Das Zinsfussproblem der Anwartschaften

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

In der Pensionsversicherung kommen bekanntlich ausser Leibrenten auch Anwartschaften auf Invaliden-, Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten vor. Auf die Leibrenten der Aktiven, Invaliden und der Hinterbliebenen können alle Näherungsformeln des Zinsfussproblemes genau so wie in der Lebensversicherung angewendet werden. Anders steht es mit den Anwartschaften.

Im folgenden wollen wir das Zinsfussproblem auf die Anwartschaften von konstanten Leibrenten erweitern. Dabei werden wir uns nur auf die Herleitung von Näherungsformeln der Anwartschaften der Aktiven auf konstante Invalidenrente beschränken. Unsere Ausführungen gelten selbstverständlich mutatis mutandis auch für alle anderen Anwartschaften auf konstante periodische Leistungen.

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, die Invalidenrente wird am Ende des Jahres, in welchem die Invalidität eingetreten ist, flüssig und in vorschüssigen Jahresraten im Betrage 1 gezahlt. Unter dieser Voraussetzung kann der Wert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenrente $A^{i}_{\underset{x}{a}}$ geschrieben werden, wie folgt:

$$A^{i}_{\underset{x}{a}} = \frac{1}{l^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} j_{x+t}\, \mathfrak{a}^{i}_{x+t} (1+i)^{-t} = \frac{1}{D^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} dj_{x+t}\, \mathfrak{a}^{i}_{x+t}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet:

l^{aa}_{x} = die Zahl der x-jährigen Aktiven,

$D^{aa}_{x} = l^{aa}_{x} v^{x}$ = die diskontierte Zahl der x-jährigen Aktiven,

j_{x+t} = die Zahl der Invaliden, welche sich aus der Gesamtheit der Aktiven l^{aa}_{x+t-1} im Laufe eines Jahres rekrutiert und das Alter von $x+t$ Jahren als Invalide erreicht haben,

$dj_{x+t} = j_{x+t}\, v^{x+t}$ = die diskontierte Zahl der im Laufe eines Jahres entstandenen Invaliden im Alter von $x+t$ Jahren,

i = der Zinsfuss,

$(1+i)^{-1} = v$ = der Diskontfaktor,

$\mathfrak{a}^i_x = \frac{1}{l^i_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} l^i_{x+t}(1+i)^{-t} = \frac{N^i_x}{D^i_x}$ = der Barwert der konstanten, vorschüssigen Leibrente eines x-jährigen Invaliden.

Der Unterschied des Zinsfussproblemes zwischen den Leibrenten und der Anwartschaften besteht darin, dass der Zinsfuss i bei den Anwartschaften zweimal unter dem Summenzeichen $\sum$ vorkommt, nämlich im Diskontfaktor v und ausserdem in der Funktion $\mathfrak{a}^i_x$, bei Leibrenten dagegen nur einmal, nämlich nur im Diskontfaktor. Bei der Differentiation der Anwartschaft $A^i_{\underset{x}{a}}$ nach dem Zinsfusse i muss natürlich dieser Unterschied berücksichtigt werden. Um die Berechnung der Ableitungen von $A^i_{\underset{x}{a}}$ zu vereinfachen, schreiben wir:

$$\left.\begin{aligned}
M_0 &= \frac{N^i_{x+t}}{D^i_{x+t}} = \mathfrak{a}^i_{x+t} \\
M_1 &= -\frac{S^i_{x+t+1}}{D^i_{x+t}} = -(I a^i)_{x+t} \\
M_2 &= \frac{2\, S^{i(2)}_{x+t+1}}{D^i_{x+t}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_n &= (-1)^n\, n!\, \frac{S^{i(n)}_{x+t+1}}{D^i_{x+t}}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Funktion $M_n v^n$ hat die Eigenschaft [1])

$$\frac{d^\nu (M_n v^n)}{di^\nu} = M_{n+\nu}\, v^{n+\nu}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Funktion M_n können die Ableitungen von $A^i_{\underset{x}{a}}$ leicht berechnet werden.

[1]) «Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 51. Band, Heft 2, 15. Oktober 1951, Seiten 191–210.

Man findet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA^{i}_{\overset{a}{x}}}{di} &= \frac{v}{D^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} dj_{x+t}\,[M_1 - t\,M_0] \\
\frac{d^2A^{i}_{\overset{a}{x}}}{di^2} &= \frac{v^2}{D^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} dj_{x+t}\,[M_2 - 2t\,M_1 + (t+1)_2\,M_0] \\
\frac{d^3A^{i}_{\overset{a}{x}}}{di^3} &= \frac{v^3}{D^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} dj_{x+t}\,[M_3 - 3t\,M_2 + 3(t+1)_2\,M_1 - (t+2)_3\,M_0) \\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d^nA^{i}_{\overset{a}{x}}}{di^n} &= \frac{v^n}{D^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} \sum_{\nu=0}^{n} dj_{x+t}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(t+\nu-1)_{\nu}\,M_{n-\nu}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Zur Berechnung der Ableitungen von $A^{i}_{\overset{a}{x}}$, welche für das Zinsfussproblem der Anwartschaft der Aktiven auf Invalidenrente notwendig sind, brauchen wir die Barwerte der höheren steigenden Invalidenrenten (2), welche in den Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherung nicht enthalten sind. Die Berechnung dieser und sonstiger Hilfswerte erfordert aber mehr Arbeit als eine direkte Berechnung des exakten Wertes der Anwartschaft. Diese Schwierigkeit kann zum Teil umgangen werden, wie wir nun zeigen wollen.

Bezeichnen wir mit y_{x+t} die Zahl der Invaliden, welche sich aus der Gesamtheit der Aktiven l^{aa}_{x} im Laufe von t Jahren rekrutiert und das Alter von $x+t$ Jahren als Invalide erreicht haben. Den Wert der Anwartschaft eines x-jährigen Aktiven auf Invalidenrente können wir somit auch folgendermassen schreiben

$$A^{i}_{\overset{a}{x}} = \frac{1}{l^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} y_{x+t}(1+i)^{-t}. \quad (5)$$

Die Formel (5) enthält den Zinsfuss i nur einmal unter dem Summenzeichen und zwar im Diskontfaktor, weil y_{x+t} frei vom Zinsfusse ist. Infolgedessen können die Formeln des Zinsfussproblemes der Leibrenten auch auf (5) angewendet werden. Die Formel (5) hat jedoch den Nachteil, dass ihre Ableitungen nach dem Zinsfuss in der Praxis keinen Wert haben. Es ist z. B.

$$\frac{dA^{i}_{\overset{a}{x}}}{di} = -\frac{v}{l^{aa}_{x}} \sum_{t=1}^{\omega-x} t\,y_{x+t}\,v^{t}. \quad (6)$$

Die Formel (6) bedeutet den um ein Jahr diskontierten Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf steigende Invalidenrenten in dem Sinne, dass alle Invaliden ohne Rücksicht, wann die Invalidität eingetreten ist, am Ende einzelner Jahre gleiche Leistungen bekommen. Nach (6) bekommen die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre die steigende Rente $1, 2, 3, 4, \ldots$, die aus dem zweiten Versicherungsjahre die steigende Rente $2, 3, 4, 5 \ldots$, die aus dem dritten Versicherungsjahre die steigende Rente $3, 4, 5, 6 \ldots$, usw. Nach den Bestimmungen der Pensionsversicherungsgesetze wird dagegen die Höhe der Invalidenrente mit Rücksicht auf die bis zum Eintritte der Invalidität verflossene Versicherungszeit bemessen, und zwar im gleichbleibenden Betrage. Die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 1, die aus dem zweiten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 2, die aus dem dritten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 3 usw.

Diejenigen Formeln des Zinsfussproblemes, welche weder Ableitungen nach dem Zinsfusse noch die steigenden Renten bzw. die zweiten, dritten usw. Summen der diskontierten Zahlen enthalten, können infolge (5) auch auf die Anwartschaften angewendet werden. Einige solche, für die Versicherungspraxis wichtige Formeln, wollen wir nun kurz erwähnen.

Aus drei Barwerten der konstanten, nachschüssigen Leibrente ${}^0a = a_x(i_0)$, $a = a_x(i)$, ${}^1a = a_x(i_1)$ können wir den Wert der Poukkaschen Funktion

$$k_1 = k_1(x+1, i) = \frac{S^{(2)}_{x+1} N_{x+1}}{S^2_{x+1}}. \tag{7}$$

näherungsweise berechnen [1]). Zu diesem Zwecke bilden wir aus ${}^0a$ und ${}^1a$ das arithmetische Mittel

$$A = \frac{{}^0a(i_1 - i) + {}^1a(i - i_0)}{i_1 - i_0} \tag{8}$$

und das harmonische Mittel

$$H = \frac{{}^0a\,{}^1a(i_1 - i_0)}{{}^0a(i - i_0) + {}^1a(i_1 - i)}. \tag{9}$$

[1]) «Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblems von hoher Präzision», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 52. Band, Heft 2, 15. Oktober 1952, Seiten 161–172.

Es ist

$$k_1 \sim \frac{A - a}{A - H}. \tag{10}$$

Sind die Zinsfüsse $i_0 < i < i_1$ equidistant, dann bekommen wir aus (10)

$$k_1 \sim \frac{({}^0a - a + {}^1a)^2 - a^2}{({}^0a - {}^1a)^2}. \tag{11}$$

Haben wir einmal den Wert von k_1, dann können wir mittels linearen Kombination

$$a \sim A(1 - k_1) + Hk_1 \tag{12}$$

vorzügliche Näherungswerte von a interpolieren.

Dieses Verfahren ist auf alle Anwartschaften auf konstante Renten anwendbar. Dazu brauchen wir in den Formeln (8) bis (12) die Rentenbarwerte ${}^0a$, a, ${}^1a$ mit den entsprechenden Werten der Anwartschaften ${}^0A$, A, ${}^1A$ zu vertauschen. So z. B. bekommen wir vorzügliche Näherungswerte der Poukkaschen Funktion aus der Formel

$$k_1 = \frac{({}^0A - A + {}^1A)^2 - A^2}{({}^0A - {}^1A)^2}, \tag{13}$$

insofern die Anwartschaften auf konstante periodische Leistungen ${}^0A$, A, ${}^1A$ den equidistanten Zinsfüssen $i_0 < i < i_1$ entsprechen usw. Ähnliche einfache Näherungsformeln existieren auch für andere Mittelwerte so z. B. für das geometrische und für das antiharmonische Mittel.

Mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung, welche für die Zinsfüsse $i = 0\%$, 1%, 2%, 3%, 4%, 5%, 6% aufgestellt sind, haben wir nach (13) die Näherungswerte von $k_1(x,i)$ für $i = 1\%$, 2%, 3%, 4%, 5%, für $x = 16, 21, \ldots. 56, 61$, für die Anwartschaften der Aktiven auf Invaliden-, Witwen-, Waisenrenten bis zum vollendeten 18. Lebensjahre und für die Anwartschaften der Invaliden auf Witwen- und Waisenrenten berechnet allerdings mit einer Abweichung. Nach jugoslawischen als auch nach den meisten anderen Pensionsversicherungsgesetzen werden die Renten nicht in Jahres-, sondern in Monatsraten gezahlt, beginnend unmittelbar nach der Feststellung der Invalidität bzw. unmittelbar nach dem Tode des Versicherten, also nicht erst am Ende des Jahres, in welchem das versicherte Ereignis eingetreten ist. Der Wert der Anwartschaft eines Aktiven auf Invalidenrente wird also in der Praxis nicht nach (1), sondern nach folgender Formel berechnet:

$$A_{\overset{a}{x}}^{i} = \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=0}^{\omega-x} dj_{x+0\cdot5+t}\, \mathsf{a}_{x+0\cdot5+t}^{i(12)}. \tag{14}$$

Es ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{a}_x^{(12)} &= \mathsf{a}_x - \delta \\ \delta &= \frac{1+i}{12} \sum_{n=1}^{11} \frac{n}{12+ni} \sim 0\cdot46. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die Grösse δ ist also auch eine Funktion des Zinsfusses i. Die Berücksichtigung dieser Tatsache bei Bildung der Ableitungen der Anwartschaften kompliziert aber ungemein die Formeln und die Berechnungen. Nachdem der Unterschied zwischen a_x und $\mathsf{a}_x^{(12)}$ mit Ausnahme der höchsten Alter relativ nicht gross ist, haben wir einfach die nach (14) und analogen Formeln berechneten Werte der Anwartschaften in (13) eingesetzt. Auf diese Art gefundene Werte von $k_1(x,i)$ sind in der Tabelle 1 im Anhange gegeben, und zwar nur bis $x = 61$. In höheren Altern ist die Differenz $\mathsf{a}_x - \mathsf{a}_x^{(12)}$ relativ gross, was grössere Unregelmässigkeiten in der Serie der k_1-Werte zur Folge hat.

Trotz der Abweichung der Formel (14) von der Formel (1) ist die Variabilität der Grösse k_1 bis $x = 61$ nicht gross. Infolgedessen können die in der Tabelle 1 gegebenen Werte von k_1 auch auf die Anwartschaften anderer Rechnungsgrundlagen mit Vorteil angewendet werden.

Meistens sind die Rechnungsgrundlagen der Pensionsversicherung nur zu einem einzigen Zinsfusse i_0 berechnet. In solchen Fällen reichen die Grössen k_1 in der Tabelle 1 nicht aus. Die Güttingersche Näherungsformel für Rentenbarwerte lautet bekanntlich [1])

$$a \sim {}^0a \left[1 + (2k_1 - 1)(i - i_0)\, v_0 \frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0N_{x+1}}\right]^{\frac{1}{1-2k_1}}. \tag{16}$$

In (16) haben wir aber die zweite Summe der diskontierten Zahlen ${}^0S_{x+1}$. Wir können diese Grösse mittels

$$k_0 = k_0(x+1, i) = \frac{S_{x+1}\, D_{x+1}}{N_{x+1}^2} \tag{17}$$

---

[1]) Güttinger, Paul: «Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 30. Heft, Oktober 1935.

eliminieren und nachher aus ${}^0a$ und ${}^1a$ nach der Formel (16) den Wert von k_0 näherungsweise berechnen. Die Variabilität von k_0 ist aber bedeutend grösser als die Variabilität von k_1. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn wir schlechtweg setzen

$$A \sim {}^0A\,[1 + g(i-i_0)]^{\frac{1}{1-2k_1}}. \tag{18}$$

Aus (18) folgt für $i = i_1$

$$g \sim \frac{\left(\frac{{}^0A}{{}^1A}\right)^{2k_1-1} - 1}{i_1 - i_0}. \tag{19}$$

Die mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach (19) berechneten Werte von g sind in der Tabelle 2 im Anhange gegeben. Auch die Variabilität von $g(x,i)$ ist bis $x = 61$ nicht gross. Daraus schliessen wir, dass die Werte von g auch auf die Anwartschaften anderer Rechnungsgrundlagen mit Vorteil angewendet werden können, wenigstens bei kleineren Zinsspannungen $i - i_0$. Wir bemerken noch, dass bei $i_0 < i$ die Präzision von (18) grösser ist als bei $i_0 > i$.

Anhang

Tabelle 1

Die Werte von $k_1(x,i)$, berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach der Formel (13)

$x \diagdown i$	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	$i \diagup x$
	Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente $A\overset{i}{\underset{x}{a}}$					
16	0.58	0.58	0.58	0.59	0.60	16
21	0.58	0.59	0.59	0.60	0.61	21
26	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	26
31	0.59	0.60	0.60	0.61	0.62	31
36	0.60	0.60	0.61	0.62	0.62	36
41	0.61	0.61	0.62	0.63	0.63	41
46	0.63	0.63	0.64	0.64	0.65	46
51	0.64	0.65	0.65	0.66	0.66	51
56	0.67	0.68	0.68	0.69	0.69	56
61	0.71	0.71	0.72	0.72	0.72	61
	Anwartschaften der Aktiven auf Witwenrente $A\overset{w}{\underset{x}{a}}$					
16	0.58	0.58	0.58	0.59	0.59	16
21	0.58	0.59	0.59	0.59	0.60	21
26	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	26
31	0.59	0.59	0.60	0.60	0.61	31
36	0.59	0.60	0.60	0.61	0.62	36
41	0.60	0.60	0.61	0.61	0.63	41
46	0.60	0.61	0.61	0.62	0.65	46
51	0.61	0.62	0.62	0.63	0.67	51
56	0.63	0.63	0.63	0.64	0.70	56
61	0.64	0.64	0.65	0.65	0.65	61

$x \backslash i$	1%	2%	3%	4%	5%	i / x
	Anwartschaften der Aktiven auf Waisenrente ${}^{18}A^{k}_{\underset{x}{a}}$					
16	0.60	0.58	0.58	0.58	0.59	16
21	0.62	0.60	0.60	0.60	0.61	21
26	0.64	0.62	0.62	0.63	0.63	26
31	0.66	0.63	0.64	0.64	0.65	31
36	0.69	0.65	0.66	0.66	0.66	36
41	0.72	0.66	0.67	0.68	0.68	41
46	0.75	0.68	0.68	0.69	0.69	46
51	0.79	0.68	0.69	0.69	0.70	51
56	0.83	0.69	0.70	0.70	0.70	56
61	0.90	0.69	0.68	0.69	0.70	61
	Anwartschaften der Invaliden auf Witwenrente $A^{w}_{\underset{x}{i}}$					
16	0.61	0.62	0.63	0.63	0.63	16
21	0.64	0.64	0.65	0.66	0.66	21
26	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	26
31	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	31
36	0.65	0.66	0.67	0.68	0.68	36
41	0.64	0.65	0.66	0.67	0.68	41
46	0.64	0.65	0.66	0.67	0.69	46
51	0.65	0.66	0.67	0.67	0.73	51
56	0.65	0.66	0.67	0.67	0.80	56
61	0.66	0.67	0.67	0.68	0.71	61
	Anwartschaften der Invaliden auf Waisenrente ${}^{18}A^{k}_{\underset{x}{i}}$					
16	0.64	0.59	0.59	0.60	0.60	16
21	0.69	0.63	0.63	0.64	0.64	21
26	0.74	0.67	0.67	0.67	0.67	26
31	0.77	0.69	0.69	0.70	0.70	31
36	0.80	0.71	0.71	0.71	0.72	36
41	0.82	0.72	0.73	0.73	0.74	41
46	0.85	0.73	0.74	0.74	0.75	46
51	0.89	0.75	0.76	0.76	0.77	51
56	0.92	0.75	0.76	0.76	0.77	56
61	0.97	0.72	0.73	0.73	0.75	61

Tabelle 2

Die Werte von $g(x,i)$, berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der jugoslawischen Pensionsversicherung nach der Formel (19)

$x \backslash i$	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	i / x
	Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente A_{x}^{ai}					
16	6.6	6.6	6.7	6.8	6.8	16
21	6.2	6.3	6.4	6.6	6.7	21
26	5.9	5.9	6.1	6.2	6.3	26
31	5.5	5.6	5.6	5.7	5.8	31
36	5.2	5.2	5.2	5.3	5.3	36
41	4.9	4.9	4.9	4.9	4.9	41
46	4.7	4.7	4.7	4.7	4.6	46
51	4.5	4.4	4.4	4.4	4.3	51
56	4.4	4.3	4.2	4.2	4.1	56
61	4.2	4.1	4.1	4.0	3.9	61
	Anwartschaften der Aktiven auf Witwenrente A_{x}^{aw}					
16	8.3	8.1	7.9	7.7	7.6	16
21	7.8	7.7	7.7	7.6	7.5	21
26	7.3	7.2	7.3	7.3	7.4	26
31	6.7	6.8	6.8	6.8	7.0	31
36	6.3	6.3	6.3	6.3	6.6	36
41	6.0	5.9	5.9	5.9	6.4	41
46	5.7	5.7	5.7	5.7	6.5	46
51	5.4	5.4	5.3	5.3	6.7	51
56	5.3	5.2	5.1	5.0	6.9	56
61	5.1	5.0	4.9	4.8	4.6	61

$x \backslash i$	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	i / x
	Anwartschaften der Aktiven auf Waisenrente ${}^{18}A_{x}^{\overset{k}{a}}$					
16	7.3	5.8	5.7	5.4	5.2	16
21	7.5	6.0	5.9	5.7	5.5	21
26	7.8	6.2	6.1	5.8	5.7	26
31	7.9	6.1	6.0	5.8	5.7	31
36	8.0	5.9	5.9	5.7	5.5	36
41	8.2	5.6	5.8	5.5	5.4	41
46	8.3	5.5	5.4	5.3	5.1	46
51	8.7	5.2	5.2	5.0	4.9	51
56	9.1	4.9	4.8	4.7	4.5	56
61	10.1	4.6	4.1	4.1	4.1	61
	Anwartschaften der Invaliden auf Witwenrente $A_{x}^{\overset{w}{i}}$					
16	8.9	8.6	8.5	8.1	7.2	16
21	9.2	9.1	9.0	8.8	7.9	21
26	9.1	9.1	9.0	8.9	7.9	26
31	8.6	8.6	8.5	8.4	7.7	31
36	7.9	7.9	7.9	7.8	7.2	36
41	7.3	7.2	7.2	7.1	6.9	41
46	6.7	6.7	6.7	6.6	6.9	46
51	6.3	6.3	6.2	6.2	7.2	51
56	5.9	5.8	5.7	5.6	9.1	56
61	5.5	5.4	5.3	5.2	5.7	61
	Anwartschaften der Invaliden auf Waisenrente ${}^{18}A_{x}^{\overset{k}{i}}$					
16	7.1	4.6	4.4	4.3	4.1	16
21	8.0	5.2	5.0	4.8	4.7	21
26	8.3	5.4	5.2	5.0	4.8	26
31	8.3	5.4	5.2	5.0	4.8	31
36	8.3	5.4	5.3	5.0	4.9	36
41	8.3	5.4	5.3	5.0	4.9	41
46	8.6	5.3	5.3	5.0	4.9	46
51	9.1	5.3	5.3	5.0	5.0	51
56	9.6	5.2	5.2	4.9	4.8	56
61	10.5	4.7	4.6	4.5	4.3	61