

# Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben

Autor(en): **Hansen, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **53 (1953)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-551154>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben

Von *Chr. Hansen*, Kopenhagen

Eine Lebensversicherung, die zur Zeit  $t = 0$  von einer  $x$ -jährigen Person abgeschlossen wird, ist durch die Sterbeintensität  $\mu_{x+t}$ , die Verzinsungsintensität  $\delta$ , die einmalige Einlage  ${}_0V_x \geq 0$ , die Nettoprämie  $\bar{P}_{x+t} \geq 0$  und die Sterbesumme  $S_t \geq 0$  bestimmt.

Das Nettodeckungskapital  ${}_tV_x$  zur Zeit  $t$  ist durch

$${}_tV_x = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}} \int_0^t (\bar{P}_{x+\xi} - S_\xi \mu_{x+\xi}) D_{x+\xi} d\xi$$

gegeben. Die Versicherung existiert für alle  $t \geq 0$ , für welche  ${}_tV_x \geq 0$  ist.

Da bei gegebener Sterbesumme  $S_t$  eine Lebensversicherungsart durch die Auszahlungsbedingungen des Nettodeckungskapitals bestimmt ist, gehört die Versicherung unendlich vielen Versicherungsarten an.

Es gilt der

Satz:

*Jede Lebensversicherung auf ein Leben ist in eine Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme und eine Aufsparung zerlegbar.*

Beweis:

Differenzierung der Gleichung des Nettodeckungskapitals  ${}_tV_x$  gibt:

$$\frac{d}{dt} {}_tV_x = \bar{P}_{x+t} + {}_tV_x \delta - (S_t - {}_tV_x) \mu_{x+t}.$$

Durch Einführung der Risikosumme  ${}_tR_x = S_t - {}_tV_x$  geht diese Differenzialgleichung in die Differenzialgleichung der Risikosumme:

$$\frac{d}{dt} {}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \left( \bar{P}_{x+t} + S_t \delta - \frac{d}{dt} S_t \right)$$

über, falls  $S_t$  differenzierbar ist.

Durch die Funktion:

$$\pi_{x+t} = \bar{P}_{x+t} + S_t \delta - \frac{d}{dt} S_t$$

geht die letzte Differenzialgleichung in

$$\frac{d}{dt} S_t = S_t \delta + \bar{P}_{x+t} - \pi_{x+t}$$

und

$$\frac{d}{dt} {}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \pi_{x+t}$$

über.

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$S_t - S_0 = e^{\delta t} \int_0^t (S_0 \delta + \bar{P}_{x+\xi} - \pi_{x+\xi}) e^{-\delta \xi} d\xi$$

und

$$S_0 - S_t + {}_tV_x = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}} \int_0^t ((\pi_{x+\xi} - S_0 \delta) - S_0 \mu_{x+\xi}) D_{x+\xi} d\xi.$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung stellt eine Aufspargung  ${}_tV_x^{Aufsp.}$  mit dem Anfangswert Null und dem Sparbeitrag:

$$S_0 \delta + \bar{P}_{x+t} - \pi_{x+t} = \bar{P}_{x+t}^{Aufsp.}$$

dar.

Die rechte Seite der zweiten Gleichung stellt das Nettodeckungskapital  ${}_tV_x^{Vers.}$  einer Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme  $S_0$ , einmaliger Einlage  ${}_0V_x$  und Nettoprämie:

$$\pi_{x+t} - S_0 \delta = \bar{P}_{x+t}^{Vers.}$$

dar.

Hieraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + {}_tV_x^{Aufsp.} \geq 0, \\ {}_tV_x &= {}_tV_x^{Vers.} + {}_tV_x^{Aufsp.} \geq 0, \\ \bar{P}_{x+t} &= \bar{P}_{x+t}^{Vers.} + \bar{P}_{x+t}^{Aufsp.} \geq 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen wäre.

Beispiel:

$S_t = S_1 + S_2 e^{\delta t}$  ( $S_1$  und  $S_2$  Konstanten) und  $\bar{P}_{x+t} = \bar{P} = \text{Konstante}$ .

Nach den obigen Formeln wird:

$$\begin{aligned} S_0 &= S_1 + S_2; \\ \pi_{x+t} &= \bar{P} + S_1 \delta; \\ \bar{P}^{Vers.} &= \bar{P} - S_2 \delta; \\ \bar{P}^{Aufsp.} &= S_2 \delta; \\ {}_tV_x^{Aufsp.} &= S_2(e^{\delta t} - 1); \\ {}_tV_x^{Vers.} &= {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\bar{P} - S_2 \delta) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}} - (S_1 + S_2) \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}; \end{aligned}$$

oder besser:

$${}_tR_x^{Vers.} = {}_0R_x \frac{D_x}{D_{x+t}} - (\bar{P} + S_1 \delta) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

in Verbindung mit:

$${}_tV_x^{Vers.} = S_1 + S_2 - {}_tR_x^{Vers.} \quad \text{und} \quad {}_0R_x = S_1 + S_2 - {}_0V_x.$$

Dieses Beispiel umfasst fast alle Versicherungsarten, die bei kommerzieller Lebensversicherung auf ein Leben vorkommen.