Über einen Satz der Mathematik der Lebensversicherung auf ein Leben

Von *Chr. Hansen*, Kopenhagen

Eine Lebensversicherung, die zur Zeit $t = 0$ von einer x-jährigen Person abgeschlossen wird, ist durch die Sterbeintensität μ_{x+t}, die Verzinsungsintensität δ, die einmalige Einlage ${}_0V_x \geqslant 0$, die Nettoprämie $\overline{P}_{x+t} \geqslant 0$ und die Sterbesumme $S_t \geqslant 0$ bestimmt.

Das Nettodeckungskapital ${}_tV_x$ zur Zeit t ist durch

$$ {}_tV_x = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}} \int_0^t (\overline{P}_{x+\xi} - S_\xi \mu_{x+\xi})\, D_{x+\xi}\, d\xi $$

gegeben. Die Versicherung existiert für alle $t \geqslant 0$, für welche ${}_tV_x \geqslant 0$ ist.

Da bei gegebener Sterbesumme S_t eine Lebensversicherungsart durch die Auszahlungsbedingungen des Nettodeckungskapitals bestimmt ist, gehört die Versicherung unendlich vielen Versicherungsarten an.

Es gilt der

Satz:

Jede Lebensversicherung auf ein Leben ist in eine Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme und eine Aufsparung zerlegbar.

Beweis:

Differenzierung der Gleichung des Nettodeckungskapitals ${}_tV_x$ gibt:

$$ \frac{d}{dt}\,{}_tV_x = \overline{P}_{x+t} + {}_tV_x \delta - (S_t - {}_tV_x)\, \mu_{x+t}\,. $$

Durch Einführung der Risikosumme ${}_tR_x = S_t - {}_tV_x$ geht diese Differenzialgleichung in die Differenzialgleichung der Risikosumme:

$$\frac{d}{dt}\,{}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \left(\overline{P}_{x+t} + S_t\,\delta - \frac{d}{dt}\,S_t\right)$$

über, falls S_t differenzierbar ist.

Durch die Funktion:

$$\pi_{x+t} = \overline{P}_{x+t} + S_t\,\delta - \frac{d}{dt}\,S_t$$

geht die letzte Differenzialgleichung in

$$\frac{d}{dt}\,S_t = S_t\,\delta + \overline{P}_{x+t} - \pi_{x+t}$$

und

$$\frac{d}{dt}\,{}_tR_x = {}_tR_x(\mu_{x+t} + \delta) - \pi_{x+t}$$

über.

Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$S_t - S_0 = e^{\delta t}\int\limits_0^t (S_0\,\delta + \overline{P}_{x+\xi} - \pi_{x+\xi})\,e^{-\delta\xi}\,d\xi$$

und

$$S_0 - S_t + {}_tV_x = {}_0V_x\,\frac{D_x}{D_{x+t}} + \frac{1}{D_{x+t}}\int\limits_0^t \left((\pi_{x+\xi} - S_0\,\delta) - S_0\,\mu_{x+\xi}\right) D_{x+\xi}\,d\xi.$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung stellt eine Aufsparung ${}_tV_x^{Aufsp.}$ mit dem Anfangswert Null und dem Sparbeitrag:

$$S_0\,\delta + \overline{P}_{x+t} - \pi_{x+t} = \overline{P}_{x+t}^{Aufsp.}$$

dar.

Die rechte Seite der zweiten Gleichung stellt das Nettodeckungskapital ${}_tV_x^{Vers.}$ einer Lebensversicherung mit konstanter Sterbesumme S_0, einmaliger Einlage ${}_0V_x$ und Nettoprämie:

$$\pi_{x+t} - S_0\,\delta = \overline{P}_{x+t}^{Vers.}$$

dar.

Hieraus folgt, dass:

$$S_t = S_0 + {}_tV_x^{Aufsp.} \geqq 0,$$

$${}_tV_x = {}_tV_x^{Vers.} + {}_tV_x^{Aufsp.} \geqq 0,$$

$$\overline{P}_{x+t} = \overline{P}_{x+t}^{Vers.} + \overline{P}_{x+t}^{Aufsp.} \geqq 0,$$

was zu beweisen wäre.

Beispiel:

$S_t = S_1 + S_2 e^{\delta t}$ (S_1 und S_2 Konstanten) und $\overline{P}_{x+t} = \overline{P} =$ Konstante.

Nach den obigen Formeln wird:

$$S_0 = S_1 + S_2;$$

$$\pi_{x+t} = \overline{P} + S_1 \delta;$$

$$\overline{P}^{Vers.} = \overline{P} - S_2 \delta;$$

$$\overline{P}^{Aufsp.} = S_2 \delta;$$

$${}_tV_x^{Aufsp.} = S_2(e^{\delta t} - 1);$$

$${}_tV_x^{Vers.} = {}_0V_x \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\overline{P} - S_2 \delta) \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+t}}{D_{x+t}} - (S_1 + S_2) \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+t}}{D_{x+t}};$$

oder besser:

$${}_tR_x^{Vers.} = {}_0R_x \frac{D_x}{D_{x+t}} - (\overline{P} + S_1 \delta) \frac{\overline{N}_x - \overline{N}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

in Verbindung mit:

$${}_tV_x^{Vers.} = S_1 + S_2 - {}_tR_x^{Vers.} \quad \text{und} \quad {}_0R_x = S_1 + S_2 - {}_0V_x.$$

Dieses Beispiel umfasst fast alle Versicherungsarten, die bei kommerzieller Lebensversicherung auf ein Leben vorkommen.