

# Über eine Aufspaltung verschiedener Versicherungsformen nach Risiko- und Sparfunktion

Autor(en): **Wenk, Alfred**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-551323>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Über eine Aufspaltung verschiedener Versicherungsformen nach Risiko- und Sparfunktion

Von *Alfred Wenk*, Basel

### I. Einleitung

Die Isolierung der Rechnungselemente *Zins* und *Sterblichkeit* ist bei den wichtigsten versicherungstechnischen Grössen – Prämie und Deckungskapital – der gebräuchlichen Versicherungsformen bekanntlich nicht möglich. Wir meinen damit eine Isolierung in dem Sinne, dass diese Grössen entweder in der Form

$$F(i, q) = F_1(i) + F_2(q) \quad (1)$$

oder als 
$$\Phi(i, q) = \Phi_1(i) \cdot \Phi_2(q) \quad (2)$$

dargestellt werden könnten, wo  $F$  bzw.  $\Phi$  die technische Grösse,  $i$  den Zinsfuß und  $q$  eine zusammenfassende «Masszahl» für die Sterblichkeit bedeuten. Die Unmöglichkeit einer derartigen Darstellung beruht darauf, dass in  $F$  und  $\Phi$  stets reine Funktionen von  $i$  mit reinen Funktionen von  $q$  zugleich additiv und multiplikativ in «unkürzbarer» Form verbunden sind.

Dagegen gelingt die Isolierung der beiden Rechnungselemente *näherungsweise*, und zwar ist es eine Abwandlung von (1), die für die Lösung versicherungstechnischer Probleme bei den Todesfallversicherungen mit unbedingter Leistung fruchtbare Ansatzpunkte bietet. Die Näherung besteht darin, dass zwar der erste Summand  $F_1$  als reine Funktion von  $i$  auftritt, der zweite jedoch so beschaffen ist, dass er zur Hauptsache von der Sterblichkeit und nur schwach vom Zins abhängig ist. Wir schreiben dies so:

$$F(i, q) = F_1(i) + F_2(q, [i]). \quad (1a)$$

$F_1$  gehört wesensgemäss dem Bereich der *reinen Sparversicherung* zu; es hat sich gezeigt, dass  $F_2$  demjenigen der *Überlebenszeitrente* («Erbrente») zuzuordnen ist.

Die Möglichkeit der Zerlegung gewöhnlicher gemischter Versicherungen in Sparversicherung und Erbrente ist in unseren «Mitteilungen»

mehrfach erwähnt worden; *Jéquier* im besondern hat sie in zwei Aufsätzen [1], [2] <sup>1)</sup> eingehend untersucht und einige andere Versicherungsarten miteinbezogen. Wir möchten hier zeigen, wie sein Ansatz sich so verallgemeinern lässt, dass er auf alle gebräuchlichen «gemischten» Versicherungen – im weiteren Sinn des Wortes – angewendet werden kann (Abschnitt III), und vor allem wie er für die Exzedentenrückversicherung auf Risikobasis sich nutzbar machen lässt (Abschnitt IV). Vorher aber, im folgenden Teil, geben wir die Ableitung zweier Sätze, die in diesem Zusammenhang von Bedeutung sind.

## II. Zwei Sätze über Zeitrentenbarwerte

Wir schicken voraus, dass der Barwert der laufenden Zeitrente, wie er im folgenden verwendet wird, für ganze und nicht ganze Dauern  $k$  definiert sein soll durch

$$a_{\overline{k}|} = \frac{1 - v^k}{d}.$$

*1. Satz:* Die Summe der Barwerte zweier laufender Zeitrenten von verschiedener Höhe und Dauer ist gleich dem Barwert einer einzigen Rente, deren jährlicher Betrag der Summe der beiden gegebenen Renten entspricht.

Wenn also 
$$R_1 a_{\overline{n_1}|} + R_2 a_{\overline{n_2}|} = (R_1 + R_2) a_{\overline{n_3}|}, \quad (3)$$

dann gilt 
$$R_1 a_{\overline{n_1-t}|} + R_2 a_{\overline{n_2-t}|} = (R_1 + R_2) a_{\overline{n_3-t}|}. \quad (4)$$

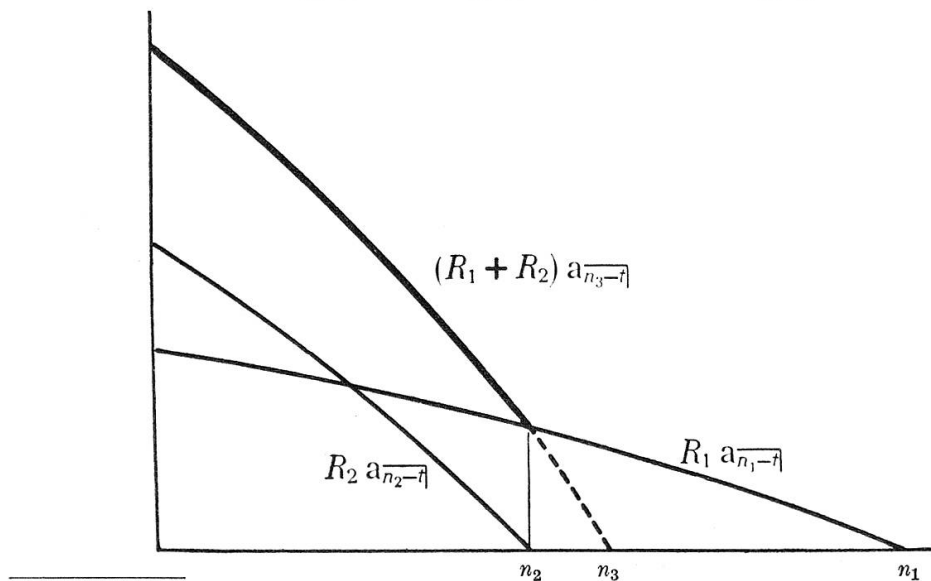


Fig. 1

<sup>1)</sup> Die in eckigen Klammern angeführten Zahlen beziehen sich auf die im Anhang zitierte Literatur.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} R_1 a_{\overline{n_1-t}|} + R_2 a_{\overline{n_2-t}|} &= \frac{1}{d} [R_1(1 - v^{n_1-t}) + R_2(1 - v^{n_2-t})] \\ &= \frac{R_1 + R_2}{d} \left[ 1 - v^{-t} \frac{R_1 v^{n_1} + R_2 v^{n_2}}{R_1 + R_2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch Umformung von (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{d} (1 - v^{n_1}) + \frac{R_2}{d} (1 - v^{n_2}) &= \frac{R_1 + R_2}{d} (1 - v^{n_3}) \\ v^{n_3} &= \frac{R_1 v^{n_1} + R_2 v^{n_2}}{R_1 + R_2}, \end{aligned} \quad (6)$$

und damit ist die Identität der Formeln (4) und (5) nachgewiesen.  $n_3$  ist ein gewogenes Mittel aus  $n_1$  und  $n_2$ , wobei die  $v^n$  als Wägungsfunktionen und die  $R$  als Gewichte auftreten.

2. Satz: Der jeweilige Barwert einer über  $n_1$  Jahre laufenden Zeitrente  $R_1$  vermehrt oder vermindert um eine Konstante  $B$  entspricht dem jeweiligen Barwert einer Zeitrente  $R_2$  laufend über  $n_2$  Jahre<sup>1)</sup>:

$$R_1 a_{\overline{n_1-t}|} \pm B = R_2 a_{\overline{n_2-t}|}. \quad (7)$$

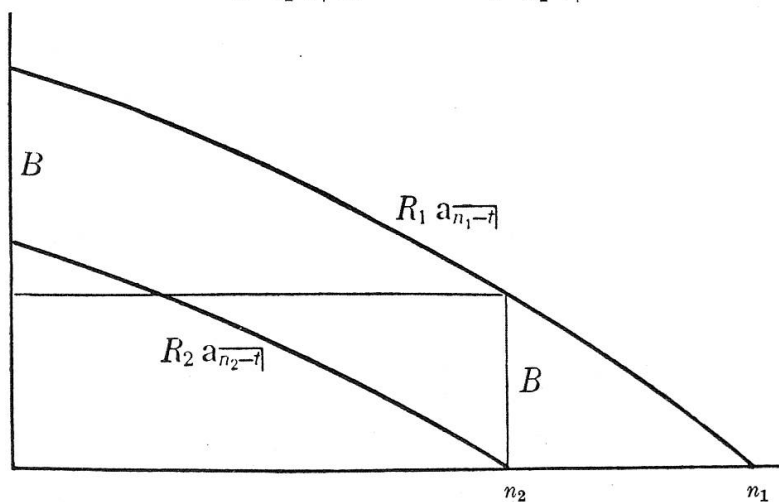


Fig. 2

*Beweis:* Gemäss Voraussetzung ist, wenn wir  $B$  als positive, vom Barwert der Rente  $R_1$  zu subtrahierende Konstante annehmen,

$$R_1 a_{\overline{n_1}|} - B = R_2 a_{\overline{n_2}|} \quad \text{und} \quad R_1 a_{\overline{n_1-n_2}|} = B.$$

<sup>1)</sup> Dieser zweite Satz betrifft einen im ersten Satze mitenthaltenen Spezialfall, insofern als die Konstante  $B$  als Barwert einer ewigen Rente vom jährlichen Betrag  $dB$  aufgefasst werden kann.

Also: 
$$R_2 = \frac{R_1(a_{\overline{n_1}|} - a_{\overline{n_1-n_2}|})}{a_{\overline{n_2}|}} = R_1 v^{n_1-n_2}$$

$$R_2 a_{\overline{n_2-t}|} = R_1 v^{n_1-n_2} a_{\overline{n_2-t}|} = R_1(a_{\overline{n_1-t}|} - a_{\overline{n_1-n_2}|}) = R_1 a_{\overline{n_1-t}|} - B.$$

### III. Die Zerlegung der wichtigsten Versicherungsformen in Erbrenten- und Sparversicherung

a) Wir geben zunächst für die gewöhnliche *gemischte Versicherung auf ein Leben* die Formeln für Nettoprämie und -reserve wieder, wie sie im erstgenannten Aufsatz *Jéquiérs* ausführlicher hergeleitet werden.

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - d = \left( \frac{1}{a_{\overline{n}|}} - d \right) + \left( \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \right) = P_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} - 1 \right).$$

$$\begin{aligned} {}_tV_{x\overline{n}|} &= 1 - \frac{a_{x+t, \overline{n-t}|}}{a_{x\overline{n}|}} = \left( 1 - \frac{a_{\overline{n-t}|}}{a_{\overline{n}|}} \right) + \left( \frac{a_{\overline{n-t}|}}{a_{\overline{n}|}} - \frac{a_{x+t, \overline{n-t}|}}{a_{x\overline{n}|}} \right) \\ &= {}_tV_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \left( a_{\overline{n-t}|} - \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|} \right) \\ &= {}_tV_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \left[ a_{\overline{n-t}|} - a_{x+t, \overline{n-t}|} - \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} - 1 \right) a_{x+t, \overline{n-t}|} \right]. \end{aligned}$$

Die gemischte Versicherung über die Summe  $S$  und die Dauer  $n$  ergibt aufgeteilt eine Sparversicherung derselben Summe und eine Erbrente vom jährlichen Betrag  $R = \frac{S}{a_{\overline{n}|}}$ , beide über  $n$  Jahre. Die im Falle des Todes des Versicherten im Zeitpunkt  $t$  fällig werdende Leistung  $S$  setzt sich zusammen aus dem Deckungskapital der Sparversicherung  $S \left( 1 - \frac{a_{\overline{n-t}|}}{a_{\overline{n}|}} \right)$  und dem Barwert  $R a_{\overline{n-t}|}$  der Erbrente.

b) Schreiben wir den Betrag  $\frac{S}{a_{\overline{n}|}}$  in der Form  $S(P_{\overline{n}|} + d)$ , so können wir daraus die Höhe der Erbrente für die zwei Versicherungsarten ableiten, bei denen die periodische Prämie bzw. der Diskont auf der Summe in Wegfall kommt:

*Gemischte Versicherung mit Einmalprämie:*  $R = dS,$

*Terminversicherung mit jährlichen Prämien:*  $R = P_{\overline{n}|} S = \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} S$

(ausführlich dargelegt bei *Jéquier* [1]).

Die *lebenslängliche Versicherung* mit Prämienzahlung bis zum Tod wird als gemischte auf das Schlussalter  $\omega$  behandelt.

c) Die gemischte (und die lebenslängliche) *Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer* bildet bis zum Ablauf der letzteren einen Sonderfall, für den wir drei Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung haben:

1. Es sei  $n$  die Versicherungsdauer,  
 $m$  die Prämienzahlungsdauer,  
 $P^A$  die Nettoprämie der Versicherung mit abgekürzter Prämienzahlung,  
 $P^G$  diejenige der gewöhnlichen gemischten Versicherung.

Erweitern wir die Formel für  $P^A$  durch gleichzeitige Addition und Subtraktion von  $d(1 - da_{\overline{xm}|})$ , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} P^A &= \frac{1}{a_{\overline{xm}|}} (1 - da_{\overline{xn}|}) - d(1 - da_{\overline{xn}|}) + d(1 - da_{\overline{xm}|}) \\ &= \left( \frac{1}{a_{\overline{xm}|}} - d \right) (1 - da_{\overline{xn}|}) + \left( \frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - d \right) da_{\overline{xm}|} \\ &= A_{\overline{xn}|} P_{\overline{xm}|}^G + (1 - A_{\overline{xn}|}) P_{\overline{xn}|}^G. \end{aligned}$$

Wir können daher bis zum Zeitpunkt  $t = m$  diese Versicherungsart – auch für das Deckungskapital – als Summe von zwei gewöhnlichen gemischten Versicherungen auffassen; die Zerlegung in Spar- und Risikoversicherung ergibt

eine Sparversicherung über  $m$  Jahre:  $S_1 = S A_{\overline{xm}|},$

eine Sparversicherung über  $n$  Jahre:  $S_2 = S(1 - A_{\overline{xn}|}),$

eine Erbrente über  $m$  Jahre:  $R_1 = \frac{S A_{\overline{xm}|}}{a_{\overline{m}|}},$

eine Erbrente über  $n$  Jahre:  $R_2 = \frac{S(1 - A_{\overline{xn}|})}{a_{\overline{n}|}}.$

2. Unter Benützung des im Abschnitt II abgeleiteten ersten Satzes können wir sowohl die beiden Sparversicherungen als auch die

beiden Erbrenten in je eine einzige zusammenlegen. Die Spezialkombination wird also durch eine gewöhnliche gemischte Versicherung mit der fiktiven Dauer  $n'$  ersetzt.

3. Eine Näherungsmethode zur Bestimmung dieses  $n'$  finden wir in einem Aufsatz von G. Albers [3] beiläufig erwähnt. Ausgegangen wird von der Formel für die Nettoreserve  ${}_tV^A$  wie folgt:

$${}_tV^A = 1 - d a_{x+t, \overline{n-t}|} - P^A a_{x+t, \overline{m-t}|},$$

$$P^A \frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{D_{x+t}} + d \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} = (P^A + d) \frac{N_{x+t} - N_{x+n'}}{D_{x+t}},$$

$$N_{x+n'} = \frac{P^A N_{x+m} + d N_{x+n}}{P^A + d}.$$

d) Die gemischte Versicherung auf zwei verbundene Leben kann in eine Sparversicherung und eine vom ersten Tod an zahlbare Erbrente zerlegt werden; die jährliche Nettoprämie der letzteren ist gleich

$$\frac{S}{a_{\overline{n}|}} \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{xy\overline{n}|}} - 1 \right).$$

Unter Verwendung der Lidstoneschen Formel

$$P_{xy\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}$$

gelangt man zu einer Sparversicherung und zwei unabhängigen Erbrenten auf je ein Leben. – Zahlenbeispiel im Abschnitt V.

Die gemischte Kinderversicherung mit Prämienbefreiung beim Tod des Versorgers, eine Spezialform der Versicherung auf zwei Leben, ergibt bei der Aufspaltung – unter sinngemässer Benützung vorgenannter Näherung – neben der reinen Sparversicherung eine Erbrente auf das Leben des Kindes vom Betrag  $R_1 = S(P_{\overline{n}|} + d)$  und eine solche auf das mitversicherte Leben vom Betrag  $R_2 = SP_{\overline{n}|}$ .

Was demgegenüber die genaue Rechnung ergäbe, zeigt sich durch eine einfache Umformung der Nettoprämienformel.

$$\begin{aligned} \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}} &= \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}} \frac{a_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}} = \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}} + \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}} \left( \frac{a_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}} - 1 \right) \\ &= P_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}} - 1 \right) + \frac{A_{z\overline{n}|}}{a_{z\overline{n}|}} \left( \frac{a_{z\overline{n}|}}{a_{xz\overline{n}|}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Der zweite Summand entspricht der Nettoprämie für die «normale» Erbrente auf das Leben des Kindes, der dritte der Nettoprämie einer Überlebensrente «von zwei Leben auf das jüngere» in der Höhe von  $P_{z\bar{n}|}$ . Die obige Approximation besteht also in der Gleichsetzung von

$$P_{z\bar{n}|} \left( \frac{a_{z\bar{n}|}}{a_{xz\bar{n}|}} - 1 \right) \quad \text{mit} \quad P_{\bar{n}|} \left( \frac{a_{\bar{n}|}}{a_{x\bar{n}|}} - 1 \right).$$

Wir verzichten hier auf die Diskussion dieser Annäherung und ihren Vergleich mit der üblichen Methode, die kombinierte Kinderversicherung wie eine gemischte Versicherung auf das Leben des Versorgers allein zu behandeln.

e) Die Kombination einer *gemischten oder Terminversicherung mit einer Überlebenszeitrente* ergibt bei der Zerlegung neben der Sparversicherung zwei Erbrenten von gleicher oder verschiedener Dauer, die wiederum zusammengelegt werden können.

Des Interesses halber sei erwähnt, dass sich *die temporäre Todesfallversicherung auf konstantes Kapital*, welche nicht zu den hier betrachteten Versicherungsformen gehört, als Differenz zweier Überlebenszeitrenten  $(R_1, n_1 / R_2, n_2)$  darstellen lässt. Wird die Summe der Kapitalversicherung wiederum mit  $S$ , die Dauer mit  $n$  bezeichnet, so ist  $R_1 = S$ ,  $n_1 = n + 1$ ;  $R_2 = vS$ ,  $n_2 = n$ . Der Nachweis hiefür ist besonders einfach im Falle einmaliger Prämienzahlung – wir nehmen  $S = 1$  –:

$$\begin{aligned} {}_nA_x &= A_{x\bar{n}|} - {}_nE_x = 1 - da_{x\bar{n}|} - \frac{N_{x+n} - N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= 1 - (1-v)a_{x\bar{n}|} - (a_{x\bar{n+1}|} - a_{x\bar{n}|}) = 1 + va_{x\bar{n}|} - a_{x\bar{n+1}|} \\ &= (a_{\bar{n+1}|} - a_{x\bar{n+1}|}) - v(a_{\bar{n}|} - a_{x\bar{n}|}), \\ &\qquad\qquad\qquad (\text{denn } a_{\bar{n+1}|} - va_{\bar{n}|} = 1). \end{aligned}$$

Der Fall periodischer Prämienzahlung ist insofern komplizierter, als für die zwei Renten von verschiedener Laufzeit die Prämienzahlungsdauer je  $n$  Jahre beträgt.

f) Bei der *Versicherung anormaler Risiken* beschränken wir uns auf die Annahme konstanter multiplikativer Übersterblichkeit, auf welche sich auch die Praxis bisher im wesentlichen beschränkt hat <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Über die Problematik dieses Ansatzes und seine praktische Berechtigung siehe z. B. *Zwingli* [4].



Wir bezeichnen mit  $a_{\overline{xn}|}(\alpha)$  den Leibrentenbarwert berechnet mit den  $(1 + \alpha)$ -fachen  $q_x$  der normalen Sterbetafel. Die Nettoprämie für die Erbrente «1» beträgt alsdann

$$P_{\overline{xn}|}(\alpha) = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{xn}|}(\alpha)} - 1.$$

Als Näherung für die Praxis gibt *Jecklin* [5] für den Fall einer gemischten Versicherung mit 100 % Übersterblichkeit den einfachen Ansatz für den Risikozuschlag

$$Z = P_{\overline{xn}|}(\alpha) - P_{\overline{xn}|} \sim \frac{1}{a_{\overline{xn}|}} - \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{xn}|}} - 1 \right)$$

an.

Er erinnert auch daran, dass sich der Zuschlag für Übersterblichkeit bei Variation der letzteren mit grosser Näherung proportional ändert. Da nun das angenäherte  $Z$  der Nettoprämie einer normal berechneten Erbrente entspricht, so kann für Prämie und Deckungskapital einer in diesem Sinne anormalen Versicherung die vom Sparteil abgespaltene Erbrente einfach mit dem  $(1 + \alpha)$ -fachen Jahresbetrag genommen und mit der Normaltafel berechnet werden, gleichgültig um welche Versicherungsform es sich handelt. Die Substitution des qualitativen Ansatzes durch den quantitativen ist jedenfalls dann praktisch befriedigend, wenn eine moderne Tafel mit niedrigen  $q_x$  und tiefem Zinsfuss verwendet wird. — Zahlenbeispiel im Abschnitt V.

*Zusammenfassend stellen wir fest, dass unter Verwendung bekannter Näherungsformeln alle gebräuchlichen Todesfallkapitalversicherungen mit unbedingter Leistung sich als Kombinationen von Sparversicherung und Überlebenszeitrente auf ein (normales) Leben darstellen und behandeln lassen.*

#### IV. Die Verwertung für die Exzedentenrückversicherung auf Risikobasis

Beim Versuch einer neuen Lösung dieses Rückversicherungsproblems gehen wir von einer Überlebenszeitrente  $R$  auf ein Leben mit jährlicher Prämienzahlung aus, die wir uns von der zugehörigen Sparversicherung gänzlich losgelöst denken.

Wenn der Tod des Versicherten im Zeitpunkt  $t$  eintritt, so ist die Todesfalleistung, kapitalisiert auf das Ende des Todesjahres, gleich  $R a_{\overline{n-t}|}$ .

Die Differenz zwischen diesem Betrag und dem (positiven oder negativen) Deckungskapital der anwartschaftlichen Erbrente entspricht der Risikosumme der letzteren  $R \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|}$  und damit, weil die Risikosumme der Sparversicherung gleich Null ist, der Risikosumme der Versicherung überhaupt. Übersteigt die anfängliche Risikosumme  $R a_{\overline{n}|}$  den festen Selbstbehalt  $B$  des Erstversicherers, so ist dieser darauf angewiesen, die restliche, mit wachsendem  $t$  abnehmende Risikosumme  $R \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|} - B$  in Rückdeckung geben zu können. Von dem Zeitpunkt an, wo dieser Risikosummenexzedent Null wird, würde die Rückversicherung überflüssig.

Wir vernachlässigen das von Null nur wenig verschiedene Deckungskapital der anwartschaftlichen Erbrente, so dass sich der Risikosummenexzedent von  $R \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|} - B$  auf  $R a_{\overline{n-t}|} - B$  reduziert. Ferner bezeichnen wir dasjenige  $t$ , für welches der letztere Ausdruck Null wird, mit  $k$ . Dieses  $k$  ist die Dauer der vorgeschlagenen Rückversicherung,  $R a_{\overline{n}|} - B$  die anfängliche rückzudeckende Risikosumme. Nun entspricht nach Formel (7) der angenäherte Risikosummenexzedent  $R a_{\overline{n-t}|} - B$  wiederum dem Barwert einer laufenden Zeitrente  $R' a_{\overline{k-t}|}$ , ( $k < n$ ): *folglich ist es möglich, diesen Exzedenten durch eine Überlebenszeitrente abdecken zu lassen.*

Es sei nunmehr  $R_1$  die Erbrente der Erstversicherung,  
 $n$  deren Dauer,  
 $R_2$  die rückzuversichernde Erbrente,  
 $k$  deren Dauer, ermittelt aus  $R_1 a_{\overline{n-k}|} = B$ ;

alsdann wird 
$$R_2 = \frac{R_1 a_{\overline{n}|} - B}{a_{\overline{k}|}} = R_1 v^{n-k}.$$

Die Leistung des Rückversicherers beim Tod im Zeitpunkt  $t < k$  ist gleich  $R_2 a_{\overline{k-t}|} = R_1 a_{\overline{n-t}|} - B$ .

Für die Praxis der Rückversicherung spielt die Vernachlässigung der Reserve der anwartschaftlichen Erbrente sozusagen keine Rolle. Man wird selbstverständlich  $k$ , das zumeist eine nicht ganze Zahl ergeben wird,

auf ganze Jahre aufrunden und damit wohl meistens eine Unterdeckung des genauen Risikosummenexzedenten  $R_1 \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{xn}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|} - B$  vermeiden.

Eine sehr beträchtliche administrative Vereinfachung lässt sich für Erst- und Rückversicherer dadurch erzielen, dass durch Vereinbarung die Nettoreserve des ganzen Erbrenten-Rückversicherungsbestandes gleich Null gesetzt wird. Positive und negative Einzelreserven heben sich in einem solchen Bestand zum Teil auf, und wenn bei vorwiegend kurzfristigen  $k$  die negativen vorherrschen, so sind es, absolut genommen, unbedeutende Werte, die zwischen dem Anfangs- und Schlussbetrag Null durchlaufen werden <sup>1)</sup>.

Abschliessend sei darauf hingewiesen, dass dieses System der Rückversicherung sich in analoger Weise auf *Invalidenrenten* anwenden lässt.

## V. Die Aufteilung nach Spar- und Risikofunktion in ganzen Beständen

Es drängt sich die Frage auf, ob unter Benützung der besprochenen Zerlegung sich noch andere technische Probleme besser oder einfacher lösen lassen als bisher. Vor allem wäre zu untersuchen, ob es sich lohnen würde, die Aufteilung ganzer Bestände in Spar- und Erbrentenversicherungen durchzuführen. Wir beabsichtigen nicht, diese Frage hier schlüssig zu beantworten, beschränken uns vielmehr darauf, einige Teilaspekte aufzuzeigen.

1. Versicherungen auf verbundene Leben und solche anormaler Risiken werden bei der Reservestellung meist zu Versicherungen auf ein (normales) Leben «reduziert»; das fiktive  $x'$  wird z. B. aus  $P_{x'|\overline{n}|} \sim P_{xy|\overline{n}|}$  bzw.  $P_{x'|\overline{n}|} \sim P_{x|\overline{n}|}(\alpha)$  abgeleitet. Man vermeidet damit die Führung von Sonderbeständen, nimmt aber dafür beträchtliche Verfälschungen im Reserveverlauf in Kauf. Zwei Zahlenbeispiele mögen zeigen, dass die Erfassung dieser Versicherungen gemäss III d und III f weit genauer ist als die üblichen Notbehelfe. — Siehe Tabellen 1 und 2 am Schluss dieses Abschnitts.

2. Die Vielfalt der Versicherungsformen verschwindet durch die Aufspaltung gänzlich. Es entstehen zwei Teilbestände, deren jeder

---

<sup>1)</sup> Einzig wenn die Rückversicherung infolge freiwilligen Stornos in Wegfall kommt, hätte die Verrechnung des Deckungskapitals zu erfolgen.

sich aus lauter gleichartigen, prämienpflichtigen und prämienfreien Versicherungen zusammensetzt. Bei geeigneter Wahl der Hilfszahlen lässt sich ein Sparversicherungsbestand bekanntlich in einer einzigen Gruppe reservieren.

3. In den aufgeteilten Beständen können Befunde erhoben werden, für deren Ermittlung es sonst komplizierter Untersuchungen bedürfte:

Der Stand der totalen *Nettoprämie* am Bilanztermin und die Netto-*prämie*einnahme eines Rechnungsjahres zerfallen in den konstanten Risiko- und Sparteil.

Die gesamte *Prämienreserve* Ende Rechnungsjahr wird zerlegt in eine Spar- und eine (eventuell negative) Risikorücklage.

Im Teilbestand der Erbrenten wird bei Anlass der Deckungskapitalberechnung auch die *Risikosumme* ermittelt. Denn der zweite Ausdruck auf der rechten Seite der Nettoreservenformel für die Erbrente «1»

$${}_tV_{x\overline{n}|}^r = a_{\overline{n-t}|} - \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|}$$

entspricht eben der jeweiligen Risikosumme.

Hierbei scheint uns folgendes von Wichtigkeit zu sein:

- a) Die Analyse der Gewinne wird durch die Zerlegung der Bestände vereinfacht, insbesondere wird das Schema für die Ermittlung des Sterblichkeitsgewinns im reinen Erbrentenbestand wesentlich entlastet. Zwar entspricht die Nettoprämieeinnahme dieses Teilbestandes nicht der Risikoprämieeinnahme im Sinne des erwähnten Schemas. Aber die letztere lässt sich leicht aus der ersteren ableiten: wenn wir, um nur das Prinzip zu erklären, von Bestandesänderungen absehen, die Einnahme an Erbrentenprämien mit  $\sum P_{x\overline{n}|}^r$  und die Risikoprämieeinnahme des  $t$ . Versicherungsjahres gemäss Schema mit  $\sum P_{x+t}^R$  bezeichnen, so gilt

$$\sum P_{x+t}^R = \sum P_{x\overline{n}|}^r + \sum {}_tV_{x\overline{n}|}^r - v \sum {}_{t+1}V_{x\overline{n}|}^r,$$

wobei die  $V_{x\overline{n}|}^r$  das Deckungskapital der anwartschaftlichen Erbrenten bedeuten.

- b) Wenn bisher nach dem besagten Schema Risikoprämieeinnahme und Risikosummenschäden ermittelt worden sind, so ist dabei die Bezugzahl unbekannt geblieben, nämlich die Risikosumme selbst. Diese ist umsomehr von der Differenz Versicherungssumme –

Deckungskapital verschieden, je stärker die Bestände mit Terminversicherungen, mit Versicherungen auf zwei Leben und mit zusätzlichen Überlebenszeitrenten durchsetzt sind. Das Verhältnis Risikoprämieneinnahme/Risikosumme ist eine wichtige Masszahl für die rechnermässige Sterblichkeit, das Verhältnis Risikosummenschäden/Risikosumme die entsprechende für die effektive Sterblichkeit im Ganzen eines Bestandes <sup>1)</sup>).

Ist ein Erbrentenbestand nach Altersklassen gegliedert, so lässt sich für eine jede das Verhältnis Risikosummenschäden/Risikosumme bilden. Diese «Risikosummensterblichkeit» hat unseres Erachtens neben der Policen- oder Personensterblichkeit und der Feststellung des Sterblichkeitsgewinnes ihre eigene Berechtigung; sie stellt gleichsam die Synthese dieser Ergebnisse dar. Sie in Grosslebens-, Volks- und Rückversicherungsbeständen (Spitzenrisiken!) zu beobachten, müsste von hohem Interesse sein, und ihre Verwendung für die Berechnung von Prämien schiene uns durchaus sinnvoll.

- c) Von Prämie und Reserve der von der Sparversicherung abgelösten Erbrente – nicht von ihrem Jahresbetrag – sagten wir in der Einleitung, sie seien vom Zinsfuss weitgehend unabhängig. Um dies zu zeigen, haben wir in Tabelle 3 für eine gemischte Versicherung den Betrag der in ihr enthaltenen Erbrente, deren Nettoprämie und einige ihrer Nettoreserven berechnet, und zwar zu  $2\frac{1}{2}$  % und 3 % Zins und unter Zugrundelegung einer älteren und einer neueren Volkssterbetafel sowie einer modernen Versicherten-tafel. Bei der Beurteilung sind selbstverständlich die dort angeführten Zahlen ins Verhältnis zu setzen zur Nettoprämie und den Nettoreserven der gemischten Versicherung. Die durch Zinsänderung entstehenden Unterschiede erweisen sich dann als praktisch bedeutungslos, wenn eine Sterbetafel mit kleinen  $q_x$  verwendet wird. Daraus erwächst die Möglichkeit, bei der Umstellung eines Bestandes auf einen andern Zinsfuss die Risikoprämie und die Risikorücklage unverändert zu belassen und die Anpassung in einfacher Weise nur im Teilbestand der Sparversicherungen vorzunehmen.

---

<sup>1)</sup> Ein Beispiel für die Verwendung solcher Masszahlen finden wir in einer Arbeit von H. Ruch [6], wo allerdings in vereinfachender Weise für die Risikosumme die Differenz Versicherungssumme – Deckungskapital genommen werden musste.

Tabelle 1

*Gemischte Versicherung auf zwei Leben*

$S = 10\,000$ ,  $x_1 = 35$ ,  $x_2 = 28$ ,  $n = 30$ ; Sterbetafel P 1952/3 %

Kol. 1: Abgelaufene Dauer  $t$

Kol. 2:  ${}_tV_{x_1x_2\overline{n}}$  genau

Kol. 3:  ${}_tV_{x'\overline{n}}$  ( $x' = 40$  ermittelt aus  $P_{x'\overline{n}} \sim P_{x_1x_2\overline{n}}$ )

Kol. 4:  ${}_tV_{\overline{n}}$

Kol. 5:  ${}_tV_{x_1\overline{n}}^r$  der Erbrente auf das erste Leben

Kol. 6:  ${}_tV_{x_2\overline{n}}^r$  der Erbrente auf das zweite Leben

Kol. 7: Angenähertes  ${}_tV_{x_1x_2\overline{n}} = {}_tV_{\overline{n}} + {}_tV_{x_1\overline{n}}^r + {}_tV_{x_2\overline{n}}^r$

1	2	3	4	5	6	7
3	674.3	704.9	649.7	25.8	-1.5	674.0
6	1408.9	1459.2	1359.6	48.8	-0.2	1408.2
9	2201.8	2267.6	2135.4	64.0	1.8	2201.2
12	3054.8	3130.0	2983.1	68.1	2.4	3053.6
15	3973.1	4046.8	3909.4	62.6	-1.1	3970.9
18	4957.1	5022.2	4921.6	42.7	-10.1	4954.2
21	6019.8	6067.0	6027.6	10.2	-21.6	6016.2
24	7180.3	7206.5	7236.2	-27.1	-32.0	7177.1
27	8479.7	8487.3	8556.9	-46.6	-32.1	8478.2
	(247.68)	(247.50)	(204.07)	(27.32)	(16.35)	(247.74)

*Anmerkungen:*

Die am Fusse jeder Kolonne in Klammer angegebene Zahl ist die zugehörige Nettoprämie.

$$\text{Jährlicher Betrag der beiden Erbrenten: } R = \frac{10\,000}{a_{\overline{30}|}} = 495.33.$$

P 1952 ist eine Versichertensterbetafel, konstruiert auf Grund der Erfahrungen der PAX, Schweizerische Lebens-Versicherungsgesellschaft, in den Jahren 1946–51.

Tabelle 2

Gemischte Versicherung auf ein Leben; Übersterblichkeit 200 %

$S = 10\,000$ ,  $x = 25$ ,  $n = 35$ ; Sterbetafel P 1952/3 %

Kol. 1: Abgelaufene Dauer  $t$

Kol. 2:  ${}_tV_{\overline{xn}|}(\alpha)$  genau

Kol. 3:  ${}_tV_{x'n|}$  ( $x' = 39$  ermittelt aus  $P_{x'n|} \sim P_{\overline{xn}|}(\alpha)$ )

Kol. 4:  ${}_tV_{\overline{n}|}$

Kol. 5:  ${}_3{}_tV_{\overline{xn}|}^r = {}_3R \left( a_{\overline{n-t}|} - \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{xn}|}} a_{x+t, \overline{n-t}|} \right)$

Kol. 6: Angenähertes  ${}_tV_{\overline{xn}|}(\alpha) = {}_tV_{\overline{n}|} + {}_3{}_tV_{\overline{xn}|}^r$

1	2	3	4	5	6
3	505.2	596.3	511.2	-6.7	504.5
6	1072.7	1232.4	1069.8	1.5	1071.3
9	1699.6	1909.8	1680.3	17.4	1697.7
12	2384.7	2629.9	2347.3	34.9	2382.2
15	3128.2	3387.5	3076.1	48.2	3124.3
18	3925.9	4181.4	3872.6	47.5	3920.1
21	4776.7	5011.6	4742.9	26.5	4769.4
24	5694.1	5884.9	5693.9	-8.4	5685.5
27	6688.3	6819.3	6733.1	-53.7	6679.4
30	7782.3	7846.3	7868.6	-92.8	7775.8
33	9030.1	9039.0	9109.5	-80.6	9028.9

Anmerkungen:

Jährlicher Betrag der Erbrente  $R = \frac{10\,000}{a_{\overline{35}|}} = 451.84$ ,

genauer Risikozuschlag  $Z = P_{\overline{xn}|}(\alpha) - P_{\overline{xn}|} = 33.92$ ,

angenähertes  $Z$   ${}_2R \left( \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{xn}|}} - 1 \right) = 33.83$ .



Tabelle 3

*Jahresbetrag, Nettoprämie und Nettoreserven der in einer gemischten Versicherung ( $S = 10\,000$ ,  $x = 30$ ,  $n = 30$ ) enthaltenen Erbrente*

$i$	SM 1921/30		SM 1939/44		P 1952	
	2½%	3%	2½%	3%	2½%	3%
$R$	466.12	495.33	466.12	495.33	466.12	495.33
$P_{\overline{xn}}^r$	41.83	42.74	29.57	30.22	18.10	18.49
$t$	Nettoreserven ${}_tV_{\overline{xn}}^r$					
3	8.1	11.2	4.7	6.6	3.9	5.3
6	14.5	20.4	10.9	15.1	9.1	11.6
9	15.2	23.7	15.9	21.8	13.5	16.9
12	7.1	17.2	15.4	22.6	14.5	18.8
15	-12.7	-2.0	3.1	11.1	8.6	13.7
18	-42.9	-33.1	-19.0	-11.8	-3.0	2.0
21	-76.6	-69.5	-44.2	-38.7	-17.2	-13.4
24	-100.3	-97.0	-63.9	-61.2	-32.0	-29.9
27	-88.7	-89.0	-60.4	-60.5	-34.6	-34.5

### Zitierte Literatur

- [1] *Jéquier Ch.*: L'assurance d'annuités et les combinaisons usuelles. «Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker» (MVSV), Heft 40.
- [2] *Jéquier Ch.*: Quelques remarques sur les réserves mathématiques de l'assurance à terme fixe et de l'assurance d'annuités (MVSV 49/1).
- [3] *Albers G.*: Ein vereinfachtes Verfahren der Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien (MVSV 47/2).
- [4] *Zwingli H.*: Risikozuschläge und mathematische Reserve in Funktion des Verlaufs der Übersterblichkeit bei minderwertigen Leben (MVSV 48/2).
- [5] *Jecklin H.*: Eine Näherungsformel für Übersterblichkeitszuschläge (MVSV 44/1).
- [6] *Ruch H.*: Über ein Schätzungsverfahren für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals (MVSV 50/2).

Meinem Kollegen Dr. Bernhard Romer sei an dieser Stelle für die Mithilfe bei der Ausgestaltung dieser Arbeit bestens gedankt.



