

Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of
Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 54 (1954)

Artikel: Summation interpolierter Zahlenreihen

Autor: Kreis, H.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-555070>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Summation interpolierter Zahlenreihen

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die *Lagrangesche* Interpolationsformel liefert die ganze Funktion n -ten Grades, welche die vorgeschriebenen Werte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ annimmt, in der Gestalt

$$\sum_0^n P_k(x) f(x_k),$$

wobei die Polynome n -ten Grades $P_k(x)$ nur von den Argumenten x_i und nicht von der Funktion $f(x)$ abhängig sind.

Eine Summe von der Form

$$s = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b)$$

kann demnach folgendermassen geschrieben werden:

$$s = \sum_0^n A_k f(x_k).$$

Der allgemeine Koeffizient

$$A_k = \sum_a^b P_k(x)$$

ist ebenfalls von der Funktion $f(x)$ unabhängig. Wie in der folgenden Auswahl von Beispielen gezeigt werden soll, können bei bestimmten Summationen durch passende Spezialisierung der Funktion $f(x)$ die unbekannten Koeffizienten A_k direkt ermittelt werden.

1. Beispiel: Gegeben die äquidistanten Werte $f(0), f(10), f(20)$ und $f(30)$ einer ganzen Funktion vom 3. Grade; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{30} f(x).$$

Wir haben die Koeffizienten des Ausdruckes

$$s = A f(0) + B f(10) + C f(20) + D f(30)$$

zu bestimmen.

Wir wählen für $f(x)$ folgende Spezialwerte:

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= (x-15)^3, \\ s &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x) &= (x-15)^2, \\ s &= 2 \sum_0^{15} t^2 = 2480. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad f(x) &= (x-15)^1, \\ s &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f(x) &= (x-15)^0 = 1, \\ s &= 31. \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 1. & -3375 A - 125 B + 125 C + 3375 D & = 0 \\ 2. & 225 A + 25 B + 25 C + 225 D & = 1480 \\ 3. & -15 A - 5 B + 5 C + 15 D & = 0 \\ 4. & A + B + C + D & = 31 \end{array}$$

$$A = D = \frac{341}{80}; \quad B = C = \frac{899}{80}.$$

$$s = \sum_0^{30} f(x) = \frac{341}{80} [f(0) + f(30)] + \frac{899}{80} [f(10) + f(20)]. \quad (1)$$

Analog findet man im Falle einer quadratischen Interpolationsfunktion

a) bei gegebenen Funktionswerten $f(0)$, $f(10)$ und $f(20)$:

$$s = \sum_0^{20} f(x) = \frac{77}{20} [f(0) + f(20)] + \frac{133}{10} f(10); \quad (2)$$

b) bei gegebenen Funktionswerten $f(0)$, $f(5)$ und $f(10)$:

$$s = \sum_0^{10} f(x) = \frac{11}{5} [f(0) + f(10)] + \frac{33}{5} f(5). \quad (3)$$

2. *Beispiel:* Gegeben die äquidistanten Werte $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$ und $f(15)$ einer ganzen Funktion des dritten Grades; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{15} f(x).$$

Zur Berechnung der Koeffizienten des Ausdruckes

$$s = A f(0) + B f(5) + C f(10) + D f(15)$$

wählen wir

$$\begin{aligned} 1. \quad f(x) &= (x-7)^3, \\ s &= 8^3 = 512. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad f(x) &= (x-7)^2, \\ s &= 8^2 + 2 \sum_1^7 t^2 = 344. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad f(x) &= (x-7)^1, \\ s &= 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad f(x) &= (x-7)^0 = 1, \\ s &= 16. \end{aligned}$$

Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} 1. & -343 A - 8 B + 27 C + 512 D & = 512 \\ 2. & 49 A + 4 B + 9 C + 64 D & = 344 \\ 3. & -7 A - 2 B + 3 C + 8 D & = 8 \\ 4. & A + B + C + D & = 16 \end{array}$$

$$A = D = \frac{12}{5}; \quad B = C = \frac{28}{5}.$$

$$s = \sum_0^{15} f(x) = \frac{12}{5} [f(0) + f(15)] + \frac{28}{5} [f(5) + f(10)]. \quad (4)$$

3. *Beispiel:* Gegeben die äquidistanten Werte einer ganzen Funktion vom 4. Grade $f(0)$, $f(5)$, $f(10)$, $f(15)$ und $f(20)$; gesucht die Summe

$$s = \sum_0^{20} f(x).$$

Wir setzen

$$s = A f(0) + B f(5) + C f(10) + D f(15) + E f(20)$$

und nehmen für $f(x)$ folgende Spezialfälle an:

$$1. \quad f(x) = (x-10)^4,$$

$$s = 2 \sum_{t=1}^{10} t^4 = 50666.$$

$$2. \quad f(x) = (x-10)^3,$$

$$s = 0.$$

$$3. \quad f(x) = (x-10)^2,$$

$$s = 2 \sum_{t=1}^{10} t^2 = 770.$$

$$4. \quad f(x) = (x-10)^1,$$

$$s = 0.$$

$$5. \quad f(x) = (x-10)^0 = 1,$$

$$s = 21.$$

Bestimmungsgleichungen:

$$1. \quad 10000 A + 625 B + 0 C + 625 D + 10000 E = 50666$$

$$2. \quad -1000 A - 125 B + 0 C + 125 D + 1000 E = 0$$

$$3. \quad 100 A + 25 B + 0 C + 25 D + 100 E = 770$$

$$4. \quad -10 A - 5 B + 0 C + 5 D + 10 E = 0$$

$$5. \quad A + B + C + D + E = 21$$

$$A = E = \frac{1309}{625}; \quad B = D = \frac{4389}{625}; \quad C = \frac{1729}{625}.$$

$$s = \sum_{x=0}^{20} f(x) = \frac{1309}{625} [f(0) + f(20)] + \frac{4389}{625} [f(5) + f(15)] + \frac{1729}{625} f(10). \quad (5)$$

Die Formeln (2) und (3) liefern genaue Resultate bei ganzen Funktionen $f(x)$ bis zum zweiten Grade; bei den Formeln (1) und (4) sind die Summen genau für ganze Funktionen $f(x)$ bis zum dritten Grade,

während sich bei der Formel (5) eine genaue Summe ergibt für Funktionen $f(x)$ bis zum vierten Grade. Andernfalls liefern die Summen der interpolierten Funktionswerte mehr oder weniger *exakte Näherungswerte* der ursprünglichen Zahlenreihe.

Zur Beurteilung der Tragweite der aufgestellten Summationsformeln habe ich in den folgenden numerischen Beispielen die Kommutationswerte D_x der SM-Tafel 1939/44, 3 %, die sich wegen der Kontroll- und Vergleichsmöglichkeit besonders gut eignen, verwendet.

Formel (2): Quadratische Interpolation.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(20) = D_{55} = 14966$$

$$\sum_{35}^{55} D_x = \frac{77}{20} \cdot 46116 + \frac{133}{10} \cdot 22178 = \underline{472514}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{56} = 665530 - 193125 = \underline{472405}.$$

Formel (3): Quadratische Interpolation.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(5) = D_{40} = 26383$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$\sum_{35}^{45} D_x = \frac{11}{5} \cdot 53328 + \frac{33}{5} \cdot 26383 = \underline{291449}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{46} = 665530 - 374085 = \underline{291445}.$$

Formel (1): Kubische Interpolation.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(20) = D_{55} = 14966$$

$$f(30) = D_{65} = 8820$$

$$\sum_{35}^{65} D_x = \frac{341}{80} \cdot 39970 + \frac{899}{80} \cdot 37144 = \underline{587778}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{66} = 665530 - 77986 = \underline{587544}.$$

Formel (4): Kubische Interpolation.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(5) = D_{40} = 26383$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(15) = D_{50} = 18398$$

$$\sum_{35}^{50} D_x = \frac{12}{5} \cdot 49548 + \frac{28}{5} \cdot 48561 = \underline{390857}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{51} = 665530 - 274698 = \underline{390832}.$$

Formel (5): Interpolation vierten Grades.

$$f(0) = D_{35} = 31150$$

$$f(5) = D_{40} = 26383$$

$$f(10) = D_{45} = 22178$$

$$f(15) = D_{50} = 18398$$

$$f(20) = D_{55} = 14966$$

$$\sum_{35}^{55} D_x = \frac{1309}{625} \cdot 46116 + \frac{4389}{625} \cdot 44781 + \frac{1729}{625} \cdot 22178 = \underline{472409}.$$

$$\text{Genauer Wert} = N_{35} - N_{56} = 665530 - 193125 = \underline{472405}.$$

Literatur

L. Schrutka: Leitfadens der Interpolation. Springer-Verlag, Wien 1945.

D. Seliwanoff: Lehrbuch der Differenzenrechnung. B. G. Teubner, Leipzig 1904.