

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	53 (1953)
<b>Artikel:</b>	La génération d'une chaîne de Markoff
<b>Autor:</b>	Franckx, E.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-551140">https://doi.org/10.5169/seals-551140</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## La génération d'une chaîne de Markoff

Par *E. Franckx*, Bruxelles

### I. Position du problème

#### 1. Résumé

Dans une note antérieure [1] nous avons mis en lumière la relation existante entre les échelles numériques et certaines chaînes de *Markoff* particulières que nous avons dénommées *élémentaires*.

D'une manière plus précise, nous avons constaté qu'à toute chaîne de *Markoff* d'ordre  $r$ , on pouvait adjoindre un nombre  $k \leq r$  de chaînes de *Markoff* élémentaires.

Le but de cette note est de montrer:

- a) comment les chaînes de *Markoff* d'ordre  $r$  peuvent être engendrées par les chaînes élémentaires,
- b) que les chaînes élémentaires sont irréductibles, en ce sens qu'une chaîne élémentaire ne permet plus de définir un nouvel élément générateur.

#### 2. Chaîne de Markoff d'ordre $r$ — Génération globale [2]

Rappelons brièvement les éléments de départ de la théorie classique. Une chaîne de *Markoff* comporte essentiellement:

- 1<sup>o</sup> Une suite de matrices  $\{M^n\}$ , définie par:

$$M^1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & \cdots & p_{r1}^1 \\ p_{12}^1 & \cdots & p_{r2}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1r}^1 & \cdots & p_{rr}^1 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \quad M^n = \begin{bmatrix} p_{11}^n & \cdots & p_{r1}^n \\ p_{12}^n & \cdots & p_{r2}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1r}^n & \cdots & p_{rr}^n \end{bmatrix} \quad (2,1)$$

où  $p_{ij}^n$  indique la probabilité de passage de l'état  $E_i$  à l'état  $E_j$  en  $n$  stades.

On a nécessairement quels que soient  $i$  et  $n$

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}^n = 1. \quad (2,2)$$

2<sup>o</sup> Une relation de composition

$$p_{ij}^n = \sum_{k=1}^r p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}^1 \quad (2,3)$$

relation qui exprime que le système, après  $(n-1)$  stades, a nécessairement occupé un des états  $E_1, E_2 \dots E_k \dots E_r$ .

Cette relation de composition définit la *génération globale* de la chaîne de *Markoff*, car la relation matricielle:

$$M^{n-1} M^1 = M^n \quad (2,4)$$

multiplication colonne par ligne, résulte directement de la relation de composition (2,3).

*Remarque:* Théoriquement les  $p_{ij}^n$  étant des probabilités représentent des quantités non négatives.

Cependant toute la théorie développée est applicable, si les  $p_{ij}^1$  de la matrice  $M^1$  obéissent à la seule condition.

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}^1 = 1, \quad i = 1, 2 \dots r.$$

C'est à ce point de vue que nous nous plaçons.

### 3. Génération par colonnes

I. Nous conviendrons:

a) de représenter une matrice quelconque d'ordre  $n$ , sous la forme vectorielle:

$$M^n = [\bar{p}_1^n, \bar{p}_2^n \dots \bar{p}_r^n], \quad (3,1)$$

$\bar{p}_i$  indiquant un point, dans l'espace à  $r$  dimensions, qui fixe les probabilités de passage en  $n$  stades, à partir de l'état  $E_i$ ;

b) de représenter de plus, la matrice d'ordre 1, sous la forme colonne, c'est-à-dire:

$$M^1 = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \vdots \\ \bar{l}_r \end{bmatrix}, \quad (3,2)$$

$\bar{l}_i$  indiquant, un vecteur dont les coordonnées sont les éléments de la ligne  $i$ ;

c) moyennant cette convention la relation de composition (2,3) peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire:

$$p_{ij}^n = \bar{p}_i^{n-1} \bar{l}_j \quad (3,3)$$

avec

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}^n = \sum_{j=1}^r \bar{p}_i^{n-1} \bar{l}_j = 1. \quad (3,4)$$

II. Il résulte de la notation l'isomorphisme:

$$\bar{p}_i^n \Leftrightarrow (\bar{p}_i^{n-1} \bar{l}_1, \bar{p}_i^{n-1} \bar{l}_2 \dots \bar{p}_i^{n-1} \bar{l}_r) \quad (3,5)$$

par suite le vecteur  $\bar{p}_i^n$  est complètement déterminé, par la connaissance de son antécédent  $\bar{p}_i^{n-1}$  et des  $r$  vecteurs de base:  $\bar{l}_1 \dots \bar{l}_r$ .

En conclusion, il est possible d'étudier la génération de la suite:

$$\bar{p}_i^1 \bar{p}_i^2 \dots \bar{p}_i^n \dots \quad (3,6)$$

en dehors des éléments des autres colonnes.

Sous cet angle, la suite de *Markoff* est complètement définie par  $r$  suites du type (3,6), pour  $i = 1, 2 \dots r$ . La génération plus particulière, qui précède, sera dénommée *génération par colonnes*, et une suite (3,6) *une suite de colonnes*.

Nous démontrerons que cette génération est complètement déterminée par une chaîne élémentaire de *Markoff* (mais qui peut être une chaîne dont la dernière colonne de la matrice  $M^{(1)}$  contient des éléments négatifs).

## II. Suite de colonnes et chaîne élémentaire adjointe

### 4. Base d'une suite de colonnes

a) Les différents vecteurs  $\bar{p}_i^n$  appartiennent à l'espace à  $r$  dimensions, il en résulte qu'à partir d'un indice  $k+1 \leq r+1$  on tombe nécessairement sur un vecteur  $\bar{p}_i^{k+1}$ , qui est linéairement dépendant de ses antécédents, qui eux-mêmes constituent un ensemble de  $k$  vecteurs:

$$\bar{p}_i^k \bar{p}_i^{k-1} \dots \bar{p}_i^1 \quad (4,1)$$

*linéairement indépendants*. Nous exprimons aussi simplement le fait que la suite  $\{\bar{p}_i^n\}$  définit une multiplicité linéaire de dimension au plus égale à  $r$ .

On aura par hypothèse:

$$\bar{p}_i^{k+1} = q_1 \bar{p}_i^k + \dots + q_k \bar{p}_i^1, \quad (4,2)$$

b) d'autre part (4,2) donne:

$$\bar{p}_i^{k+1} \bar{l}_j = q_1 \bar{p}_i^k \bar{l}_j + \dots + q_k \bar{p}_i^1 \bar{l}_j,$$

et d'après (3,3) et (3,4)

$$p_{ij}^{k+2} = q_1 p_{ij}^{k+1} + \dots + q_k p_{ij}^2,$$

de cette formule, on déduit un double résultat:

1<sup>o</sup> en sommant par rapport à  $j$ , on obtient:

$$1 = q_1 + q_2 + \dots + q_k; \quad (4,4)$$

2<sup>o</sup> et puisque cette relation est vraie quel que soit  $j$ , on en déduit la relation vectorielle.

$$\bar{p}_i^{k+2} = q_1 \bar{p}_i^{k+1} + \dots + q_k \bar{p}_i^2 \quad (4,5)$$

ce qui prouve que la relation (4,2) est vraie quand on passe de  $k+1$  à  $k+2$ , elle est générale par induction, et on obtient la relation récurrente,

$$\bar{p}_i^n = q_1 \bar{p}_i^{n-1} + \dots + q_k \bar{p}_i^{n-k+1}$$

relation qui prouve: *la suite de colonne  $\bar{p}_i^n$  est engendrée par une échelle vectorielle [1]*. Remarquons que les nombres  $q_1 \dots q_k$  ne sont pas nécessairement non négatifs.

c) La relation (4,5) indique que tout vecteur dépend linéairement des  $n$  vecteurs qui le précèdent dans la suite, on en déduit de proche en proche que  $\bar{p}_i^n$  dépend linéairement des  $k$  premiers vecteurs:  $\bar{p}_i^k \dots \bar{p}_i^1$  (4,1) et par suite cet ensemble (4,1) constitue une *base* de la suite on pourra écrire:

$$\bar{p}_i^n = x_1^n \bar{p}_i^k + x_2^n \bar{p}_i^{k-1} + \dots + x_k^n \bar{p}_i^1, \quad (4,6)$$

$x_1^n \dots x_k^n$ : étant les coordonnées du vecteur  $\bar{p}_i^n$  dans la base choisie.

## 5. Tableau des coordonnées et sa génération

a) En vertu de l'existence de la base, la suite des colonnes est complètement définie si on connaît le tableau des coordonnées,

à  $k$  lignes infinies:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_k & \dots & x_k^n & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & q_{k-1} & \dots & x_{k-1}^n & \dots \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & q_1 & \dots & x_1^n & \dots \end{array} \quad (4,7)$$

où les éléments de la colonne d'ordre  $n$ , donnent les coordonnées de  $\bar{p}_i^n$ . Les  $k$  premières colonnes résultant du fait que les  $k$  premiers vecteurs sont linéairement indépendants (base de la multiplicité).

La  $(k+1)$  colonne résulte de la relation (4,2).

b) Chacune de ses lignes est une solution particulière d'une même échelle numérique.

En remplaçant dans (4,5) des différents vecteurs, pour leur expression dans la base (4,6), on obtient immédiatement:

$$\begin{aligned} x_1^n &= q_1 x_1^{n-1} + q_2 x_1^{n-2} + \dots + q_k x_1^{n-k} \\ &\vdots \\ x_k^n &= q_1 x_k^{n-1} + q_2 x_k^{n-2} + \dots + q_k x_k^{n-k} \end{aligned} \quad (4,8)$$

ce qui démontre la propriété: Remarquons en outre qu'il résulte de (4,8)

$$\sum_{i=1}^k x_i^n = 1.$$

## 6. Chaîne de Markoff élémentaire adjointe

a) Considérons la chaîne de *Markoff*, dite *élémentaire*, définie par:

$$M^1 \equiv \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & q_k \\ 1 & 0 & & 0 & q_{k-1} \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & & 1 & q_1 \end{array} \right] \quad (4,9)$$

et où la dernière colonne peut éventuellement comporter des éléments négatifs, mais

$$\sum q_i = 1.$$

b) *Théorème de base.*

*La matrice d'ordre n, de la chaîne est:*

$$M^n = \begin{bmatrix} x_k^{n+1} & x_k^{n+2} & \dots & x_k^{n+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n+1} & x_1^{n+2} & \dots & x_1^{n+k} \end{bmatrix}. \quad (4,10)$$

En effet, le théorème est vrai pour  $n = 1$ , en vertu du (4,9) s'il est vrai par  $n$ , en vertu de la méthode globale (2,4)

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M^1 \\ &= \begin{bmatrix} x_k^{n+1} & x_k^{n+2} & \dots & x_k^{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+2} & \dots & x_k^{n+k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_k \\ 1 & 0 & & & \vdots & p_{k-1} \\ 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & p_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_k^{n+2} & \dots & x_k^{n+k}, p_k x_k^{n+1} + p_{k-1} x_k^{n+2} + \dots + p_1 x_k^{n+k} \\ \vdots & & \\ x_1^{n+2} & \dots & x_1^{n+k}, p_k x_1^{n+1} + \dots & \dots & \dots & + p_1 x_1^{n+k} \end{bmatrix} \quad (4,11) \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème, en vertu de (4,8).

c) On déduit du théorème de base que le tableau des coordonnées est complètement engendré par la chaîne de *Markoff* élémentaire; la génération par colonnes est conditionnée par une chaîne de *Markoff* élémentaire d'un ordre  $k$  au plus égal à  $r$ .

Par conséquent, la génération complète de la chaîne de *Markoff* peut être obtenue en considérant  $r$  chaînes élémentaires au plus, dont l'ordre est au plus égal à  $r$ ; car il est possible qu'une même chaîne puisse définir plusieurs suites de colonnes; on en verra un exemple au paragraphe suivant.

### III. Les chaînes élémentaires

7. Pour terminer cette étude de décomposition d'une chaîne de *Markoff*, il est nécessaire de prouver une propriété complémentaire.

*Théorème d'irréductibilité:*

Les chaînes élémentaires sont *irréductables* ou *indécomposables*, au sens de la méthode précédente.

En effet, pour une chaîne élémentaire donnée on a les deux propriétés:

a) *Les différentes suites de colonnes d'une chaîne de Markoff élémentaire sont engendrées par une seule et même échelle vectorielle élémentaire.*

Cette propriété résulte directement du théorème de base, car en comparant (4,10) et (4,11), on a identiquement:

$$\bar{p}_i^n \equiv \bar{p}_{i-1}^{n+1}, \quad (5,1)$$

d'où de proche en proche:

$$\bar{p}_k^n = \bar{p}_{k-1}^{n+1} = \dots = \bar{p}_1^{n+k-1}. \quad (5,2)$$

La suite  $\{\bar{p}_1^n\}$  définit automatiquement toutes les autres suites de colonnes, par conséquent une seule chaîne élémentaire est adjointe à l'ensemble des suites.

b) *La chaîne élémentaire qui définit la suite  $\{\bar{p}_1^n\}$  s'identifie avec la chaîne élémentaire donnée.*

En d'autres termes *une chaîne élémentaire est son auto-adjointe*, ce qui justifie son irréductibilité.

La démonstration résulte du fait que, d'après le même théorème de base, les  $k$  premiers vecteurs de la suite  $\bar{p}_1^n$  sont précisément les  $k$  colonnes de la matrice  $M^1$  (4,9), qui caractérise la chaîne élémentaire génératrice de la suite  $\bar{p}_1^n$  avec la chaîne donnée.

Les propriétés a) et b) ci-dessus démontrent le théorème d'irréductibilité.

## Bibliographie

- [1] *Franckx*: Chaînes de *Markoff* et échelles numériques: Trabajos de Estadistica 1950.
- [2] *Fréchet*: Recherches théoriques modernes: livre 2. Collection Borel, Gauthier, Villars.