Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 53 (1953)

Artikel: Renten und Todesfallversicherungen höherer Ordnung

Autor: Rufener, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-551246

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Renten und Todesfallversicherungen höherer Ordnung

Von *E. Rufener*, Zürich

Es ist möglich, die kommutierten Zahlen zu beliebiger Ordnung als Operatorenprodukte aufzufassen. Für die Operatoren zeigt man das Bestehen der elementaren Rechengesetze (distributives Gesetz, kommutatives Gesetz), deren Anwendung mühelos und ohne jede Rechnung auf eine Reihe bekannter Relationen für die Barwerte von Renten und Todesfallversicherungen höherer Ordnung führt, die in der Regel voneinander unabhängig, aber stets mit denselben Methoden (partielle Integration oder Variabelntransformation mit Vertauschen der Integrationsreihenfolge in einem mehrfachen Integral) hergeleitet werden.

Der Zusammenhang zwischen den Operatoren, die auf diskontierte Zahlen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Art führen, wird vermittelt durch eine erweiterte Eulersche Summenformel mit verallgemeinerten Bernoullischen Zahlen als Koeffizienten. Ihre Anwendung führt auf eine Formelgruppe, die den Zusammenhang herstellt zwischen Grössen wie $(I\bar{a})_x$ und $(I\mathsf{a})_x$, $(II\bar{a})_x$ und $(II\mathsf{a})_x$ oder den entsprechenden Barwerten für die Todesfallversicherung.

Es ist uns bewusst, dass die Ergebnisse dieses Aufsatzes Relationen von arithmetisch einfacher Natur sind und dass ein Grossteil von ihnen bekannt ist. Den Zweck der Note sehen wir vor allem in einer methodischen Vereinfachung: wir erhalten von einem höhern Standpunkt aus Einblick in den einheitlichen Aufbau einer Klasse häufig verwendeter Beziehungen, die als Spezialfälle der elementaren Relation $\theta^a \theta^b = \theta^{a+b}$ erscheinen. Daneben vertieft die durch unsere Methode erzielte Verallgemeinerung das Verständnis für den einzelnen Sonderfall und wird auch damit zum Hilfsmittel für die praktische Anwendung.

Benützt wird ein sich auf die Abbildungseigenschaften spezieller Funktionaltransformationen (Fouriertransformation, Laplacetransformation) stützendes Verfahren, auf das man durch die Struktur der betrachteten Funktionen geführt wird. – Durch eine geeignete Funk-

tionaltransformation bildet man die gegebenen Funktionen (Originalfunktionen) in einen «Resultatraum» ab. Komplizierte und unübersichtliche Relationen zwischen den Originalfunktionen erscheinen im Bildraum als algebraisch einfache Beziehungen, die nach unbekannten Grössen aufgelöst oder aber in einer zur Lösung des gestellten Problems geeigneten Weise umgeformt werden können. Die inverse Transformation lässt uns dann aus den Ergebnissen im Bildraum auf die gesuchten Relationen zwischen den Originalfunktionen schliessen.

1. Die Zahlen $\bar{S}_x^r$ als Operatorenprodukte

Die Rekursion

$$\bar{S}_x^r = \int_x^\infty \bar{S}_\xi^{r-1}\, d\xi = \int_0^\infty \bar{S}_{x+t}^{r-1}\, dt, \quad (r > 0 \text{ ganz}), \tag{1}$$

die mit dem Anfangswert

$$\bar{S}_x^0 = D_x, \qquad D_x = l_x e^{-\delta x} \tag{2}$$

die diskontierten Zahlen kontinuierlicher Art der Lebenden zur Ordnung r definiert [a]), führt auf die Darstellung

$$\bar{S}_x^r = \left(\int_x^\infty d\xi\right)^r D_\xi = J^r\{D_x\}, \tag{3}$$

in der $\bar{S}_x^r$ Ergebnis einer r-fachen bestimmten Integration von D_x ist. Formel (3) ermöglicht aber auch eine abstrakte Interpretation: $\bar{S}_x^r$ entsteht aus D_x durch Ausüben des Operators J^r auf die Funktion D_x. J^r ist Operator einer bestimmten Integration, bei der der Punkt ∞ ausgezeichnet ist. J^r werde auf Funktionen ausgeübt, die im Unendlichen von beliebig hoher Ordnung verschwinden. Für das Produkt des Operators J^r auf die Funktion $\Phi(x)$, $J^r\{\Phi(x)\}$, also für das r-fache bestimmte Integral von $\Phi(x)$, gilt dann die Beziehung

$$\boxed{J^r\{\Phi(x)\} = \left(\int_x^\infty d\xi\right)^r \Phi(\xi) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_x^\infty (\xi - x)^{r-1}\,\Phi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty t^{r-1}\,\Phi(x+t)\, dt, \quad (r > 0) \quad \text{b)}} \tag{4}$$

---

a) Es ist $\bar{S}_x^0 = D_x$, $\bar{S}_x^1 = \bar{N}_x$, $\bar{S}_x^2 = \bar{S}_x$.

b) $J^r\{\Phi(x)\} = \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_x^\infty (\xi - x)^{r-1}\,\Phi(\xi)\, d\xi$ ist das Weylsche Integral der Ordnung r [1].

die das r-fache Integral durch ein einfaches darstellt und die für unsere Betrachtungen grundlegend ist. Insbesondere wird

$$\bar{S}_x^r = J^r\{D_x\} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^\infty (\xi - x)^{r-1} D_\xi \, d\xi = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty t^{r-1} D_{x+t} \, dt. \tag{5}$$

In (4) und (5) ist eine Beschränkung der Integrationsordnung r auf ganze Zahlen überflüssig; das Ergebnis der Integration ist analytische Funktion von r, das neben seiner Bedeutung als Ordnungszahl zur komplexen Variabeln wird [a]). Für unganzzahlige $r > 0$ interpoliert (4) die ganzzahligen Integrale. Die hier betrachteten diskontierten Zahlen $\bar{S}_x^r$ stehen somit im engen Zusammenhang mit dem Problem der kontinuierlichen Integration [1], [2].

2. Eigenschaften der Operatoren J^α

Mittels (4) verifiziert man für J^α das Bestehen der Gesetze

$$J^\alpha\{k\,\Phi(x)\} = k\,J^\alpha\{\Phi(x)\}, \tag{I}$$

und damit

$$J^\alpha\{\Phi_1(x) + \Phi_2(x)\} = J^\alpha\{\Phi_1(x)\} + J^\alpha\{\Phi_2(x)\} \tag{II}$$

$$J^\alpha\{k_1\,\Phi_1(x) + k_2\,\Phi_2(x)\} = k_1\,J^\alpha\{\Phi_1(x)\} + k_2\,J^\alpha\{\Phi_2(x)\}, \tag{II'}$$

das J^α als linearen Operator kennzeichnet. Die Grössen J^α erfüllen überdies das kommutative Gesetz (Gruppengesetz)

$$J^\alpha\{J^\beta[\Phi(x)]\} = J^{\alpha+\beta}\{\Phi(x)\} = J^\beta\{J^\alpha[\Phi(x)]\}$$

oder

$$J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta} = J^\beta J^\alpha. \tag{III}$$

Wir beweisen (III), indem wir zeigen, dass das Gruppengesetz unmittelbare Folge des Faltungssatzes der Fouriertransformation ist. Mit Hilfe der Funktion

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

---

[a]) Z. B. ist $\bar{S}_x^{\frac{3}{2}}$ die durch $\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty \sqrt{t}\, D_{x+t}\, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{t}\, D_{x+t}\, dt$ wohldefinierte Funktion.

ist $J\{\Phi(x)\}$ als Faltungsprodukt darstellbar

$$J\{\Phi(x)\} = \int_x^\infty \Phi(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^\infty \Phi(\xi)\, \eta(x-\xi)\, d\xi = \eta(x) * \Phi(x),$$

so dass $J^\alpha\{\Phi(x)\}$ Faltungsprodukt von $\Phi(x)$ mit der Faltungspotenz $\eta(x)^{*\alpha}$ und

$$J^\alpha\{J^\beta[\Phi(x)]\} = \eta(x)^{*\alpha} * \eta(x)^{*\beta} * \Phi(x)$$

wird. Weil das Faltungsprodukt kommutativ ist, entnehmen wir der letzten Beziehung

$$J^\alpha\{J^\beta[\Phi(x)]\} = \eta(x)^{*(\alpha+\beta)} * \Phi(x) = J^{\alpha+\beta}\{\Phi(x)\} = J^\beta\{J^\alpha[\Phi(x)]\}. \quad \text{(III)}$$

Beachtet man die Relation

$$\eta(x)^{*\alpha} = \begin{cases} \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \text{ mit } \eta(x)^{*\alpha} = \begin{cases} \infty, & x = 0, \ (\alpha < 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \ (\alpha = 1), \\ 0, & x = 0, \ (\alpha > 1) \end{cases}$$

so lässt sich aus

$$J^\alpha\{\Phi(x)\} = \eta(x)^{*\alpha} * \Phi(x)$$

noch mühelos auf die Formel

$$J^\alpha\{\Phi(x)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (\xi - x)^{\alpha-1} \Phi(\xi)\, d\xi, \quad (\alpha > 0) \qquad (4)$$

schliessen.

Definitionsgemäss sei

$$J^0\{\Phi(x)\} = \Phi(x); \qquad \text{(IV)}$$

der Operator J^0 lässt $\Phi(x)$ unverändert, stellt somit in der Operatorenmenge Einheitselement dar. Die Beziehung

$$\frac{d}{dx} \int_x^\infty \Phi(\xi)\, d\xi = -\Phi(x)$$

ermöglicht eine Erweiterung der Operatoren J^α auf negative Parameter. Mit der Bezeichnung $D = -\dfrac{d}{dx}$ folgt zunächst

$$D\{J[\Phi(x)]\} = \Phi(x) \quad \text{oder} \quad DJ = J^0. \qquad \text{(V)}$$

$D = -\dfrac{d}{dx}$ ist mithin zu J invers: $D = J^{-1}$.

Ebenso verifiziert man für ganzzahlige n die Relationen

$$D^n J^n = J^0, \; D^n J^\alpha = J^{\alpha-n}, \qquad (\alpha \geqslant n),$$

die $D^n = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n = J^{-n}$ als zu J^n inverses Element erklären und für beliebige $\beta \geqslant 0$ zur Darstellung

$$D^\beta = D^{[\beta]+1} J^{[\beta]+1-\beta}, \quad (0 \leqslant \beta - [\beta] < 1)$$

hinweisen.

Das Verschwinden der Funktion $\Phi(x)$ mitsamt ihren Ableitungen $\Phi'(x)$, $\Phi''(x)$, ..., im Punkt ∞ ist notwendige Bedingung, damit das Gruppengesetz

$$D^\beta J^\alpha = J^\alpha D^\beta = J^{\alpha-\beta},$$

oder

$$J^{-\beta} J^\alpha = J^\alpha J^{-\beta} = J^{\alpha-\beta}, \qquad (\alpha \geqslant 0, \; \beta \geqslant 0) \quad \text{(III')}$$

uneingeschränkt gilt [a]). Die in unsere Ausführungen eingehenden versicherungstechnischen Funktionen haben die Eigenschaft, im Unendlichen von beliebig hoher Ordnung zu verschwinden.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen halten wir noch die zu

$$\mathfrak{F}\{\Phi(x); y\} = \varphi(y)$$

gehörenden Verallgemeinerungen

$$\mathfrak{F}\{J^\alpha[\Phi(x)]; y\} = \frac{1}{(iy)^\alpha}\varphi(y)$$

und

$$\mathfrak{F}\{D^\alpha[\Phi(x)]; y\} = (iy)^\alpha \varphi(y) \tag{8}$$

fest.

3. Anwendung des Gruppengesetzes

In der Form $J^\alpha = J^\beta J^{\alpha-\beta}$ wenden wir das Gruppengesetz auf die Funktionen $\Phi(x) = D_x$ und $\Phi(x) = \mu_x D_x$ an und erhalten

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{S}_x^\alpha &= J^\alpha\{D_x\} = J^\beta\{\bar{S}_x^{\alpha-\beta}\} \\ \bar{R}_x^\alpha &= J^\alpha\{\mu_x D_x\} = J^\beta\{\bar{R}_x^{\alpha-\beta}\} \end{aligned}} \tag{9}$$

---

[a]) Die Operatoren J^α bilden wegen (III'), (IV) und (V) eine einparametrige Abelsche Gruppe.

Insbesondere ist
$$D\,\bar{S}_x^{\alpha} = \bar{S}_x^{\alpha-1}, \quad D\,\bar{R}_x^{\alpha} = \bar{R}_x^{\alpha-1} \tag{10}$$
und
$$\bar{S}_x^{-1} = J^{-1} D_x = -\frac{d}{dx} D_x = (\mu_x + \delta)\, D_x,$$
somit
$$\mu_x D_x = (J^{-1} - \delta)\, D_x. \tag{11}$$
Für $\bar{R}_x^{\alpha}$ gewinnen wir nun die Darstellung
$$\bar{R}_x^{\alpha} = J^{\alpha}\{\mu_x D_x\} = J^{\alpha}\{(J^{-1} - \delta)\, D_x\} = J^{\alpha-1} D_x - \delta\, J^{\alpha} D_x,$$
also die Beziehung
$$\bar{R}_x^{\alpha} = \bar{S}_x^{\alpha-1} - \delta\, \bar{S}_x^{\alpha}, \tag{12}$$
die in einfacher Weise die diskontierten Zahlen von Gestorbenen und Lebenden miteinander verknüpft.

Den Beziehungen
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k+1} \bar{S}_x^{k} = (-1)^{k+1} (\mu_x + \delta)\, D_x \begin{cases} > 0, & k = 2\varkappa + 1 \\ < 0, & k = 2\varkappa \end{cases},$$
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} \bar{R}_x^{k} = (-1)^{k} \mu_x D_x \begin{cases} > 0, & k = 2\varkappa \\ < 0, & k = 2\varkappa + 1 \end{cases}$$
entnimmt man noch, dass $\bar{S}_x^k$ für $k = \begin{Bmatrix} 2\varkappa + 1 & \text{konvex} \\ 2\varkappa & \text{konkav} \end{Bmatrix}$ k-ter Ordnung und $\bar{R}_x^k$ für $k = \begin{Bmatrix} 2\varkappa & \text{konvex} \\ 2\varkappa + 1 & \text{konkav} \end{Bmatrix}$ $(k-1)$-ter Ordnung ist [a]).

Für die durch
$$(I^{\alpha} \bar{a})_x = \frac{\bar{S}_x^{\alpha+1}}{D_x}, \quad (I^{\alpha} \bar{A})_x = \frac{\bar{R}_x^{\alpha+1}}{D_x}, \quad (\alpha \geqslant -1) \text{ [b]} \tag{13}$$
definierten Barwertfunktionen weist man nun mühelos mittels (9) die Relationen

---

[a]) $f^{(k+1)}(x) > 0$ (< 0) ist notwendig und hinreichend dafür, dass $f(x)$ konvex (konkav) k-ter Ordnung ist.

[b]) Diese Parameterauswahl genügt für die Praxis; sie ist an sich willkürlich und braucht nicht das Existenzgebiet der Formel zu bezeichnen. Insbesondere ist
$$(I^{-1} \bar{a})_x = 1, \quad (I^{0} \bar{a})_x = \bar{a}_x, \quad (I^{1} \bar{a})_x = (I\, \bar{a})_x, \quad (I^{2} \bar{a})_x = (II\, \bar{a})_x,$$
$$(I^{-1} \bar{A})_x = \mu_x, \quad (I^{0} \bar{A})_x = \bar{A}_x, \quad (I^{1} \bar{A})_x = (I\, \bar{A})_x, \quad (I^{2} \bar{A})_x = (II\, \bar{A})_x.$$

$$D_x(I^\alpha \bar{a})_x = J^\beta\{D_x(I^{\alpha-\beta}\bar{a})_x\} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\beta-1}(I^{\alpha-\beta}\bar{a})_{x+t}D_{x+t}\,dt, \quad (14)$$

$$D_x(I^\alpha \bar{A})_x = J^\beta\{D_x(I^{\alpha-\beta}\bar{A})_x\} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\beta-1}(I^{\alpha-\beta}\bar{A})_{x+t}D_{x+t}\,dt, \quad (15)$$

$$(\alpha \geqslant 0,\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha+1)$$

nach. Sie lauten beispielsweise für $\alpha = 2$:

$\alpha = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$
$(II\bar{a})_x =$	$\frac{1}{D_x}\int_0^\infty (I\bar{a})_{x+t}D_{x+t}\,dt$	$\frac{1}{D_x}\int_0^\infty t\bar{a}_{x+t}D_{x+t}\,dt$	$\frac{1}{2D_x}\int_0^\infty t^2 D_{x+t}\,dt$
$(II\bar{A})_x =$	$\frac{1}{D_x}\int_0^\infty (I\bar{A})_{x+t}D_{x+t}\,dt$	$\frac{1}{D_x}\int_0^\infty t\bar{A}_{x+t}D_{x+t}\,dt$	$\frac{1}{2D_x}\int_0^\infty t^2\mu_{x+t}D_{x+t}\,dt$

(12) führt noch auf die Beziehung

$$(I^\alpha \bar{A})_x = (I^{\alpha-1}\bar{a})_x - \delta(I^\alpha \bar{a})_x, \quad (\alpha \geqslant 0)\ ^{a)}. \quad (16)$$

4. Die Zahlen S_x^r

$$S_x^r = \sum_{\xi=x}^{\infty} S_\xi^{r-1}, \quad (r > 0, \text{ ganz}), \text{ mit } S_x^0 = D_x = l_x v^x\ ^{b)} \quad (17)$$

definiere, in geringfügiger Abweichung zu den üblichen Bezeichnungen, die diskontierte Zahl diskontinuierlicher Art der Lebenden zur Ordnung r. S_x^r geht aus D_x hervor durch r-fache Summation und ist auffassbar als Produkt des Operators S^r der r-fachen Summation auf die Grösse D_x:

$$S_x^r = \left(\sum_x^\infty\right)^r D_\xi = S^r D_x.$$

---

a) $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x$, $(I\bar{A})_x = \bar{a}_x - \delta(I\bar{a})_x$, $(II\bar{A})_x = (I\bar{a})_x - \delta(II\bar{a})_x$.

b) $S_x^0 = D_x$, $S_x^1 = N_x$, $S_x^2 = S_x$.

Durch die Funktionaltransformation werden die unübersichtlichen iterierten Summationsprozesse abgebildet in algebraisch einfache Operationen. Tabelle 1 orientiert über die im Original- und Bildraum einander zugeordneten Funktionen. Die Pfeilrichtung zeigt, in welcher Weise auf ein Ergebnis geschlossen wird.

Tabelle 1

Originalraum	Bildraum
$\Phi(x)$	$\varphi(y)$
$\Phi(x+\nu)$	$e^{-i\nu y}\varphi(y)$
$S\{\Phi(x)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi(x+\nu)$ $\rightarrow$	$\varphi_1(y) = \frac{1}{1-e^{-iy}}\varphi(y)$ (19)
$S^r\{\Phi(x)\} = S\{S^{r-1}[\Phi(x)]\}$ $\rightarrow$	$\varphi_r(y) = \frac{1}{1-e^{-iy}}\varphi_{r-1}(y) = \left(\frac{1}{1-e^{-iy}}\right)^r \varphi(y)$ (20)
(21) $= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{\nu} \Phi(x+\nu)$ $\leftarrow$	$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{\nu} e^{-i\nu y}\varphi(y)$, $(r>0)$
$S^0\{\Phi(x)\} = \Phi(x)$ $\leftarrow$	$\varphi_0(y) = \varphi(y)$, $(r=0)$
$S^{-n}\{\Phi(x)\} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \Phi(x+\nu)$ $\leftarrow$	$\varphi_{-n}(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} e^{-i\nu y}\varphi(y)$, $(r=-n)$
$= (-1)^n \Delta^n \Phi(x)$	

Dem symbolischen Produkt $S^r\Phi(x)$ entspricht im Bildraum das Produkt der r-ten Potenz $\left(\frac{1}{1-e^{-iy}}\right)^r$ mit der transformierten Funktion. Die Rechenregeln für die Potenzen $\left(\frac{1}{1-e^{-iy}}\right)^r$ übertragen sich nun auf die Produkte mit Operatoren und sind nicht auf positive und ganze Exponenten beschränkt. Wir entnehmen Tabelle 1 die Beziehungen

$$S^0\{\Phi(x)\} = \Phi(x) \quad \text{und} \quad S^{-n}\{\Phi(x)\} = (-1)^n \Delta^n \Phi(x);$$

S^0 ist mithin in der Operatorenmenge Einheitselement und $(-1)^n\Delta^n$ ist zu S^n invers.

Beziehung (21) gibt die Vorschrift, wie die r-fach iterierte Summe sich durch eine einfache Summation bestimmen lässt:

$$\boxed{S^r\{\Phi(x)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{\nu} \Phi(x+\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{r+\nu-1}{r-1} \Phi(x+\nu) \quad (21)}$$

Die Gesetze

$$S^\alpha\{k\Phi(x)\} = k S^\alpha\{\Phi(x)\}, \tag{I}$$

$$S^\alpha\{\Phi_1(x) + \Phi_2(x)\} = S^\alpha\{\Phi_1(x)\} + S^\alpha\{\Phi_2(x)\}, \tag{II}$$

$$S^\alpha\{k_1\Phi_1(x) + k_2\Phi_2(x)\} = k_1 S^\alpha\{\Phi_1(x)\} + k_2 S^\alpha\{\Phi_2(x)\}, \tag{II'}$$

charakterisieren S^α als linearen Operator. Wegen

$$S^\alpha\{S^\beta[\Phi(x)]\} = S^\beta\{S^\alpha[\Phi(x)]\} = S^{\alpha+\beta}\{\Phi(x)\}, \tag{III}$$

$$S^0\{\Phi(x)\} = \Phi(x), \tag{IV}$$

$$S^{-1}\{\Phi(x)\} = -\Delta\,\Phi(x), \tag{V}$$

bilden auch die Operatoren S^α eine einparametrige kontinuierliche Abelsche Gruppe.

Namentlich in der Form $S^\alpha = S^\beta S^{\alpha-\beta}$ ist das Gruppengesetz für versicherungstechnische Anwendungen geeignet und führt zu einer Reihe elementarer Relationen. Wir wählen hierzu $\Phi(x) = D_x$ und $\Phi(x) = v\,q_x D_x$; dann wird

$$\boxed{\begin{aligned} S_x^\alpha &= S^\alpha\{D_x\} = S^\beta\{S_x^{\alpha-\beta}\} \\ R_x^\alpha &= S^\alpha\{v\,q_x D_x\} = S^\beta\{R_x^{\alpha-\beta}\} \end{aligned}} \tag{22}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} S^{-1} S_x^\alpha &= -\Delta S_x^\alpha = S_x^{\alpha-1}, \\ S^{-1} R_x^\alpha &= -\Delta R_x^\alpha = R_x^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{23}$$

und

$$S_x^{-1} = -\Delta D_x = D_x - D_{x+1} = (v\,q_x + d)\,D_x,$$

mithin

$$v\,q_x D_x = (S^{-1} - d)\,D_x \tag{24}$$

und

$$R_x^\alpha = S^\alpha\{v\,q_x D_x\} = S^\alpha\{(S^{-1} - d)\,D_x\} = S^{\alpha-1} D_x - d\,S^\alpha D_x$$

oder

$$R_\alpha^x = S_x^{\alpha-1} - d\,S_x^\alpha. \tag{25}$$

Aus $$\Delta^{k+1} S_x^k = (-1)^{k+1}(v q_x + d) D_x \begin{cases} > 0, & k = 2\varkappa + 1 \\ < 0, & k = 2\varkappa \end{cases}$$

schliesst man, dass S_x^k für $k = \begin{Bmatrix} 2\varkappa + 1 & \text{konvex} \\ 2\varkappa & \text{konkav} \end{Bmatrix}$ k-ter Ordnung ist und ebenso folgt aus

$$\Delta^{k+1} R_x^k = (-1)^k v q_x D_x \begin{cases} > 0, & k = 2\varkappa \\ < 0, & k = 2\varkappa + 1 \end{cases},$$

dass die diskontierte Zahl R_x^k der Gestorbenen für $k = \begin{cases} 2\varkappa & \text{konvexe} \\ 2\varkappa + 1 & \text{konkave} \end{cases}$ Funktion $(k-1)$-ter Ordnung ist [a]).

Definiert man die Barwertfunktionen durch

$$(I^\alpha \mathsf{a})_x = \frac{S_x^{\alpha+1}}{D_x}, \quad (I^\alpha A)_x = \frac{R_x^{\alpha+1}}{D_x}, \quad (\alpha \geqslant -1) \text{ [b]} \tag{26}$$

so ergeben sich als triviale Folgen des kommutativen Gesetzes (III) die Beziehungen

$$\boxed{\begin{aligned} D_x(I^\alpha \mathsf{a})_x &= S^\beta\{D_x(I^{\alpha-\beta}\mathsf{a})_x\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta+\nu-1}{\beta-1} (I^{\alpha-\beta}\mathsf{a})_{x+\nu} D_{x+\nu}, \\ D_x(I^\alpha A)_x &= S^\beta\{D_x(I^{\alpha-\beta}A)_x\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta+\nu-1}{\beta-1} (I^{\alpha-\beta}A)_{x+\nu} D_{x+\nu}, \\ &\qquad (\alpha \geqslant 0;\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha+1) \end{aligned}} \tag{27}$$

die z. B. für $\alpha = 2$ explizite ausgeschrieben werden:

$\alpha = 2$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$
$(II\mathsf{a})_x =$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}(I\mathsf{a})_{x+\nu} D_{x+\nu}$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\mathsf{a}_{x+\nu} D_{x+\nu}$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+2}{2} D_{x+\nu}$
$(II A)_x =$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}(I A)_{x+\nu} D_{x+\nu}$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1) A_{x+\nu} D_{x+\nu}$	$\frac{1}{D_x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+2}{2} v q_{x+\nu} D_{x+\nu}$

$A_x = 1 - d\mathsf{a}_x$ lässt sich gemäss (25) zu

$$(I^\alpha A)_x = (I^{\alpha-1}\mathsf{a})_x - d(I^\alpha A)_x, \quad (\alpha \geqslant 0) \text{ verallgemeinern [c]}. \tag{28}$$

---

[a]) $\Delta^{k+1} f(x) > 0$ ist notwendig für die Konvexität k-ter Ordnung der Funktion $f(x)$ und hinreichend in bezug auf nur ganzzahlige Argumente.

[b]) $(I^{-1}\mathsf{a})_x = 1$, $(I^0\mathsf{a})_x = \mathsf{a}_x$, $(I^1\mathsf{a})_x = (I\mathsf{a})_x$, $(I^2\mathsf{a})_x = (II\mathsf{a})_x$,
$(I^{-1}A)_x = v q_x$, $(I^0 A)_x = A_x$, $(I^1 A)_x = (IA)_x$, $(I^2 A)_x = (II A)_x$.

[c]) $(IA)_x = \mathsf{a}_x - d(I\mathsf{a})_x$, $(II A)_x = (I\mathsf{a})_x - d(II\mathsf{a})_x$.

5. Bernoullische Polynome und Zahlen höherer Ordnung

Für nicht-negative, ganze ν und n lässt sich das Bernoullische Polynom vom Grade ν und der Ordnung n durch die Eigenschaften

$$\text{(I)} \quad \frac{d}{dx} B_\nu^{(n)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n)}(x), \qquad (\nu > 0,\ n \geqslant 0);$$

$$\text{(II)} \quad \int_0^1 \dots \int_0^1 B_\nu^{(n)}(\xi_1 + \dots + \xi_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_n = 0, \quad (\nu > 0),\ n > 0);$$

$$\text{(III)} \quad B_0^{(n)}(x) = 1$$

definieren, welche für $n = 1$ die gewöhnlichen Polynome $B_\nu(x)$ charakterisieren. Um die übrigen Eigenschaften der Polynome $B_\nu^{(n)}(x)$ zu überblicken, empfiehlt es sich, auf ihre erzeugende Funktion

$$z = F(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu^{(n)}(x)}{\nu!} y^\nu \tag{29}$$

zurückzugehen. (I) stellt für z eine lineare partielle Differentialgleichung

$$p - yz = 0.$$

mit dem allgemeinen Integral

$$z = \omega(y)\, e^{xy}$$

dar.

Die Mittelwerteigenschaft (II) und Beziehung (III) lassen uns $\omega(y)$ aus

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 F(\xi_1 + \dots + \xi_n, y)\, d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= \omega(y) \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{y(\xi_1 + \dots + \xi_n)}\, d\xi_1 \dots d\xi_n = \omega(y) \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)^n = 1,$$

bestimmen, so dass

$$z = F(x,y) = \frac{y^n e^{xy}}{(e^y - 1)^n} \tag{30}$$

elementar geschlossene Darstellung der erzeugenden Funktion der Bernoullischen Polynome höherer Ordnung ist.

Aus der Fülle der Beziehungen, die sich nun aus (29) und (30) ergeben, seien nur folgende erwähnt:

a) $B_\nu^{(0)}(x) = x^\nu$,

b) $\Delta B_\nu^{(n)}(x) = \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x) = \frac{d}{dx} B_\nu^{(n-1)}(x)$,

c) $B_\nu^{(m+n)}(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} B_\lambda^{(m)}(x) B_{\nu-\lambda}^{(n)}(y)$,

für $m = 0,\ y = 0$: $B_\nu^{(n)}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} B_{\nu-\lambda}^{(n)} x^\lambda$,

d) $B_\nu^{(n+1)}(x) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)}(x) + (x-n) \frac{\nu}{n} B_{\nu-1}^{(n)}(x)$,

e) Die Grössen $B_\nu^{(n)}(0) = B_\nu^{(n)}$, Bernoullische Zahlen höherer Ordnung genannt, sind als Koeffizienten der Reihenentwicklung

$$\left(\frac{y}{e^y - 1}\right)^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!} y^\nu, \qquad |y| < 2\pi \tag{31}$$

Polynome in n. Sie lassen sich etwa mit Hilfe der Rekursion

$$B_\nu^{(n)} = -\frac{n}{\nu} \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} B_\lambda B_{\nu-\lambda}^{(n)}, \qquad B_0^{(n)} = 1$$

aus den Bernoullischen Zahlen niedrigeren Grades und den gewöhnlichen Bernoullischen Zahlen B_ν berechnen:

$$B_0^{(n)} = 1$$

$$B_1^{(n)} = -\frac{n}{2}$$

$$B_2^{(n)} = \frac{3n^2 - n}{12}$$

$$B_3^{(n)} = -\frac{n^3 - n^2}{8}$$

$$B_4^{(n)} = \frac{15n^4 - 30n^3 + 5n^2 + 2n}{240}$$

$$B_5^{(n)} = -\frac{3n^5 - 10n^4 + 5n^3 + 2n^2}{96}$$

$$B_6^{(n)} = \frac{63n^6 - 315n^5 + 315n^4 + 91n^3 - 42n^2 - 16n}{4032}$$

Die für die Anwendungen bedeutsamen Werte $B_\nu^{(n)}$ sind in der nachfolgenden Tafel enthalten [a]).

Tabelle 2

$\nu \backslash n$	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	2	$\frac{11}{3}$	$\frac{35}{6}$
3	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-6	$-\frac{25}{2}$
4	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{251}{30}$	24
5	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{4}$	-9	$-\frac{475}{12}$

6. Der Zusammenhang zwischen den Operatoren J^r und S^r

Für die Differenz $(J^r - S^r)\,\Phi(x)$ lässt sich im Bildraum eine Potenzreihenentwicklung herleiten, die im Originalbereich den gesuchten Zusammenhang vermittelt. Mit Hilfe der Beziehungen (8) und (20) erhält man für

$$\mathfrak{F}\{(J^r - S^r)\,\Phi(x)\,;\,y\} = \left\{\frac{1}{(iy)^r} - \frac{1}{(1-e^{-iy})^r}\right\}\varphi(y) = \frac{1}{(iy)^r}\left\{1 - \left(\frac{-iy}{e^{-iy}-1}\right)^r\right\}\varphi(y)$$

und, weil der Klammerfaktor von $\varphi(y)$ im wesentlichen erzeugende Funktion der Bernoullischen Zahlen r-ter Ordnung ist, die nach Potenzen von iy fortschreitende Reihenentwicklung

$$\mathfrak{F}\{(J^r - S^r)\,\Phi(x)\,;\,y\} = \frac{1}{(iy)^r}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\,B_\nu^{(r)}}{\nu!}\,(iy)^\nu,$$

die invers transformiert wird:

$$\boxed{J^r - S^r = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}\,B_\nu^{(r)}}{\nu!}\,D^{\nu-r}} \tag{32}$$

---

[a]) Vgl. N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Berlin (1924), Springer. Die Polynome $B_\nu^{(n)}$ sind für $\nu = 0$ bis 12 im Tabellenanhang enthalten.

Die Differenz $J^r \Phi(x) - S^r \Phi(x)$ der Operatorenprodukte lässt sich demnach darstellen durch Integrale niedriger Ordnung und durch die Ableitungen von $\Phi(x)$. Entwicklungskoeffizienten sind die im vorangehenden Abschnitt eingeführten Bernoullischen Zahlen höherer Ordnung. Für $r = 1$ stimmt (32) mit Eulers Summenformel überein. Mit den Zahlenwerten von Tabelle 2 folgen aus (32) die Formeln

$$\begin{aligned} S &= J + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} D - \tfrac{1}{720} D^3, \\ S^2 &= J^2 + J + \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{12} D + \tfrac{1}{240} D^2, \\ S^3 &= J^3 + \tfrac{3}{2} J^2 + J + \tfrac{3}{8} + \tfrac{19}{240} D + \tfrac{1}{160} D^2, \end{aligned} \tag{33}$$

welche die mehrfachen Summen in Form einer symbolischen asymptotischen Reihe durch Integrale und Ableitungen ausdrücken. Durch sukzessive Elimination der Integrale niedrigerer Ordnung entstehen hieraus die Beziehungen

$$\begin{aligned} J &= S - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12} D + \tfrac{1}{720} D^3, \\ J^2 &= S^2 - S + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{240} D^2, \\ J^3 &= S^3 - \tfrac{3}{2} S^2 + \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{240} D, \end{aligned} \tag{34}$$

die mehrfache Integrale durch Summen und Ableitungen darstellen.

Auf die Funktion $\Phi(x) = D_x$ ausgeübt, ergeben sich aus (33) die Beziehungen

$$\begin{aligned} N_x &= \overline{N}_x + \tfrac{1}{2} D_x + \tfrac{1}{12} (\mu_x + \delta) D_x, \\ S_x &= \overline{S}_x + \overline{N}_x + \tfrac{5}{12} D_x + \tfrac{1}{12} (\mu_x + \delta) D_x, \\ S_x^3 &= \overline{S}_x^3 + \tfrac{3}{2} \overline{S}_x + \overline{N}_x + \tfrac{3}{8} D_x + \tfrac{19}{240} (\mu_x + \delta) D_x, \end{aligned} \tag{35}$$

während (34) auf

$$\begin{aligned} \overline{N}_x &= N_x - \tfrac{1}{2} D_x - \tfrac{1}{12} (\mu_x + \delta) D_x, \\ \overline{S}_x &= S_x - N_x + \tfrac{1}{12} D_x, \\ \overline{S}_x^3 &= S_x^3 - \tfrac{3}{2} S_x + \tfrac{1}{2} N_x + \tfrac{1}{240} (\mu_x + \delta) D_x \end{aligned} \tag{36}$$

führt.

(35) und (36) enthalten die Relationen, welche die Barwerte kontinuierlich und diskontinuierlich zahlbarer Leibrenten miteinander verbinden:

$$\begin{aligned} \mathsf{a}_x &= \bar{a}_x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12}(\mu_x + \delta) \text{ [a]} \\ (I\,\mathsf{a})_x &= (I\,\bar{a})_x + \bar{a}_x + \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{12}(\mu_x + \delta) \\ (II\,\mathsf{a})_x &= (II\,\bar{a})_x + \tfrac{3}{2}(I\,\bar{a})_x + \bar{a}_x + \tfrac{3}{8} + \tfrac{19}{240}(\mu_x + \delta) \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \mathsf{a}_x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}(\mu_x + \delta) \text{ [a]} \\ (I\,\bar{a})_x &= (I\,\mathsf{a})_x - \mathsf{a}_x + \tfrac{1}{12} \\ (II\,\bar{a})_x &= (II\,\mathsf{a})_x - \tfrac{3}{2}(I\,\mathsf{a})_x + \tfrac{1}{2}\mathsf{a}_x + \tfrac{1}{240}(\mu_x + \delta) \end{aligned} \tag{38}$$

7. Die Barwerte bei temporären Leistungen

Die Operation

$$J_n^r\{\Phi(x)\} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^n t^{r-1}\,\Phi(x+t)\,dt, \quad (n > 0;\ r \geqslant 1,\ \text{ganz})\ \text{[b]} \tag{39}$$

lässt sich durch elementares Umformen auf iterierte Operationen J zurückführen:

$$J_n^r\{\Phi(x)\} = J^r\{\Phi(x)\} - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{n^\lambda}{\lambda!} J^{r-\lambda}\{\Phi(x+n)\} \tag{40}$$

Für $\Phi(x) = D_x$ und $\Phi(x) = \mu_x D_x$ ergeben sich mithin die Beziehungen

$$J_n^r\{D_x\} = \bar{S}_{x:\overline{n}|}^r = \bar{S}_x^r - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{n^\lambda}{\lambda!} \bar{S}_{x+n}^{r-\lambda}, \tag{41}$$

$$J_n^r\{\mu_x D_x\} = \bar{R}_{x:\overline{n}|}^r = \bar{R}_x^r - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{n^\lambda}{\lambda!} \bar{R}_{x+n}^{r-\lambda}. \tag{42}$$

(42) lässt sich noch mittels $\bar{R}_x^r = \bar{S}_x^{r-1} - \delta \bar{S}_x^r$ überführen in

$$\bar{R}_{x:\overline{n}|}^r = \bar{S}_{x:\overline{n}|}^{r-1} - \delta \bar{S}_{x:\overline{n}|}^r - \frac{n^{r-1}}{(r-1)!} D_{x+n}. \tag{43}$$

---

[a]) Die Beziehungen zwischen $\bar{a}_x$ und a_x sind wohlbekannt und in der Regel in der Literatur erwähnt.

[b]) $J_n^0\{\Phi(x)\} = \Phi(x)$.

Die durch

$$(I^r \bar{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{S}^{r+1}_{x:\overline{n}|}}{D_x}, \quad (I^r \bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{R}^{r+1}_{x:\overline{n}|}}{D_x}, \qquad (r \geqslant -1) \tag{44}$$

erklärten temporären Barwertfunktionen können nun mit Hilfe von (41) und (42) durch Barwerte lebenslänglicher Renten- und Todesfallversicherungen ausgedrückt werden [a]). Für die gemischte Versicherung r-ter Ordnung (Barwert $(I^r \bar{A})_{x:\overline{n}|}$, Erlebensfalleistung $n^r/r!$) findet man als Verallgemeinerung der Relation $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|}$

$$(I^r \bar{A})_{x:\overline{n}|} = (I^{r-1} \bar{a})_{x:\overline{n}|} - \delta (I^r \bar{a})_{x:\overline{n}|}, \qquad (r \geqslant 0) \text{ [b]}. \tag{45}$$

Algebraisches Umformen [c]) führt die durch

$$S^r_n\{\Phi(x)\} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{r+\nu-1}{r-1} \Phi(x+\nu), \quad (n \geqslant 1;\ r \geqslant 1, \text{ ganz}) \text{ [d]} \tag{46}$$

erklärte Summe über in

$$\boxed{S^r_n\{\Phi(x)\} = S^r\{\Phi(x)\} - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} S^{r-\lambda}\{\Phi(x+n)\}} \tag{47}$$

die den Zusammenhang zwischen diskontinuierlich dargestellten Barwerten temporärer Leistungen mit den Barwerten lebenslänglicher Leistungen vermittelt.

---

[a]) Es wird etwa:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \bar{a}_{x+n},$$

$$(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} = (I\bar{a})_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[(I\bar{a})_{x+n} + n\,\bar{a}_{x+n}\right],$$

$$(II\bar{a})_{x:\overline{n}|} = (II\bar{a})_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[(II\bar{a})_{x+n} + n(I\bar{a})_{x+n} + \frac{n^2}{2} \bar{a}_{x+n}\right].$$

[b])

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|},$$

$$(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\overline{n}|} - \delta (I\bar{a})_{x:\overline{n}|},$$

$$(II\bar{A})_{x:\overline{n}|} = (I\bar{a})_{x:\overline{n}|} - \delta (II\bar{a})_{x:\overline{n}|}.$$

[c]) Man hat das aus der Identität

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q+1}} = \frac{1}{(1+x)^p} \frac{1}{(1+x)^{q+1}}$$

sich ergebende spezielle Additionstheorem für Binomialkoeffizienten

$$\binom{p+q+r}{r} = \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{p+\lambda-1}{\lambda} \binom{q+r-\lambda}{r-\lambda}, \qquad (r \geqq 0)$$

anzuwenden.

[d]) $S^0_n\{\Phi(x)\} = \Phi(x)$.

Die aus (47) für die Funktionen $\Phi(x) = D_x$ und $\Phi(x) = v q_x D_x$ sich ergebenden Beziehungen seien festgehalten:

$$S_n^r\{D_x\} = S_{x:\overline{n}|}^r = S_x^r - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} S_{x+n}^{r-\lambda} \text{ a)}, \tag{48}$$

$$S_n^r\{v q_x D_x\} = R_{x:\overline{n}|}^r = R_x^r - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} R_{x+n}^{r-\lambda} \text{ a)}. \tag{49}$$

Weil nach (24) $v q_x D_x = (S^{-1} - d) D_x$ ist, erhält man aus (49) die (43) entsprechende Relation

$$R_{x:\overline{n}|}^r = S_n^r\{(S^{-1}-d) D_x\} = S^r\{(S^{-1}-d) D_x\} - \sum_{\lambda=0}^{r-1} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} S^{r-\lambda}\{(S^{-1}-d) D_{x+n}$$

$$= S_{x:\overline{n}|}^{r-1} - d\, S_{x:\overline{n}|}^r - \binom{n+r-2}{r-1} D_{x+n}. \tag{50}$$

Für die durch

$$(I^r \mathrm{a})_{\overline{x:n}|} = \frac{S_{x:\overline{n}|}^{r+1}}{D_x}, \quad (I^r A)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{R_{x:\overline{n}|}^{r+1}}{D_x}, \quad (r \geqslant -1) \tag{51}$$

definierten Grössen gelten die Beziehungen

$$(I^r \mathrm{a})_{x:\overline{n}|} = (I^r \mathrm{a})_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} (I^{r-\lambda} \mathrm{a})_{x+n} \text{ b)}, \tag{52}$$

$$(I^r A)_{x:\overline{n}|}^1 = (I^r A)_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \sum_{\lambda=0}^{r} \binom{n+\lambda-1}{\lambda} (I^{r-\lambda} A)_{x+n}. \tag{53}$$

---

a) Formeln (48) und (49) sowie die daraus sich ergebenden Beziehungen für die Barwertfunktionen sind in einer nicht veröffentlichten Studie des Herrn Dr. P. Adrian, Zürich, enthalten.

b)
$$\mathrm{a}_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \mathrm{a}_{x+n},$$

$$(I\mathrm{a})_{x:\overline{n}|} = (I\mathrm{a})_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[(I\mathrm{a})_{x+n} + n\,\mathrm{a}_{x+n}\right],$$

$$(II\mathrm{a})_{x:\overline{n}|} = (II\mathrm{a})_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} \left[(II\mathrm{a})_{x+n} + n(I\mathrm{a})_x + \binom{n+1}{2} \mathrm{a}_{x+n}\right].$$

Wir erwähnen, dass beispielsweise die Barwerte $(II\mathrm{a})_{x:\overline{n}|}$ in der Formel für die ausreichende Bruttoprämie einer gemischten Versicherung mit niedriger Anfangsprämie verwendet werden, wenn ein bestimmter Gewinnsatz nach dem System der steigenden Dividende eingerechnet wird.

Als Verallgemeinerung von $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$ erhalten wir für den Barwert $(I^r A)_{x:\overline{n}|}$ der gemischten Versicherung r-ter Ordnung $\left(\text{Erlebensfallsumme } \binom{n+r-1}{r}\right)$

$$(I^r A)_{x:\overline{n}|} = (I^{r-1}\mathrm{a})_{x:\overline{n}|} - d(I^r \mathrm{a})_{x:\overline{n}|}, \quad (r \geqslant 0)\ ^{a)}. \tag{54}$$

8. Ungleichungen

Die grundlegenden Ungleichungen der Analysis geben Anlass zu einigen bemerkenswerten Beziehungen zwischen den betrachteten Barwertfunktionen [3], [4].

Schwarzsche Ungleichung $\left(\int f g\,dt\right)^2 \leqslant \int f^2 dt \int g^2 dt$ (Gleichheitszeichen, wenn $\alpha f \equiv \beta g$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$) [b]. Wir ordnen die in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Funktionen f und g zu. Die unter der einzigen Voraussetzung der Integrierbarkeit der beteiligten Funktionen gewonnenen Relationen sind ebenfalls in Tabelle 3 enthalten.

Tabelle 3

f	g	Ergebnis der Ungleichung
$\sqrt{t^{r+1} D_{x+t}}$	$\sqrt{t^{r-1} D_{x+t}}$	$(I^r \bar{a})^2_{x:\overline{n}|} < \frac{r+1}{r} (I^{r+1} \bar{a})_{x:\overline{n}|} (I^{r-1} \bar{a})_{x:\overline{n}|}$, $(r \geqslant 1)$
$\sqrt{t^{r+1} \mu_{x+t} D_{x+t}}$	$\sqrt{t^{r-1} \mu_{x+t} D_{x+t}}$	$(I^r \bar{A})^{2}_{1\,x:\overline{n}|} < \frac{r+1}{r} (I^{r+1} \bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} (I^{r-1} \bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}$, $(r \geqslant 1)$

Im Fall der lebenslänglichen Leibrente kann das Ergebnis noch etwas verschärft werden.

---

a) $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$,

$(IA)_{x:\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x:\overline{n}|} - d(I\mathrm{a})_{x:\overline{n}|}$,

$(IIA)_{x:\overline{n}|} = (I\mathrm{a})_{x:\overline{n}|} - d(II\mathrm{a})_{x:\overline{n}|}$.

b) Inequalities [3], Seite 132. Aufgaben und Lehrsätze [4], Seite 54.

$$\left(\int_0^\infty t^{a+b}\Phi\,dt\right)^2 < \left\{1-\left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right\}\int_0^\infty t^{2a}\Phi\,dt\int_0^\infty t^{2b}\Phi\,dt\ ^{a)},$$

$(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a \neq b;\ \Phi(t) \geqslant 0,\ \Phi(t_1) > \Phi(t_2),\ (t_1 < t_2))$ gibt nämlich für $a = \frac{r+1}{2},\ b = \frac{r-1}{2},\ a+b = r,\ (r \geqslant 1);\ \Phi(t) = D_{x+t}$

$$(I^r\bar{a})_x^2 < \frac{r+2}{r+1}(I^{r+1}\bar{a})_x(I^{r-1}\bar{a})_x, \quad (r \geqslant 1). \tag{55}$$

Cauchys Ungleichung $(\sum ab)^2 \leqslant \sum a^2 \sum b^2$ (Gleichheitszeichen, wenn $\alpha a_\nu = \beta b_\nu$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ [b]) führt bei der diskontinuierlichen Betrachtungsweise zu analogen Formeln. Setzt man

Tabelle 4

a	b
$\sqrt{\binom{r+\nu+1}{\nu} D_{x+\nu}}$	$\sqrt{\binom{r+\nu-1}{\nu} D_{x+\nu}}$
$\sqrt{\binom{r+\nu+1}{\nu} vq_{x+\nu} D_{x+\nu}}$	$\sqrt{\binom{r+\nu-1}{\nu} vq_{x+\nu} D_{x+\nu}}$

und beachtet

$$\frac{r}{r+1}\binom{r+\nu}{\nu}^2 < \binom{r+\nu+1}{\nu}\binom{r+\nu-1}{\nu}, \quad (r \geqslant 1),$$

so folgen

$$(I^r\mathsf{a})_{x:\overline{n}|}^2 < \frac{r+1}{r}(I^{r+1}\mathsf{a})_{x:\overline{n}|}(I^{r-1}\mathsf{a})_{x:\overline{n}|}, \quad (r \geqslant 1)$$

und (56)

$$(I^r A)_{x:\overline{n}|}^{\substack{2\\1}} < \frac{r+1}{r}(I^{r+1}A)_{x:\overline{n}|}^{\substack{1\\1}}(I^{r-1}A)_{x:\overline{n}|}^{\substack{1\\1}}, \quad (r \geqslant 1).$$

---

[a]) Inequalities [3], Seite 166.
[b]) Inequalities [3], Seite 16.

Tschebycheffs Ungleichung. $f(t)$ und $g(t)$ seien ähnlich geordnete Funktionen, d. h. $\{f(t_1)-f(t_2)\}\{g(t_1)-g(t_2)\} \geqslant 0$. Dann gilt für die gewogenen Mittelwerte

$$\mathfrak{M}_\varkappa(f) = \left(\frac{\int p f^\varkappa dt}{\int p\, dt}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \quad (p(t) > 0)$$

unter der weitern Voraussetzung $\varkappa > 0$

$$\mathfrak{M}_\varkappa(f)\, \mathfrak{M}_\varkappa(g) < \mathfrak{M}_\varkappa(fg)$$

(Ungleichung von Tschebycheff). Der Sinn der Ungleichung ist umzukehren, wenn $\{f(t_1)-f(t_2)\}\{g(t_1)-g(t_2)\} \leqslant 0$ ist; das Gleichheitszeichen gilt in ihr, wenn sich eine der beiden Funktionen zur Konstanten reduziert.

Für $$\varkappa = 1$$

und $p(t) = \bar{S}^{-1}_{x+t} = -D'_{x+t} = (\mu_{x+t} + \delta)\, D_{x+t}$, $f(t) = -t^\beta$, $g(t) = \dfrac{\bar{S}^{r-\beta}_{x+t}}{\bar{S}^{-1}_{x+t}}$, $(1 \leqslant \beta \leqslant r)$ sind, unter der Annahme $\mu_{x+t_1} < \mu_{x+t_2}$, $(t_1 < t_2)$, die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Man erhält zunächst

$$D_x \bar{S}^{r+1}_x < \bar{S}^\beta_x\, \bar{S}^{r-\beta+1}_x, \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant r)$$

und hieraus

$$(I^r \bar{a})_x < (I^{\beta-1} \bar{a})_x\, (I^{r-\beta} \bar{a})_x, \quad (1 \leqslant \beta \leqslant r). \tag{57}$$

Im Fall $\beta = 0$ gilt trivialerweise das Gleichheitszeichen. Die letzte Relation lässt sich zu

$$(I^r \bar{a})_x < (I^{\beta_1-1} \bar{a})_x\, (I^{\beta_2-1} \bar{a})_x \ldots (I^{\beta_r-1} \bar{a})_x\, (I^{r-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_r} \bar{a})_x$$

abschwächen und heisst für $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 1$

$$(I^r \bar{a})_x < \bar{a}^{r+1}_x \text{ [a]}. \tag{58}$$

Schliesslich wird man noch auf

$$(I^r \bar{a})_x < \sqrt[r]{\{\bar{a}_x (I\bar{a})_x \ldots (I^{r-1}\bar{a})_x\}^2}, \quad (r \geqslant 1) \tag{59}$$

geführt, wenn für $\beta = 1, 2, \ldots, r$ die Ungleichungen (57) miteinander multipliziert werden.

---

[a]) *A. Berger*, «Mathematik der Lebensversicherung», Wien (1939), Springer, Seite 104, Formel 98.

Wenn $\mu_x < \mu_{x+t}$, $(t > 0)$, fällt $\bar{a}_x$ monoton; wegen

$$\bar{a}_x' = (\mu_x + \delta)\,\bar{a}_x - 1 < 0, \quad \bar{a}_x < \frac{1}{\mu_x + \delta} \quad \text{und} \quad (I^{\beta-1}\bar{a})_x < \bar{a}_x^{\beta} < \frac{1}{(\mu_x + \delta)^{\beta}}$$

kann noch auf

$$(I^r\bar{a})_x < \frac{(I^{r-\beta}\bar{a})_x}{(\mu_x + \delta)^{\beta}}, \quad (1 \leqslant \beta \leqslant r+1) \tag{60}$$

geschlossen werden.

Die Mittelwerte

$$\mathfrak{M}_{\varkappa}(a) = \left(\frac{\sum p a^{\varkappa}}{\sum p}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \qquad (p_\nu > 0)$$

erfüllen die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_{\varkappa}(a)\,\mathfrak{M}_{\varkappa}(b) < \mathfrak{M}_{\varkappa}(ab) \text{ [a]}$$

unter den beiden Voraussetzungen

$(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geqslant 0$, d. h. $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$ ähnlich geordnet [b]) und $\varkappa > 0$.

Sind die beiden Folgen entgegengesetzt geordnet, so ist der Sinn der Ungleichung geändert; sie geht in eine Gleichung über, wenn eine der beiden Folgen aus identischen Gliedern besteht.

Wir wählen $\qquad \varkappa = 1,$

und $\qquad p_\nu = S_{x+\nu}^{-1} = -\Delta D_{x+\nu} = (v q_{x+\nu} + d)\,D_{x+\nu};$

unter der weitern Voraussetzung $q_{x+\nu_1} < q_{x+\nu_2}$ oder $p_{x+\nu_1} > p_{x+\nu_2}$, $(\nu_1 < \nu_2)$ sind die Folgen

$$a_\nu = -\binom{\beta+\nu}{\beta} \quad \text{und} \quad b_\nu = \frac{S_{x+\nu}^{r-\beta}}{S_{x+\nu}^{-1}}, \quad (1 \leqslant \beta \leqslant r)$$

ähnlich geordnet. Tschebycheffs Ungleichung gibt

$$D_x S_x^{r+1} < S_x^{\beta} S_x^{r-\beta+1}, \qquad (1 \leqslant \beta \leqslant r)$$

woraus

$$(I^r \mathsf{a})_x < (I^{\beta-1}\mathsf{a})_x\,(I^{r-\beta}\mathsf{a})_x, \quad (1 \leqslant \beta \leqslant r) \tag{61}$$

geschlossen wird. Für $\beta = 0$ wird $\mathsf{a}_\nu \equiv 1$, (61) geht in eine triviale Gleichheit über. Wird die Ungleichung wiederholt auf die rechts stehende Rente $(I^{r-\beta}\mathsf{a})_x$ angewendet,

---

[a]) Inequalities [3], Seite 43.

[b]) Dies ist der Fall, wenn beide Folgen nicht zunehmen.

so folgt

$$(I^r \mathsf{a})_x < (I^{\beta_1-1}\mathsf{a})_x (I^{\beta_2-1}\mathsf{a})_x \ldots (I^{\beta_r-1}\mathsf{a})_x (I^{r-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_r}\mathsf{a})_x$$

und für $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 1$.

$$(I^r \mathsf{a})_x < \mathsf{a}_x^{r+1}, \qquad (r \geqslant 1). \tag{62}$$

Formel (59) entspricht

$$(I^r \mathsf{a})_x < \sqrt[r]{\{\mathsf{a}_x (I\mathsf{a})_x \ldots (I^{r-1}\mathsf{a})_x\}^2}, \quad (r \geqslant 1). \tag{63}$$

Um für die Barwertfunktionen $(I^r \bar{a})_x$ und $(I^r \mathsf{a})_x$ Grenzen für die Abschätzung nach unten anzugeben, wenden wir die für konvexe Funktionen $\Phi(t)$, $(m \leqslant t \leqslant M)$, richtigen Ungleichungen

$$\Phi\left(\frac{\int p f\, dt}{\int p\, dt}\right) \leqslant \frac{\int p\, \Phi(f)\, dt}{\int p\, dt}, \quad (p(t) > 0, \ m \leqslant f(t) \leqslant M) \text{ a)}, \tag{64}$$

$$\Phi\left(\frac{\sum p f}{\sum p}\right) \leqslant \frac{\sum p\, \Phi(f)}{\sum p}, \quad (p_\nu \geqslant 0, \ m \leqslant f_\nu \leqslant M) \text{ b)} \tag{65}$$

an.

Es sei

$$\Phi(t) = \frac{t^r}{r!}, \quad (r \geqslant 2) \text{ c)}, \quad p(t) = -D'_{x+t} \quad \text{und} \quad f(t) = t.$$

(64) führt mit den Integrationsgrenzen 0 und ∞ zur Beziehung

$$(I^r \bar{a})_x > \frac{\bar{a}_x^{r+1}}{(r+1)!}, \qquad (r \geqslant 1) \tag{66}$$

die dann und nur dann zur Gleichung wird, wenn $f(t)$ konstant, d. h. $r = 0$ ist.

---

a) Inequalities [3], Seite 151. Aufgaben und Lehrsätze [4], Seite 53.

b) Inequalities [3], Seite 74. Aufgaben und Lehrsätze [4], Seite 53.

c) $\Phi''(t) = \dfrac{t^{r-2}}{(r-2)!} > 0$, $(t > 0 \colon r \geqq 2)$. $\Phi''(t) > 0$ ist notwendig und hinreichend für die Konvexität von $\Phi(t)$.

Für das für $t > 0$ konvexe $\Phi(t) = \binom{r+t-1}{r}$, $(r \geqslant 2)$, schliesst man mit $p_\nu = -\Delta D_{x+\nu}$ und $f_\nu = \nu + 1$ nach (65) zunächst auf

$$\frac{\mathsf{a}_x(\mathsf{a}_x+1)(\mathsf{a}_x+2)\ldots(\mathsf{a}_x+r-1)}{r!} < (I^{r-1}\mathsf{a})_x, \quad (r \geqslant 2), \tag{67}$$

woraus mühelos

$$(I^r\mathsf{a})_x > \frac{\mathsf{a}_x^{r+1}}{(r+1)!}, \quad (r \geqslant 1) \tag{68}$$

folgt.

Für $r = 1$ wird $\Phi(t) = t$ linear; (67) wird zur Gleichung.

Die Barwerte $(I^r\bar{a})_x$ und $(I^r\mathsf{a})_x$ lassen sich demzufolge in die Grenzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{a}_x^{r+1}}{(r+1)!} &< (I^r\bar{a})_x < \bar{a}_x^{r+1}, \\ \frac{\mathsf{a}_x^{r+1}}{(r+1)!} &< (I^r\mathsf{a})_x < \mathsf{a}_x^{r+1}, \end{aligned}\right\} \quad (r \geqslant 1) \tag{69}$$

einschliessen. Beispielsweise wird für $r = 1$ und 2

$$\frac{\bar{a}_x^2}{2} < (I\bar{a})_x < \bar{a}_x^2, \qquad \frac{\mathsf{a}_x^2}{2} < (I\mathsf{a})_x < \mathsf{a}_x^2,$$

$$\frac{\bar{a}_x^3}{6} < (II\bar{a})_x < \bar{a}_x^3, \qquad \frac{\mathsf{a}_x^3}{6} < (II\mathsf{a})_x < \mathsf{a}_x^3.$$

Literaturverzeichnis

[1] *H. Weyl*, «Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung», Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft Zürich, 62 (1917), S. 296–302.

[2] *B. Riemann*, «Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation», Gesammelte Werke, 2. Auflage (1892), S. 353–366.

[3] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya*, «Inequalities», Cambridge (1952), University Press.

[4] *G. Pólya, G. Szegö*, «Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis», Band 1, Berlin (1925), Springer.