

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 53 (1953)

**Artikel:** Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben

**Autor:** Hansen, C.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-551154>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben

Von *Chr. Hansen*, Kopenhagen

Eine Lebensversicherung, die zur Zeit  $t = 0$  von einer  $x$ -jährigen Person abgeschlossen wird, ist durch die Sterbeintensität  $\mu_{x+t}$ , die Verzinsungsintensität  $\delta$ , die einmalige Einlage  ${}_0V_x \geq 0$ , die Nettoprämie  $\bar{P}_{x+t} \geq 0$  und die Sterbesumme  $S_t \geq 0$  bestimmt.

Das Nettodeckungskapital  ${}_tV_x$  zur Zeit  $t$  ist durch

$${}_tV_x = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}} \int_0^t (\bar{P}_{x+\xi} - S_\xi \mu_{x+\xi}) D_{x+\xi} d\xi$$

gegeben. Die Versicherung existiert für alle  $t \geq 0$ , für welche  ${}_tV_x \geq 0$  ist.

Da bei gegebener Sterbesumme  $S_t$  eine Lebensversicherungsart durch die Auszahlungsbedingungen des Nettodeckungskapitals bestimmt ist, gehört die Versicherung unendlich vielen Versicherungsarten an.

Es gilt der

Satz:

*Jede Lebensversicherung auf ein Leben ist in eine Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme und eine Aufsparung zerlegbar.*

Beweis:

Differenzierung der Gleichung des Nettodeckungskapitals  ${}_tV_x$  gibt:

$$\frac{d}{dt} {}_tV_x = \bar{P}_{x+t} + {}_tV_x \delta - (S_t - {}_tV_x) \mu_{x+t}.$$

Durch Einführung der Risikosumme  ${}_tR_x = S_t - {}_tV_x$  geht diese Differenzialgleichung in die Differenzialgleichung der Risikosumme:

$$\frac{d}{dt} {}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \left( \bar{P}_{x+t} + S_t \delta - \frac{d}{dt} S_t \right)$$

über, falls  $S_t$  differenzierbar ist.

Durch die Funktion:

$$\pi_{x+t} = \bar{P}_{x+t} + S_t \delta - \frac{d}{dt} S_t$$

geht die letzte Differenzialgleichung in

$$\frac{d}{dt} S_t = S_t \delta + \bar{P}_{x+t} - \pi_{x+t}$$

und

$$\frac{d}{dt} {}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \pi_{x+t}$$

über.

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$S_t - S_0 = e^{\delta t} \int_0^t (S_0 \delta + \bar{P}_{x+\xi} - \pi_{x+\xi}) e^{-\delta \xi} d\xi$$

und

$$S_0 - S_t + {}_tV_x = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}} \int_0^t ((\pi_{x+\xi} - S_0 \delta) - S_0 \mu_{x+\xi}) D_{x+\xi} d\xi.$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung stellt eine Aufspargung  ${}_tV_x^{Aufsp.}$  mit dem Anfangswert Null und dem Sparbeitrag:

$$S_0 \delta + \bar{P}_{x+t} - \pi_{x+t} = \bar{P}_{x+t}^{Aufsp.}$$

dar.

Die rechte Seite der zweiten Gleichung stellt das Nettodeckungskapital  ${}_tV_x^{Vers.}$  einer Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme  $S_0$ , einmaliger Einlage  ${}_0V_x$  und Nettoprämie:

$$\pi_{x+t} - S_0 \delta = \bar{P}_{x+t}^{Vers.}$$

dar.

Hieraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + {}_tV_x^{Aufsp.} \geq 0, \\ {}_tV_x &= {}_tV_x^{Vers.} + {}_tV_x^{Aufsp.} \geq 0, \\ \bar{P}_{x+t} &= \bar{P}_{x+t}^{Vers.} + \bar{P}_{x+t}^{Aufsp.} \geq 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen wäre.

Beispiel:

$S_t = S_1 + S_2 e^{\delta t}$  ( $S_1$  und  $S_2$  Konstanten) und  $\bar{P}_{x+t} = \bar{P} = \text{Konstante}$ .

Nach den obigen Formeln wird:

$$\begin{aligned} S_0 &= S_1 + S_2; \\ \pi_{x+t} &= \bar{P} + S_1 \delta; \\ \bar{P}^{Vers.} &= \bar{P} - S_2 \delta; \\ \bar{P}^{Aufsp.} &= S_2 \delta; \\ {}_tV_x^{Aufsp.} &= S_2(e^{\delta t} - 1); \\ {}_tV_x^{Vers.} &= {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\bar{P} - S_2 \delta) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}} - (S_1 + S_2) \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}; \end{aligned}$$

oder besser:

$${}_tR_x^{Vers.} = {}_0R_x \frac{D_x}{D_{x+t}} - (\bar{P} + S_1 \delta) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

in Verbindung mit:

$${}_tV_x^{Vers.} = S_1 + S_2 - {}_tR_x^{Vers.} \quad \text{und} \quad {}_0R_x = S_1 + S_2 - {}_0V_x.$$

Dieses Beispiel umfasst fast alle Versicherungsarten, die bei kommerzieller Lebensversicherung auf ein Leben vorkommen.