hiernach die Werte a_j für $r = 2, 3, 4, 5$ und 6 aufgeführt.

Es ist unseres Wissens erstmalig, dass zur mechanischen Ausgleichung von Sterbetafeln eine in den Koeffizienten unsymmetrische Formel vorgeschlagen und praktisch zur Anwendung gebracht wird. Die Idee, als Grundfunktion statt Parabeln die Makeham-Funktion zu verwenden, wurde zwar von andern Autoren schon angetönt, so z. B. wie bereits gesagt, von Blaschke [1] (Seite 243), und von Altenburger [29] (S. 50), aber als ungeeignet verworfen. Altenburger meint

sogar, es würde sich dabei nicht um eigentliche mechanische Ausgleichung handeln, da die Koeffizienten a_j bei gewähltem r nicht ein für allemal feststehen, sondern von dem für die auszugleichende Tafel in Frage kommenden Werte c abhängen. Dieser Einwand ist uns nicht verständlich. Es ist nicht einzusehen, warum die Koeffizienten einer mechanischen Ausgleichung nicht von Fall zu Fall den speziellen Verhältnissen sollen angepasst werden können, wenn damit eine Verbesserung des Resultats erreicht wird. Sodann ist aber darauf hinzuweisen, dass bei modernen Sterbetafeln weitgehend $c \sim 1,1$ ist, so dass man gegenwärtig unbedenklich $c = 1,1$ setzen darf. Denn die Koeffizienten a_j ändern bei geringer Variation von c auch nur so wenig, dass es für das Resultat der Ausgleichung praktisch ohne Bedeutung ist, worüber Tabelle II hiernach orientiert. Will man aber für eine unausgeglichene q_x -Reihe einen genaueren Wert für c bestimmen, sei es, um denselben der Ausgleichung zugrunde zu legen, oder um nachzuprüfen, ob er nicht zu stark vom Ansatz $c = 1,1$ verschieden ist, so geschieht dies sehr einfach nach der von Landré [23] angegebenen Methode:

Ist

$$y_x = \lambda_0 + \lambda_1^* c^x$$

und setzt man

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_{x+j} = A, \quad \sum_{j=n}^{2n-1} y_{x+j} = B, \quad \sum_{j=2n}^{3n-1} y_{x+j} = C,$$

$$B - A = A_1, \quad C - B = B_1,$$

so ist

$$c^n = \frac{B_1}{A_1}, \quad \text{d. h.} \quad \lg c = \frac{\lg B_1 - \lg A_1}{n}.$$

In analoger Weise kann man c bestimmen, wenn man als Grundfunktion die zweite Formel von Makeham oder jene von Vermeeren wählt.

In letzterem Falle ist

$$y_x = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_1^* c^x,$$

und setzt man

$$\sum_{(j)} y_{x+j} = \begin{cases} A & \text{für } 0 \leq j \leq n-1 \\ B & \text{» } n \leq j \leq 2n-1 \\ C & \text{» } 2n \leq j \leq 3n-1 \\ D & \text{» } 3n \leq j \leq 4n-1 \\ E & \text{» } 4n \leq j \leq 5n-1 \end{cases}$$

$$B - A = A_1, \quad C - B = B_1, \quad D - C = C_1, \quad E - D = D_1,$$

$$B_1 - A_1 = A_2, \quad C_1 - B_1 = B_2, \quad D_1 - C_1 = C_2,$$

$$B_2 - A_2 = A_3, \quad C_2 - B_2 = B_3,$$

so folgt

$$c^n = \frac{B_3}{A_3} \quad \text{und} \quad \lg c = \frac{\lg B_3 - \lg A_3}{n}.$$

Die mechanische Ausgleichung nach einer makehamschen Grundfunktion bietet also keinerlei Schwierigkeiten, sie ist im Gegenteil äusserst einfach zu handhaben. Bleibt noch die Frage der Güte einer solchen Ausgleichung. Es ist klar, dass sie nur soweit besondere Vorteile haben kann, als die Reihe der empirischen q_x deutlich steigende Tendenz zeigt. Es steht aber nichts dagegen, sich für gewisse Bereiche, z. B. für den «Tuberkulosebuckel», auf eine andere Grundfunktion zu stützen.

Verschiedene Autoren, so z. B. Landré [22], Altenburger [29] und Perutz [30] (in einer sehr lesenswerten Abhandlung) bezeichnen die Grösse $\sum a_j^2$ als «Mass der Ausgleichskraft» der Operation $A(y_x)$. Dies liegt darin begründet, dass die bereits genannte Beziehung gilt

$$[A(\varepsilon_x)]^2 \leq \left(\sum_{(j)} a_j^2 \right) \left(\sum_{(j)} \varepsilon_{x+j}^2 \right).$$

D. h. unter allen denjenigen Ausgleichsoperationen A , welche eine gegebene Grundfunktion invariant lassen und eine vorgegebene Anzahl von Koeffizienten besitzen, hat jene die grösste «Ausgleichskraft», für welche $[A(\varepsilon_x)]^2$ im Mittel am kleinsten wird, also $\sum a_j^2$ ein Minimum ist. Dieser Aussage kommt praktisch jedoch nur beschränkte Bedeutung zu, weil sie sich nur auf die auszugleichenden Werte selber bezieht und nicht auch auf ihre Differenzen, während man in Praxi von einer «guten» Ausgleichung meistens verlangt, dass die letzteren bis etwa zur zweiten Ordnung ebenfalls einen regelmässigen Verlauf aufweisen. Um einen solchen regelmässigen Verlauf der Differenzen zu erreichen, verwendet man statt der aus dem Minimumprinzip gewöhnlichen Formeln solche, die man sich zumeist als durch mannigfache Iterationsprozesse aus ihnen hervorgegangen denken kann. Wir verweisen in diesem Zusammenhange auf Ausführungen bei Blaschke [1] (S. 229) und Altenburger [29] (S. 59 ff.). Theoretisch ist leicht zu überblicken, wie sich die einzelnen Ausgleichsoperationen in bezug auf die

Beobachtungsfehler ε_x (vgl. (2)) und deren Einfluss auf die Differenzenfolgen der ausgeglichenen Werte $\bar{y}_x = A(y_x)$ verhalten. Bilden wir nämlich die Folgen der ersten, zweiten, dritten usw. Differenzen der \bar{y}_x , so erhalten wir, wenn wir für $j > r$ und $j < -r$ die Größen a_j durch $a_j \equiv 0$ definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}\bar{y}_x &= \bar{y}_{x+1} - \bar{y}_x = A(y(x+1) + \varepsilon_{x+1}) - A(y(x) + \varepsilon_x) = \\ &= y(x+1) - y(x) + \sum_{j=-r}^r a_j \varepsilon_{x+1+j} - \sum_{j=-r}^r a_j \varepsilon_{x+j} = \\ &= \mathcal{A}^{(1)}y(x) - \sum_{j=-r}^r (a_j - a_{j-1}) \varepsilon_{x+j} = \mathcal{A}^{(1)}y(x) - \sum_{j=-r}^{r+1} \mathcal{A}^{(1)}a_{j-1} \varepsilon_{x+j}, \end{aligned}$$

und ganz entsprechend für die Differenzen höherer Ordnung, so dass sich die nachstehenden Differenzenfolgen ergeben:

$$\begin{aligned}\bar{y}_x &= y(x) + \sum_{j=-r}^r a_j \varepsilon_{x+j}, \\ \varDelta^{(1)} \bar{y}_x &= \varDelta^{(1)} y(x) - \sum_{j=-r}^{r+1} \varDelta^{(1)} a_{j-1} \varepsilon_{x+j}, \\ \varDelta^{(2)} \bar{y}_x &= \varDelta^{(2)} y(x) + \sum_{j=-r}^{r+2} \varDelta^{(2)} a_{j-2} \varepsilon_{x+j}, \\ &\dots \\ \varDelta^{(l)} \bar{y}_x &= \varDelta^{(l)} y(x) + (-1)^l \sum_{j=-r}^{r+l} \varDelta^{(l)} a_{j-l} \varepsilon_{x+j}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Daraus folgen auf Grund der Schwarzschen Ungleichung sofort die Abschätzungen über die Auswirkung der Beobachtungsfehler in der l -ten Differenz der ausgeglichenen Reihe:

$$[\Delta^{(l)} A(\varepsilon_x)]^2 \leq \left[\sum_{j=-r}^{r+l} (\Delta^{(l)} a_{j-l})^2 \right] \left[\sum_{j=-r}^{r+l} \varepsilon_{x+j}^2 \right].$$

Betrachten wir nun als Beispiel die Ausgleichskoeffizienten, wie wir sie auf Grund des Minimumprinzips für $r = 6$ erhalten, so dass also die Ausgleichsformel 13 Glieder besitzt (Typus $\frac{1}{13}$). Eine Ausgleichsformel mit ebenfalls 13 Gliedern erhalten wir, wenn wir die nach unserer Methode bestimmte siebengliedrige Formel einmal iterieren (Typus $\frac{1}{7} \mid \frac{1}{7}$), oder die entsprechende 5gliedrige Formel zweimal iterieren (Typus $\frac{1}{5} \mid \frac{1}{5} \mid \frac{1}{5}$). Berechnen wir die Quadratsummen der $\Delta^{(i)} a_j$,

für jeden dieser Fälle und multiplizieren wir sie mit der Zahl der Summanden, so ergibt sich folgendes Bild:

Grundfunktion und Typ	$13 \cdot \sum a_j^2$	$14 \cdot \sum (\Delta^{(1)} a_j)^2$	$15 \cdot \sum (\Delta^{(2)} a_j)^2$	$16 \cdot \sum (\Delta^{(3)} a_j)^2$	$17 \cdot \sum (\Delta^{(4)} a_j)^2$
Gerade, $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{7} \frac{1}{7}$ $\frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$	1 1,251 1,457	0,166 0,082 0,116	0,355 0,037 0,029	0,080 0,020 0,044	
Makeham I, $\frac{1}{13}$ $c = 1,1$ $\frac{1}{7} \frac{1}{7}$ $\frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$	1,030 1,262 1,463	0,165 0,083 0,118	0,347 0,038 0,029	0,077 0,021 0,043	
Parabel 2. Ordnung, $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{7} \frac{1}{7}$ $\frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$	2,273 3,454 4,615	0,557 1,060 2,355	0,920 0,790 2,492	1,083	
Makeham II, $\frac{1}{13}$ $c = 1,1$ $\frac{1}{7} \frac{1}{7}$ $\frac{1}{5} \frac{1}{5} \frac{1}{5}$	2,238 3,429 4,596	0,553 1,046 2,337	0,927 0,779 2,470	1,071	

Auf den ersten Blick erkennt man, dass in bezug auf die Fehlerglättung die Ausgleichung mit einer einfachen Makehamkurve als Grundfunktion praktisch gleichwertig ist mit jener nach einer Geraden, und dass die Ausgleichung nach Makeham II als Grundfunktion gleichwertig ist mit jener nach einer Parabel 2. Ordnung, wobei letztere beiden eine wesentlich schwächere Fehlerebnung bewirken. Besonders auffallend ist sodann, wie wenig der Einfluss der Beobachtungsfehler ε_x bei den iterierten Ausgleichungen nach Makeham I und nach einer Geraden in den Differenzen erster bis dritter Ordnung zur Auswirkung kommt. Bei den Ausgleichungen mit Makeham II oder Parabel 2. Ordnung als Grundfunktion scheint eine zu oft wiederholte Iteration in dieser Hinsicht nicht immer von Vorteil zu sein, indem z. B. die Abweichungen bei der zweimal iterierten 13gliedrigen Formel bereits in den

zweiten Differenzen wieder stärker zur Auswirkung kommen können als in den ersten, so dass ein glatter Verlauf der zweiten Differenzenfolgen keineswegs garantiert ist und eher noch bei der nur einmal iterierten Formel erwartet werden kann. Es ist jedoch auch bei den auf Basis der einfachen Makehamfunktion bzw. einer Geraden bestimmten Formeln zu bedenken, dass man bei wiederholter Iteration ein Ergebnis erhält, das vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus betrachtet ungünstiger sein wird, da man bei wiederholter Ausgleichung nicht etwa zu einer Grenzfunktion gelangt, für welche das Minimumsprinzip erfüllt ist, was man am einfachsten anhand eines Beispiels zeigen kann. Die beiden Begriffe «Fehlerglättung» und «getreue Wiedergabe» schliessen einander also bis zu einem gewissen Grade aus (vgl. das eingangs erwähnte Zitat von Tschuprow), und es wird stets eine Ermessensfrage bleiben, welchem von beiden man im konkreten Fall den Vorrang geben will.

Die Tatsache, dass man zur Erzielung einer genügenden Fehlerglättung in den meisten Fällen eine iterierte Formel wird verwenden müssen, vermindert den Wert unserer auf Grund des Minimumsprinzips aufgestellten Ausgleichsformeln keineswegs, im Gegenteil. Je mehr sich die Reihe der \bar{y}_x auf Grund der ersten Ausgleichung dem Verlauf der Grundfunktion anschmiegt, um so weniger wird sie sich bei der zweiten Ausgleichung noch verändern, da ja die Grundfunktion invariant bleibt, und um so weniger wird also auch das Minimumsprinzip verletzt werden.

Aus diesen Überlegungen geht aber auch hervor, wie wichtig es ist, dass die Grundfunktion glücklich gewählt wird. Ob dies der Fall ist, kann im Sinne der Konzeption unserer Arbeit nur durch einen Test auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Basis entschieden werden. Nur durch Vergleich der Testergebnisse für verschiedene Methoden oder Formeln der Ausgleichung erhalten wir ein Kriterium über die «Güte einer Ausgleichung».

Auf einen Punkt ist noch hinzuweisen. Die Ausgleichung wird an den Sterbehäufigkeiten, d. h. an Relativzahlen vollzogen, so dass keine Beobachtungsgewichte berücksichtigt werden. Man kann zwar annehmen, dass die in einer Ausgleichsformel zusammengefassten ϱ Beobachtungswerte näherungsweise gleiches Beobachtungsgewicht haben, so dass die Gewichtsunterschiede vernachlässigt werden können. Diese Annahme wird um so eher zutreffen, je kleiner die Gliederzahl

der Ausgleichsformel ist. Anderseits wird jedoch die Möglichkeit der Fehlerebnung beeinträchtigt, wenn die Mittelbildung der Ausgleichsformel sich nur auf ganz wenige Werte bezieht. Wir stehen mithin auch hier vor Ermessensfragen.

Abgesehen von den einzelnen Ermessensfragen glauben wir mit der vorgeschlagenen mechanischen Ausgleichsformel dem Praktiker ein Instrument von grosser Einfachheit und zugleich hoher Leistungsfähigkeit in die Hand zu geben. Wir haben zu Illustrationszwecken zwei Ausgleichungen vorgenommen. Als erstes Beispiel haben wir die Tafel SM 1939/44 gewählt, wobei wir die rohen Sterbenswahrscheinlichkeiten der bezüglichen Publikation des Eidgenössischen Statistischen Amtes [31] entnahmen. Die Ausgleichung wurde vorerst für den Bereich $x = 7$ bis $x = 90$ durchgeführt, auf Basis der 13gliedrigen Formel Typus $\frac{1}{7} | \frac{1}{7}$ mit Makeham-Grundfunktion. Auf Grund der Konstanten a_j der Kolonne $r = 3$ in Tabelle I ergeben sich für die benützte Formel die folgenden Konstanten:

$$\begin{aligned}
 a'_{-6} &= a^2_{-3} & = 0.02608 & \quad a'_0 = \sum_{-3}^3 a_j a_{-j} & = 0.14160 \\
 a'_{-5} &= 2a_{-3} a_{-2} & = 0.05047 & \quad a'_1 = \sum_{-2}^3 a_j a_{1-j} & = 0.11632 \\
 a'_{-4} &= 2a_{-3} a_{-1} + a^2_{-2} & = 0.07302 & \quad a'_2 = \sum_{-1}^3 a_j a_{2-j} & = 0.09255 \\
 a'_{-3} &= \sum_{-3}^0 a_j a_{-j-3} & = 0.09358 & \quad a'_3 = \sum_0^3 a_j a_{3-j} & = 0.07040 \\
 a'_{-2} &= \sum_{-3}^1 a_j a_{-j-2} & = 0.11198 & \quad a'_4 = 2a_1 a_3 + a^2_2 & = 0.04996 \\
 a'_{-1} &= \sum_{-3}^2 a_j a_{-j-1} & = 0.12805 & \quad a'_5 = 2a_2 a_3 & = 0.03134 \\
 & & & a'_6 = a^2_3 & = 0.01465
 \end{aligned}$$

Wie zu erwarten war und durch die nachstehend aufgeführten Testergebnisse bestätigt wird, liefert die Ausgleichung mit dieser Formel und für den Tafelbereich von etwa $x = 30$ an aufwärts, d. h. für den monoton steigenden Teil ein wirklich gutes Resultat. Für die jüngeren Alter muss man wegen des «Tuberkulosebuckels» eine andere Grundfunktion wählen, wofür eine Parabel niedriger Ordnung in Frage

kommen kann. Wir wählten jedoch versuchsweise, um bei einer zu der im oberen Tafelteil benutzten Grundfunktion verwandten Funktion zu bleiben, als Grundfunktion für die Ausgleichung des Bereiches $x = 7$ bis $x = 34$ die Funktion Makeham II, also

$$y(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_1^* c^x, \quad \text{mit } c = 1,1.$$

Nach vorgängig beschriebener Methode ergeben sich für die 7gliedrige Formel ($r = 3$) die Konstanten

$a_{-3} = -0,08533$	$a_1 = 0,29402$
$a_{-2} = 0,13426$	$a_0 = 0,33211$
$a_{-1} = 0,27600$	$a_2 = 0,15231$
	$a_3 = -0,10387$

und daraus durch Iterierung für die 13gliedrige Formel (Typus $\frac{1}{7} | \frac{1}{7}$)

$a_{-6} = 0,00728$	$a_1 = 0,25161$
$a_{-5} = -0,02291$	$a_2 = 0,13055$
$a_{-4} = -0,02907$	$a_3 = 0,02090$
$a_{-3} = 0,01743$	$a_4 = -0,03759$
$a_{-2} = 0,11519$	$a_5 = -0,03149$
$a_{-1} = 0,23628$	$a_6 = 0,01069$

In Tabelle III hiernach ist die offizielle Tafel SM 1939/44 (Ausgleichung im wesentlichen mechanische nach King mit der Kardinalpunktfolge 10, 15, 20, ...) in Vergleich gestellt mit der von uns vorgenommenen Ausgleichung (Typus $\frac{1}{7} | \frac{1}{7}$, Grundfunktion: Makeham II für $x \leq 34$, Makeham I für $x > 34$). Von $x = 34$ zu $x = 35$ ergibt sich ein glatter Übergang, wie dies auch aus der beigefügten Graphik ersichtlich ist. Die Reihen der dritten Differenzen der q_x -Werte geben uns Aufschluss über die erreichte Glättung. Wie die Summen der absoluten Differenzen zeigen, sind die beiden Ausgleichungen, im ganzen genommen, von praktisch gleicher und sehr befriedigender Glättung. Immerhin hat die offizielle Ausgleichung für $x < 35$ eine etwas bessere Glättung, wogegen diese bei unserer Ausgleichung im oberen Tafelteil besser ist.

Um die getreue Wiedergabe zu beurteilen, bedienen wir uns des χ^2 -Tests. Wie aus den zitierten Untersuchungen Ammeters (Mitteilungen 52, 1, S. 40 ff. und Kongressbd. I Scheveningen 1951, S. 634 ff.) hervorgeht, kann man sich bei der Prüfung mechanischer Ausgleichungen der gewöhnlichen χ^2 -Verteilung bedienen, wobei für die Anzahl

der Freiheitsgrade der Mittelwert $E(\chi^2)$ in Rechnung zu stellen ist. Sind T_x die effektiven Totenzahlen der Altersklassen x , \bar{T}_x die erwartungsmässigen Totenzahlen nach der ausgeglichenen Tafel, so ist

$$\chi^2 = \sum_{(x)} \frac{(T_x - \bar{T}_x)^2}{\bar{T}_x}.$$

Ist weiter n die Gliederzahl der zu prüfenden Tafel, so gilt

$$E(\chi^2) = n \sum_{(j)} \alpha_j^2, \quad \text{mit } \alpha_j \begin{cases} = a_j & \text{für } j \neq 0, \\ = a_j - 1 & \text{für } j = 0, \end{cases}$$

und für das Streuungsquadrat hat man die Formel

$$D(\chi^2) = \left[2 \left(\sum_{j=-r}^r \alpha_j^2 \right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{2r} \left(\sum_{j=-r}^r \alpha_j \alpha_{j+k} \right)^2 \right] n - 4 \sum_{k=1}^{2r} k \left(\sum_{j=-r}^r \alpha_j \alpha_{j+k} \right)^2$$

Die numerische Rechnung ergibt für die χ^2 -Verteilung und $c = 1,1$

bei Formel Typ $\frac{1}{7} \frac{1}{7}$	Mittelwert	Streuungsquadrat
mit Grundfunktion Makeham I	$0,8139 n$	$1,5251 n - 0,4036$
mit Grundfunktion Makeham II	$0,6015 n$	$1,0633 n - 0,4615$

Die Prüfung verschiedener Intervalle unserer Ausgleichungen der Tafel SM 1939/44 hat folgende Resultate ergeben:

Intervall	Grundfunktion	$E(\chi^2)$	χ^2	$P(\chi^2)$
16–30	Makeham I	12.21	32.64	< 0,5 %
31–45	»	12.21	21.60	~ 5 %
46–60	»	12.21	13.92	32 %
61–75	»	12.21	10.58	58 %
76–90	»	12.21	9.43	68 %
7–20	Makeham II	8.42	12.90	14 %
21–34	»	8.42	13.47	12 %
7–34	»	16.84	26.37	6 %
35–90	Makeham I	45.58	48.69	35 %
40–79	»	32.55	33.54	42 %
40–90	»	41.51	41.97	45 %

Diese Test-Werte sind recht aufschlussreich. Vergleicht man mit den in der amtlichen Publikation [31] sowie mit den von Ammeter für verschiedene Ausgleichungen der Tafel SM 1939/44 genannten Werten für die Masszahl χ^2 , so zeigt sich unsere Ausgleichung offensichtlich überlegen. Wenn wir vorab den Tafelbereich für $x \geq 35$ betrachten, so ersieht man, dass die mechanische Ausgleichung mit einfacher Makehamkurve als Grundfunktion unter allen gegebenen Beispielen den besten wahrscheinlichkeitstheoretischen Test aufweist. Aber auch für das Tafelintervall $7 \leq x \leq 34$ ist die Ausgleichung mit Makeham II als Grundfunktion sehr befriedigend und hält den Vergleich mit anderen mechanischen Ausgleichsverfahren sehr wohl aus. Ermittelt man z. B. bei der offiziellen Tafel für diesen Bereich die Masszahl χ^2 , so ergibt sich der Wert 34.39, bei uns hingegen nur 26.37. Dabei lässt die Methode in ihrer Anwendung an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Um die Methode auch an einem Material mit grösseren Schwankungen zu erproben, haben wir als zweites Beispiel die neue Versicherten-Sterbetafel der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt R. A. E. 1940/50 [32] ausgeglichen. Dieser Versuch schien uns auch deshalb interessant, weil die publizierte Tafel der Rentenanstalt analytisch ausgeglichen wurde, und zwar für $2 \leq x \leq 33$ mit einer Parabel 4. Grades und für $x > 41$ nach Perks, mit einer Verbindungsparabel 3. Grades für das Zwischenstück. Unsere Ausgleichung haben wir auf das Intervall $26 \leq x \leq 85$ erstreckt, mit der 13gliedrigen Formel Typ $\frac{1}{7} | \frac{1}{7}$, und zwar durchwegs mit einfacher Makeham-Grundfunktion. Die beiden Ausgleichungen sind in Tabelle IV einander gegenübergestellt. Was die Glättung anbelangt, so ist sie bei beiden ausgeglichenen q_x -Reihen sehr befriedigend, und bis zu $x = 40$ sind beide Ausgleichungen diesbezüglich einander praktisch gleichwertig. Für den oberen Tafelteil ist die Ausgleichung der Rentenanstalt hinsichtlich Glättung jedoch deutlich besser, was wegen der analytischen Ausgleichung zum vornherein zu erwarten ist. Was hingegen die getreue Wiedergabe anbetrifft, so spricht die Prüfung mittels des χ^2 -Tests deutlich zugunsten unserer Ausgleichung. Wir sind uns allerdings der Problematik des Vorgehens bewusst, indem es sich hier um Policien- und nicht um Personen-Sterblichkeit handelt, und somit die Hypothese der Unabhängigkeit der Einzelereignisse voneinander teilweise nicht zutrifft. Die Masszahlen, in gleicher Weise bestimmt

wie vorhin bei der Tafel SM 1939/44, können unseres Erachtens immerhin als Vergleichswerte dienen. Für verschiedene Intervalle hat die Rechnung folgende Angaben geliefert, wobei wir mit «analytisch» die Ausgleichung der Rentenanstalt, mit «mechanisch» unsere Ausgleichung kennzeichnen:

Intervall	Ausgleichung	$E(\chi^2)$	χ^2	$P(\chi^2)$
26–40	analytisch	~ 12	21.69	~ 4 %
	mechanisch	12.21	19.61	8 %
41–85	analytisch	41	47.81	22 %
	mechanisch	36.63	37.03	45 %
41–55	analytisch		13.27	
	mechanisch		7.62	
56–70	analytisch		13.56	
	mechanisch		10.27	
71–85	analytisch		20.93	
	mechanisch		19.14	

Abschliessend möchten wir den Wunsch aussprechen, dass die hier behandelte Methode der mechanischen Ausgleichung auch an andern Tafeln erprobt werde.

Tabelle I

$$a_j = \frac{\sum_{(j)} c^{2j} - \sum_{(j)} c^j + c^j ((2r+1) - \sum_{(j)} c^j)}{(2r+1) \sum_{(j)} c^{2j} - (\sum_{(j)} c^j)^2}$$

$(c = 1,1; -r \leq j \leq r)$

j	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
-6					0,09468
-5				0,10915	0,09267
-4			0,12969	0,10649	0,09047
-3		0,16150	0,12604	0,10356	0,08804
-2	0,21807	0,15625	0,12202	0,10033	0,08538
-1	0,20989	0,15048	0,11761	0,09679	0,08245
0	0,20090	0,14413	0,11274	0,09288	0,07922
1	0,19101	0,13715	0,10740	0,08859	0,07567
2	0,18013	0,12947	0,10152	0,08387	0,07177
3		0,12102	0,09505	0,07868	0,06748
4			0,08793	0,07297	0,06276
5				0,06669	0,05756
6					0,05185
$\Sigma a_j = 1$		$\Sigma a_j^2 = a_0$			

Tabelle II

a_j nach gleicher Formel wie bei Tabelle I

$r = 3$

j	$c = 1,08$	$c = 1,09$	$c = 1,10$	$c = 1,11$	$c = 1,12$
-3	0,1582	0,1599	0,1615	0,1631	0,1646
-2	0,1537	0,1550	0,1563	0,1575	0,1587
-1	0,1489	0,1497	0,1505	0,1513	0,1521
0	0,1437	0,1439	0,1441	0,1444	0,1446
1	0,1381	0,1376	0,1371	0,1367	0,1363
2	0,1320	0,1307	0,1295	0,1282	0,1271
3	0,1254	0,1232	0,1210	0,1188	0,1166
$\Sigma a_j = 1$		$\Sigma a_j^2 = a_0$			

a: Rohe einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten, %

b: Ausgleichung des Eidg. Statistischen Amtes; mechanisch nach King

c: Mechanische Ausgleichung $\begin{cases} x \leq 34 & \text{Grundfunktion Makeham II} \\ x > 34 & \text{Grundfunktion Makeham I} \end{cases}$

x	a	$q_x \%$	b	$10^5 \Delta^{(3)}$	$q_x \%$	c	$10^5 \Delta^{(3)}$
7	1.35	1.42	.	.	1.38	-1	
8	1.46	1.29	.	.	1.30	1	
9	1.15	1.20	.	.	1.24	-1	
10	1.13	1.15	.	.	1.19	6	
11	1.32	1.14	2	.	1.16	2	
12	1.08	1.17	-2	.	1.14	-2	
13	1.18	1.24	2	.	1.19	-4	
14	1.25	1.37	-1	.	1.33	.	
15	1.56	1.54	-4	.	1.54	-4	
16	1.78	1.77	-2	.	1.78	4	
17	2.18	2.05	-6	.	2.05	-6	
18	2.20	2.34	-1	.	2.31	-7	
19	2.51	2.62	4	.	2.60	1	
20	2.89	2.83	1	.	2.86	4	
21	3.13	2.96	.	.	3.02	6	
22	3.24	3.05	1	.	3.09	1	
23	2.92	3.11	.	.	3.11	-4	
24	3.02	3.14	-2	.	3.14	-5	
25	3.25	3.15	3	.	3.19	5	
26	3.42	3.14	3	.	3.22	-2	
27	3.04	3.09	2	.	3.18	8	
28	3.17	3.03	-2	.	3.12	2	
29	2.93	2.99	1	.	3.02	1	
30	3.10	2.99	-1	.	2.96	-2	
31	2.94	3.01	.	.	2.96	-6	
32	2.89	3.06	1	.	3.03	2	
33	3.09	3.13	-2	.	3.15	.	
34	3.45	3.22	1	.	3.26	2	
35	3.48	3.34	1	.	3.38	3	
36	3.25	3.47	1	.	3.51	-4	
37	3.53	3.62	4	.	3.67	2	
38	3.76	3.80	-2	.	3.89	.	
39	4.31	4.02	.	.	4.13	3	
40	4.15	4.32	.	.	4.41	-3	
41	4.44	4.68	-3	.	4.73	-1	
42	5.17	5.10	.	.	5.12	1	
43	5.84	5.58	-2	.	5.55	1	
44	6.12	6.09	.	.	6.01	2	

x	a	$q_x \text{ } ^0/\text{oo}$	b	$10^5 \Delta^{(3)}$	$q_x \text{ } ^0/\text{oo}$	c	$10^5 \Delta^{(3)}$
45	6.39	6.63	4		6.51	-3	
46	6.87	7.18	2		7.06	2	
47	8.11	7.74	3		7.68	-1	
48	8.14	8.35	-3		8.34	2	
49	9.03	9.03	.		9.06	1	
50	9.70	9.81	1		9.85	1	
51	11.04	10.66	4		10.71	1	
52	11.53	11.58	4		11.65	2	
53	12.76	12.58	-3		12.68	-4	
54	13.71	13.70	-1		13.81	9	
55	15.79	14.98	1		15.06	-1	
56	15.98	16.39	4		16.39	1	
57	17.30	17.92	2		17.89	-2	
58	19.47	19.58	-8		19.55	1	
59	21.55	21.41	1		21.38	2	
60	23.74	23.43	7		23.36	5	
61	25.75	25.56	11		25.50	-1	
62	27.49	27.81	8		27.82	1	
63	31.48	30.25	-7		30.37	8	
64	33.23	32.99	-6		33.14	3	
65	36.02	36.11	11		36.14	8	
66	39.30	39.54	10		39.45	3	
67	42.12	43.22	9		43.10	.	
68	46.69	47.26	-10		47.17	2	
69	51.18	51.76	-7		51.69	7	
70	58.46	56.81	17		56.66	2	
71	61.60	62.31	17		62.10	9	
72	68.62	68.19	15		68.08	2	
73	74.15	74.62	2		74.62	2	
74	82.78	81.77	-12		81.81	4	
75	89.40	89.79	.		89.67	4	
76	97.70	98.70	-3		98.22	-5	
77	108.69	108.38	-1		107.50	10	
78	116.67	118.83	-8		117.55	.	
79	129.87	130.02	-6		128.32	-32	
80	142.15	141.94	-1		139.91	8	
81	158.23	154.51	.		152.32	26	
82	166.44	167.67	9		165.23	-19	
83	180.27	181.41	14		178.72	53	
84	195.23	195.73	4		193.05	-64	
85	206.00	210.72	4		208.03	62	
86	231.75	226.52	5		224.19	-24	
87	252.94	243.17	5		240.89	21	
88	254.91	260.71			258.75		
89	268.90	279.19			277.53		
90	308.28	298.66			297.44		

Tabelle IV

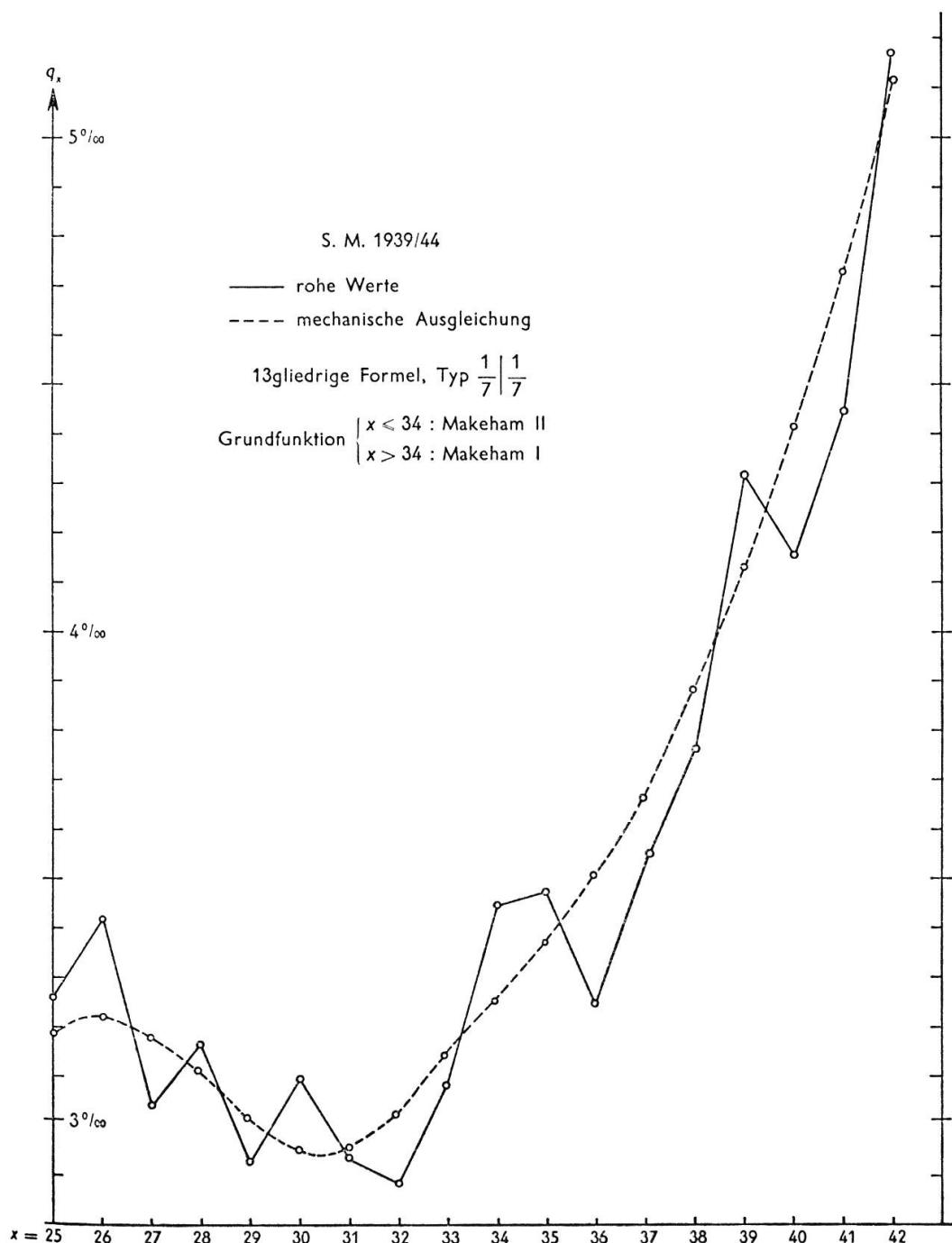
Tafel R. A. E. 1940/50 der Schweizerischen Lebensversicherungs-
und Renten-Anstalt

a: beobachtete einjährige Sterbenswahrscheinlichkeiten

b: analytische Ausgleichung der Rentenanstalt

c: mechanische Ausgleichung mit Makeham-Grundfunktion

<i>x</i>	1000 q_x			<i>x</i>	1000 q_x		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
26	1.67	1.84	1.81	56	11.16	11.02	11.17
27	1.80	1.84	1.80	57	13.07	12.17	12.20
28	1.67	1.84	1.79	58	11.97	13.43	13.27
29	1.98	1.84	1.80	59	14.48	14.83	14.52
30	1.69	1.83	1.81	60	15.51	16.37	15.97
31	1.75	1.83	1.83	61	17.58	18.07	17.53
32	1.95	1.83	1.86	62	18.60	19.94	19.26
33	1.66	1.84	1.89	63	22.49	22.00	21.20
34	2.04	1.86	1.94	64	21.81	24.28	23.29
35	1.98	1.89	1.99	65	26.36	26.78	25.91
36	2.21	1.93	2.06	66	32.91	29.54	28.72
37	1.89	2.00	2.14	67	26.37	32.57	31.54
38	2.32	2.09	2.24	68	34.10	35.90	34.61
39	2.36	2.22	2.36	69	36.52	39.56	38.18
40	2.05	2.38	2.50	70	41.28	43.57	41.97
41	2.72	2.58	2.68	71	61.13	47.97	46.47
42	3.07	2.83	2.89	72	48.95	52.78	51.39
43	2.94	3.11	3.12	73	48.92	58.04	56.83
44	3.49	3.42	3.41	74	46.74	63.79	64.50
45	3.59	3.76	3.74	75	80.65	70.06	73.50
46	4.02	4.14	4.12	76	62.35	76.89	82.54
47	4.56	4.56	4.54	77	101.12	84.31	91.97
48	4.71	5.03	5.04	78	132.01	92.36	102.63
49	5.56	5.54	5.61	79	93.53	101.08	112.57
50	6.34	6.11	6.25	80	195.74	110.51	125.44
51	7.21	6.74	6.95	81	124.40	120.67	138.61
52	7.32	7.43	7.68	82	108.43	131.60	154.62
53	8.94	8.20	8.49	83	83.33	143.33	179.65
54	9.37	9.05	9.33	84	240.00	155.88	210.34
55	10.85	9.98	10.23	85	146.34	169.26	251.55



Literaturhinweise

- [1] *E. Blaschke*: Vorlesungen über mathematische Statistik. Verlag Teubner 1906.
- [2] *E. Czuber*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Bd., 3. Aufl. Verlag Teubner 1921. S. 167 ff.
- [3] *A. Tschuprow*: Zur Theorie der Stabilität statistischer Reihen, Skandinavisk Aktuariedtskrift, 1919, Heft 1–3.
- [4] *W. Sachs*: Die veränderliche Sterblichkeit. Schriftenreihe der Länderausschüsse der Versicherungswirtschaft in der französ. Besatzungszone, Heft 1, Verlag Mohr, Tübingen 1949.
- [5] *H. Ammeter*: Wahrscheinlichkeitstheoretische Kriterien für die Beurteilung der Güte der Ausgleichung einer Sterbetafel. M. S. V. M. Bd. 52, 1.
 - A generalized χ^2 -distribution and its applications for testing mortality table graduations by moving averages. XIV. internat. Congress of Actuaries, Vol. I, Scheveningen 1951.
 - Der doppelseitige und die einseitigen $(I\chi)^2$ -Tests und ihre Leistungsfähigkeit für die wahrscheinlichkeitstheoretische Überprüfung von Sterbetafeln. Blätter d. deutschen Ges. f. Vers. Math. Bd. I, 4.
- [6] *P. Baltensperger*: Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung. M. S. V. M. Bd. 41.
- [7] *W. P. Schuler*: Ein Verfahren zum Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen. M. S. V. M. Bd. 44.
- [8] *C. Lange*: Untersuchungen über die jährlichen Schwankungen der Schadensquotienten in der Lebensversicherung und in der Feuerversicherung. Wirtschaft und Recht der Versicherung, Nr. 2, 1932.
- [9] *H. Wiesler*: Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik. M. S. V. M. Bd. 44.
- [10] *H. Ammeter*: Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand. M. S. V. M. Bd. 45.
- [11] *W. Ruchti*: Analytische Ausgleichung durch Polynome. M. S. V. M. Bd. 34.
- [12] *P. Elderton, H. Oakley, H. Smith*: Some points that have arisen out of the continuous investigation into the mortality of assured lives 1924–29. Journal of the Institute of Actuaries, Vol. LXVIII, London 1937.
- [13] *R. v. Mises*: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, Bd. I Wahrscheinlichkeitsrechnung. Verlag Deutike 1931, S. 16 ff.
- [14] *H. Niedermann*: Untersuchungen über den Wahrscheinlichkeitscharakter der Sterblichkeit. M. S. V. M. Bd. 46.
- [15] *P. Lorenz*: Der Trend; Ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven und sonstigen Zeitreihen. Sonderheft 21 der Vierteljahrsshefte zur Konjunkturforschung. Berlin 1931.

- [16] *H. Poincaré*: Calcul des Probabilités, 2. Aufl. Verlag Gauthier-Villars 1912, S. 280 ff.
- [17] *A. Quiquet*: Sur une méthode d'interpolation exposé par Henri Poincaré et sur une application possible aux fonctions de survie. V. internat. Math. Kongress, Cambridge Press 1913, Vol. 2, S. 385 ff.
- [18] *J. P. Gram*: Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. M. S. V. M. Bd. 10.
- [19] *P. Lorenz*: Darstellung statistischer Übersichten mit zwei Eingängen durch orthogonale ganze rationale Funktionen. Archiv f. mathemat. Wirtschafts- und Sozialforschung, Bd. VI, 2, 1940.
- [20] *O. Anderson*: Die Korrelationsrechnung in der Konjunkturforschung. Veröffentlichungen d. Frankfurter Ges. f. Konjunkturforschung, Heft 4, 1929.
- [21] *E. Czuber*: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Verlag Teubner. 2. Aufl., 1. Bd. (1908), S. 318 ff.; 2. Bd. (1910), S. 171.
- [22] *C. L. Landré*: Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums. Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch, 36. Jahrgang.
- [23] — Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. 5. Aufl. (1921), Verlag Fischer, Jena. S. 95.
- [24] *O. Anderson*: Probleme der statistischen Methodenlehre, Physica-Verlag, Würzburg 1954, S. 236.
- [25] *H. Koeppeler*: Zur Gramschen Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. Österr. Revue, 43. Jahrgang (1918), Nr. 19.
- [26] *A. Quiquet*: Représentation algébrique des tables de survie. Bulletin de l'Institut des Actuaires Français. Tome III (1893), Heft 14, S. 106.
- [27] *E. L. Vermeeren*: Über eine neue analytische Ausgleichungsmethode von Sterbetafeln. Loewenbergs Sammlung versicherungstechn. Arbeiten. Bd. 1. Wien 1912 (Abdruck aus Österr. Revue, 36. Jahrgang).
- [28] *G. Rosmanith*: Mathemat. Statistik der Personenversicherung. Verlag Teubner, 1930. S. 84.
- [29] *J. Altenburger*: Versuch einer allgemeinen Theorie der mechanischen Ausgleichungsmethoden. Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen. Bd. 3. Heft 1. Wien 1907.
- [30] *L. Perutz*: Die theoretischen Grundlagen der mechanischen Ausgleichung. Loewenbergs Sammlung versicherungstechn. Arbeiten. Bd. 1, Wien 1912 (Abdruck aus Österr. Revue, 37. Jahrgang).
- [31] *Eidgenössisches Statistisches Amt*: Schweizerische Volkssterbetafeln 1931/41 und 1939/44. Statistische Quellenwerke der Schweiz, Heft 232, Reihe Bk 4. Bern 1951.
- [32] *W. Frauenfelder*: Beobachtungen über die Sterblichkeit bei den Einzel-Kapitalversicherungen der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt. M. S. V. M. Bd. 54, 1.

