Die Taylorsche Reihe der generalisierten Poukkaschen Funktion und ihre Anwendung

Die Taylorsche Reihe der generalisierten Poukkaschen Funktion und ihre Anwendung

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

Die generalisierte Poukkasche Funktion definieren wir

$$\frac{S_{x+1}^{(n+1)}\,S_{x+1}^{(n-1)}}{[S_{x+1}^{(n)}]^2} = k_n(x+1, i) = k_n, \tag{1}$$

wo $S_{x+1}^{(n)}$ die n-te Summe der diskontierten Zahlen D_x bedeutet, nämlich

$$S_{x+1}^{(n)} = \sum_{t=1}^{\omega-x} \binom{n-1+t}{n} D_{x+t}. \tag{2}$$

Speziell haben wir:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{S_{x+1}\,D_{x+1}}{N_{x+1}^2} &= k_0(x+1, i) = k_0 \\
\frac{S_{x+1}^{(2)}\,N_{x+1}}{S_{x+1}^{(2)}} &= k_1(x+1, i) = k_1 \\
\frac{S_{x+1}^{(3)}\,S_{x+1}}{[S_{x+1}^{(2)}]^2} &= k_2(x+1, i) = k_2 \\
\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus der generalisierten Poukkaschen Funktion (1) lassen sich bekanntlich die meisten und darunter die besten Näherungsformeln des Zinsfussproblemes herleiten. Bei allen diesen Herleitungen wurde bis jetzt die Grösse k_n als Konstante angenommen. Es stellt sich die Frage, wie sich die Formeln des Zinsfussproblemes ändern, wenn man k_n nicht mehr als Konstante, sondern als Funktion des Zinsfusses i betrachtet. Diese Aufgabe können wir nur so lösen, dass wir die generalisierte Poukkasche Funktion k_n in die Taylorsche Reihe in bezug auf den Zinsfuss i entwickeln. Zu diesem Zwecke führen wir zwei Hilfsfunktionen ein, und zwar:

$$h_n = \frac{n+1}{n} k_n, \quad (4) \qquad\qquad M_n = (-1)^n n! \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x}. \quad (5)$$

Die Grenzwerte von h_n sind [1])

$$1 < h_n \leqslant \frac{n+1}{n}. \tag{6}$$

Die Summen der diskontierten Zahlen $S_{x+1}^{(n)}$ in (1) ersetzen wir durch die Hilfsfunktion M_n aus (5). Wir bekommen so:

$$h_n = \frac{M_{n+1} M_{n-1}}{M_n^2} = \frac{M_{n+1} v^{n+1} M_{n-1} v^{n-1}}{(M_n v^n)^2} = \frac{d^{n+1} a}{di^{n+1}} \cdot \frac{d^{n-1} a}{di^{n-1}} : \left(\frac{d^n a}{di^n}\right)^2. \tag{7}$$

wo v den Diskontfaktor und $a = a_x(i)$ den Barwert der konstanten nachschüssigen lebenslänglichen Leibrente bedeutet.

Die Funktion $M_n v^n$ hat die merkwürdige Eigenschaft, dass ihre Ableitungen und Integrale nach i einfach durch Änderung von n gebildet werden [1]). Es ist

$$\frac{d^\nu (M_n v^n)}{di^\nu} = M_{n+\nu} v^{n+\nu}. \tag{8}$$

Infolgedessen können die Ableitungen von h_n (7) leicht berechnet werden. Man findet:

$$\left.\begin{aligned}
h_n' &= \frac{M_{n+1} v}{M_n} (h_{n+1} h_n - 2 h_n + 1) \\
h_n'' &= \left(\frac{M_{n+1} v}{M_n}\right)^2 (h_{n+2} h_{n+1}^2 h_n - 6 h_{n+1} h_n + 2 h_{n+1} + 6 h_n - 3) \\
h_n''' &= \left(\frac{M_{n+1} v}{M_n}\right)^3 (h_{n+3} h_{n+2}^2 h_{n+1}^3 h_n - 8 h_{n+2} h_{n+1}^2 h_n + 3 h_{n+2} h_{n+1}^2 - \\
&\quad - 6 h_{n+1}^2 h_n + 36 h_{n+1} h_n - 14 h_{n+1} - 24 h_n + 12) \\
h_n'''' &= \left(\frac{M_{n+1} v}{M_n}\right)^4 (h_{n+4} h_{n+3}^2 h_{n+2}^3 h_{n+1}^4 h_n - 10 h_{n+3} h_{n+2}^2 h_{n+1}^3 h_n + \\
&\quad + 4 h_{n+3} h_{n+2}^2 h_{n+1}^3 - 20 h_{n+2} h_{n+1}^3 h_n + 60 h_{n+2} h_{n+1}^2 h_n - 25 h_{n+2} h_{n+1}^2 + \\
&\quad + 90 h_{n+1}^2 h_n - 20 h_{n+1}^2 - 240 h_{n+1} h_n + 100 h_{n+1} + 120 h_n - 60) \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1]) «Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 51. Band, Heft 2, 15. Oktober 1951, Seite 191–210.

Die Grösse $\frac{M_{n+1}v}{M_n}$ kann am besten nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{M_{n+1}v}{M_n} = -h_n h_{n-1} h_{n-2} \ldots h_2 h_1 k_0 \frac{M_0}{p_x} \tag{10}$$

in welcher $M_0 = a = a_x(i)$ und p_x die einjährige Erlebenswahrscheinlichkeit bedeutet.

Insofern wir eine Tafel von h_n-Werten für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, welche zum Zinsfusse i_0 berechnet sind, zur Verfügung haben, können wir die Funktion h_n mittels der Formeln (9) in die Taylorsche Reihe

$$h_n = {}^0h_n + \varDelta\, {}^0h_n' + \frac{1}{2!}\varDelta^2\, {}^0h_n'' + \frac{1}{3!}\varDelta^3\, {}^0h_n''' + \ldots \tag{11}$$

entwickeln, in welcher $\varDelta = i - i_0$. Durch Multiplikation der Reihe (11) mit $\frac{n}{n+1}$ gemäss (4) bekommen wir die Taylorsche Reihe der generalisierten Poukkaschen Funktion (1):

$$k_n = {}^0k_n + \varDelta\, {}^0k_n' + \frac{1}{2!}\varDelta^2\, {}^0k_n'' + \frac{1}{3!}\varDelta^3\, {}^0k_n''' + \ldots. \tag{12}$$

An der unteren und an der oberen Grenze (6) ist h_n unabhängig von i. Die Ableitungen von h_n müssen daher an beiden Grenzen gleich Null sein, d. h. für

$$h_n = 1 \quad \text{und} \quad h_n = \frac{n+1}{n} \tag{13}$$

müssen die Polynome in (9) verschwinden, was als Kontrolle der Rechnung dienen kann.

Je kleiner die Variabilität von k_n ist, desto rascher konvergiert die Reihe (12). In den höheren Altern haben wir eine raschere Konvergenz als in den niederen. Desgleichen konvergiert die Reihe von k_{n+1} rascher als die Reihe von k_n. Anhand der slowenischen Volkssterbetafel, männliches Geschlecht, Beobachtungsperiode 1931–1933, welche wir im folgenden mit STM bezeichnen wollen, haben wir für das Alter $x+1 = 40$ und für den Grundzinsfuss $i_0 = 3\,\%$ folgende Taylorsche Reihe gefunden:

$$k_1(40, i) = 0{\cdot}80288 + 2{\cdot}0656\,\varDelta - 4{\cdot}4850\,\varDelta^2 - 46{\cdot}961\,\varDelta^3 + 250{\cdot}72\,\varDelta^4 + \ldots. \tag{14}$$

In der Tabelle 1 sind die exakten Werte von $k_1(40, i)$ für die Zinsfüsse $i = 0\,\%$, $1\,\%$, $2\,\%$, $4\,\%$, $5\,\%$, $6\,\%$, 6 und die entsprechenden Fehler F_ν für $\nu = 1, 2, 3, 4$ gegeben. Der Fehler F_ν bedeutet die Differenz zwischen dem Näherungswerte, wenn die Reihe (14) beim ν-ten Gliede abgebrochen wird, und dem exakten Werte.

Tabelle 1

Zinsfuss i	Exakter Wert $k_1(40, i)$	Fehler			
		F_1	F_2	F_3	F_4
0 %	0·73831	+ 0·00260	— 0·00144	— 0·00017	+ 0·00003
1 %	0·76018	+ 0·00139	— 0·00040	— 0·00002	+ 0·00002
2 %	0·78182	+ 0·00040	— 0·00005	0·00000	0·00000
4 %	0·82305	+ 0·00049	+ 0·00004	— 0·00001	0·00000
5 %	0·84207	+ 0·00212	+ 0·00033	— 0·00005	— 0·00001
6 %	0·85977	+ 0·00508	+ 0·00104	— 0·00023	— 0·00003

Die Abweichungen in der fünften Dezimale stammen wenigstens zum Teil von den vernachlässigten Dezimalen der Grundwerte.

Aus der Reihe

$$h_n = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \alpha_3 \Delta^3 + \dots \tag{15}$$

können wir unmittelbar, d. h. ohne Formeln (9) die Reihe

$$h_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 \Delta + \beta_2 \Delta^2 + \beta_3 \Delta^3 + \dots \tag{16}$$

herleiten und umgekehrt. Diesbezügliche Rekursionsformeln ergeben sich aus dem vollständigen Integral der Differentialgleichung (7), welches lautet [1]:

$$a = \sum_{\nu=0}^{n-2} C_\nu \Delta^\nu + B_n \int\int \dots \int\int e^{\int \frac{d\Delta}{\Delta - A_n - \int h_n d\Delta}} d\Delta^{n-1}. \tag{17}$$

Wir setzen in (17) $n = 1$, $n = 2$ und bilden die Gleichung

$$B_1 e^{\int \frac{d\Delta}{\Delta - A_1 - \int h_1 d\Delta}} = C_2 + B_2 \int e^{\int \frac{d\Delta}{\Delta - A_2 - \int h_2 d\Delta}} d\Delta. \tag{18}$$

[1] «Das Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 47. Band, Heft 1, 30. April 1947, Seite 242.

Mittels Differentiation eliminieren wir aus (18) die Integrationskonstanten B_1, A_2, B_2, C_2 und gelangen so zur folgenden Rekursionsformel

$$h_2 = \frac{1}{h_1^2}\left[2h_1^2 - h_1 + h_1'(\varDelta - A_1 - \int h_1\, d\varDelta)\right], \tag{19}$$

welche eine Differenzen-, Differential- und Integralgleichung zugleich darstellt. Auf ähnliche Art und Weise finden wir allgemein

$$h_{n+1} = \frac{1}{h_n^2}\left[2h_n^2 - h_n + h_n'(\varDelta - A_n - \int h_n\, d\varDelta)\right]. \tag{20}$$

Die Richtigkeit von (20) kann mittels Einsetzung des Wertes von h_n aus (7) leicht bewiesen werden.

Aus der Anfangsbedingung $\varDelta = 0$ bestimmen wir zunächst die Integrationskonstante A_n in (20).

Unter Beachtung von (9) und (10) finden wir:

$$A_n = -\frac{{}^0h_n}{{}^0h_n'}\left({}^0h_{n+1}\,{}^0h_n - 2\,{}^0h_n + 1\right) = -\frac{{}^0M_{n-1}}{{}^0M_n v_0} = \frac{p_x}{{}^0h_{n-1}\,{}^0h_{n-2}\ldots{}^0h_1 k_0}. \tag{21}$$

Nachher setzen wir die Reihen von h_n und h_{n+1} aus (15) und (16) in (20) ein und entwickeln die rechte Seite von (20) in eine Potenzreihe von $\varDelta$. Durch Vergleichung der Koeffizienten derselben Potenz $\varDelta^\nu$ bekommen wir

$$\left.\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{2\alpha_0 - 1}{\alpha_0} - A_n\frac{\alpha_1}{\alpha_0^2}\\
\beta_1 &= \frac{\alpha_1(2-\alpha_0)}{\alpha_0^2} - 2A_n\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0^2} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^3}\right)\\
\beta_2 &= \frac{2\alpha_0\alpha_2(3-2\alpha_0) + 3\alpha_1^2(\alpha_0 - 2)}{2\alpha_0^3} - 3A_n\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_0^2} - \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0^3} + \frac{\alpha_1^3}{\alpha_0^4}\right)\\
\beta_3 &= \frac{2\alpha_0\alpha_1\alpha_2(7\alpha_0 - 12) + 3\alpha_0^2\alpha_3(4-3\alpha_0) + 6\alpha_1^3(2-\alpha_0)}{3\alpha_0^4} -\\
&\quad - 4A_n\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_0^2} - \frac{2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2}{\alpha_0^3} + \frac{3\alpha_1^2\alpha_2}{\alpha_0^4} - \frac{\alpha_1^4}{\alpha_0^5}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Alle β-Koeffizienten können somit als Funktionen von α-Koeffizienten dargestellt werden. Zu beachten ist, dass β_n auch von α_{n+1} abhängt. Daraus schliessen wir, dass $(n+1)$ Glieder der Reihe von h_n etwa dieselbe Präzision ergeben wie n Glieder der Reihe von h_{n+1}. Aus den Gleichungen (22) ist ersichtlich, dass man mit Ausnahme von α_0 auch umgekehrt die α-Koeffizienten als Funktionen von β-Koeffizienten ausdrücken kann.

Obige Ausführungen beziehen sich auf die Taylorsche Reihenentwicklung von $k_1, k_2, k_3, \ldots$. Die Taylorsche Reihe von k_0 muss dagegen gesondert berechnet werden. Aus (3) und (5) folgt

$$k_0 = -\frac{M_1 v}{M_0^2} p_x. \tag{23}$$

Unter Beachtung von (8) können auch die Ableitungen von k_0 leicht berechnet werden. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}
k_0' &= k_0\left(\frac{k_0 M_0}{p_x}\right)[2-h_1] \\
k_0'' &= k_0\left(\frac{k_0 M_0}{p_x}\right)^2[6-6h_1+h_1^2 h_2] \\
k_0''' &= k_0\left(\frac{k_0 M_0}{p_x}\right)^3[24-36h_1+(6h_1^2+8h_1^2 h_2)-h_1^3 h_2^2 h_3] \\
k_0'''' &= k_0\left(\frac{k_0 M_0}{p_x}\right)^4[120-240h_1+(90h_1^2+60h_1^2 h_2)- \\
&\quad -(20h_1^3 h_2+10h_1^3 h_2^2 h_3)+h_1^4 h_2^3 h_3^2 h_4] \\
k_0''''' &= k_0\left(\frac{k_0 M_0}{p_x}\right)^5[720-1800h_1+(1080h_1^2+480h_1^2 h_2)- \\
&\quad -(90h_1^3+360h_1^3 h_2+90h_1^3 h_2^2 h_3)+ \\
&\quad +(20h_1^4 h_2^2+30h_1^4 h_2^2 h_3+12h_1^4 h_2^3 h_3^2 h_4)-h_1^5 h_2^4 h_3^3 h_4^2 h_5] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

An den beiden Grenzen, d. i. für $k_0 = 0$ und $k_0 = k_n = 1$ werden die Ableitungen von k_0 — ähnlich wie die Ableitungen von h_n — gleich Null, wie man sich durch Einsetzung von $h_n = \dfrac{n+1}{n}$ in (24) überzeugen kann. Damit können die Formeln (24) kontrolliert werden.

Nebenbei bemerken wir, dass die Koeffizienten bzw. die Summen der Koeffizienten in runden Klammern ( ) in (24) die Produkte der Stirlingschen Zahlen $\mathfrak{S}_n^\nu$ und der Faktoriellen $\nu!$ darstellen. Weil:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \nu! \, \mathfrak{S}_n^\nu = (-1)^n \tag{25}$$

muss die Summe der Koeffizienten in jedem Polynome (24) gleich 1 sein, was ebenfalls als Kontrolle der Rechnung dienen kann.

Infolge der grösseren Variabilität von k_0 konvergiert die Reihe

$$k_0 = {}^0k_0 + \Delta\, {}^0k_0' + \frac{1}{2!}\Delta^2\, {}^0k_0'' + \frac{1}{3!}\Delta^3\, {}^0k_0''' + \dots \tag{26}$$

nicht so rasch wie die Reihe von k_1. Anhand der STM haben wir für $x+1=40$ und $i_0 = 3\,\%$ folgende Reihe bekommen:

$$k_0(40,i) = 0{\cdot}75216 + 4{\cdot}0731\,\Delta - 27{\cdot}257\,\Delta^2 + 17{\cdot}358\,\Delta^3 + 1099{\cdot}3\,\Delta^4 - 7440{\cdot}3\,\Delta^5 + \dots \tag{27}$$

Die exakten Werte von $k_0(40,i)$ für $i = 0\,\%, 1\,\%, 2\,\%, 4\,\%, 5\,\%, 6\,\%$ als auch die entsprechenden Fehler F_ν, wenn die Reihe (27) beim ν-ten Gliede abgebrochen wird, sind in der Tabelle 2 gegeben.

Tabelle 2

Zinsfuss i	Exakter Wert $k_0(40,i)$	Fehler F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
0%	0·60603	+0·02394	—0·00059	—0·00106	—0·00017	+0·00001
1%	0·65987	+0·01083	—0·00007	—0·00021	—0·00003	—0·00001
2%	0·70871	+0·00272	—0·00001	—0·00003	—0·00002	—0·00002
4%	0·79023	+0·00266	—0·00007	—0·00005	—0·00004	—0·00004
5%	0·82303	+0·01059	—0·00031	—0·00017	+0·00001	—0·00001
6%	0·85103	+0·02332	—0·00121	—0·00074	+0·00015	—0·00003

Die Reihen von k_0 konvergieren nicht immer monoton. Durch Hinzufügung eines neuen Gliedes kann der Näherungswert von k_0 vorübergehend auch verschlechtert werden.

* * *

Wir wollen nun an den einfachsten Beispielen zeigen, wie sich die Näherungsformeln des Zinsfussproblemes ändern, wenn man die Annahme k_n = Konstante fallen lässt. Für $n = 1$ bekommen wir aus (17)

$$a = M_0 = B e^{\int \frac{d\Delta}{\Delta - A_1 - \int h_1 d\Delta}} \tag{28}$$

wo a den exakten Barwert der konstanten nachschüssigen lebenslänglichen Leibrente darstellt. Durch logarithmische Differentiation nach Δ bekommen wir aus (28)

$$\frac{M_1 v}{M_0} = \frac{1}{\Delta - A_1 - \int h_1 d\Delta} \tag{29}$$

oder

$$A_1 = \Delta - \frac{M_0}{M_1 v} - \int h_1 d\Delta . \tag{30}$$

Aus der Anfangsbedingung $\Delta = 0$ folgt im Einklange mit (21)

$$A_1 = -\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1 v_0}. \tag{31}$$

Wenn wir in (28) $h_1 = {}^0h_1$ setzen, dann bekommen wir

$$a_{(1)} = B\left[\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1 v_0} + \Delta(1 - {}^0h_1)\right]^{\frac{1}{1-{}^0h_1}} \tag{32}$$

wo $a_{(1)}$ den Näherungswert von a darstellt. Die Integrationskonstante B in (32) bestimmen wir so, dass im Falle $\Delta = 0$, $a_{(1)} = {}^0a = {}^0M_0$ wird. Also

$$B = {}^0a\left(\frac{{}^0M_1 v_0}{{}^0M_0}\right)^{\frac{1}{1-{}^0h_1}}. \tag{33}$$

Nach Einsetzung des Wertes von B aus (33) in (32) bekommen wir die wohlbekannte Güttingersche Näherungsformel [1]:

$$a_{(1)} = {}^0a\left[1 + \frac{(1 - {}^0h_1) v_0 \Delta\, {}^0M_1}{{}^0M_0}\right]^{\frac{1}{1-{}^0h_1}}. \tag{34}$$

Nun setzen wir

$$h_1 = {}^0h_1 + \Delta\, {}^0h_1'. \tag{35}$$

So verbesserten Näherungswert von a bezeichnen wir mit $a_{(2)}$.

---

[1] Güttinger, Paul: «Zwei Beiträge zum Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 30. Heft, Oktober 1935.

Aus (28), (31) und (35) folgt

$$a_{(2)} = B\, e^{-\int \frac{d\Delta}{-\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1\, v_0} + ({}^0h_1 - 1)\,\Delta + 0{\cdot}5\, {}^0h_1'\, \Delta^2}}\,. \tag{36}$$

Das im Exponent der Formel (36) auftretende Integral nimmt drei verschiedene Formen an, je nachdem die Diskriminante

$$D = ({}^0h_1 - 1)^2 - 4\left(-\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1\, v_0}\right) 0{\cdot}5\, {}^0h_1' = 1 + {}^0h_1^2 (2\, {}^0h_2 - 3) \gtreqless 0\,. \tag{37}$$

Dementsprechend bekommen wir aus (36) folgende drei Formen der verbesserten Güttingerschen Näherungsformel:

$$\left.\begin{aligned}
a_{(2,1)} &= {}^0a \left(\frac{\Delta\, {}^0h_1' + {}^0h_1 - 1 + \sqrt{D}}{\Delta\, {}^0h_1' + {}^0h_1 - 1 - \sqrt{D}} \; \frac{{}^0h_1 - 1 - \sqrt{D}}{{}^0h_1 - 1 + \sqrt{D}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{D}}} \\
a_{(2,2)} &= {}^0a\, e^{-\frac{2\Delta\, {}^0h_1'}{\Delta\, {}^0h_1' ({}^0h_1 - 1) + ({}^0h_1 - 1)^2}} \\
a_{(2,3)} &= {}^0a\, e^{-\frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\, {}^0h_1' \sqrt{-D}}{\Delta\, {}^0h_1' ({}^0h_1 - 1) + ({}^0h_1 - 1)^2 - D}}
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Für $x + 1 = 40$ und $i_0 = 3\,\%$ haben wir anhand der STM folgende Näherungsformel gefunden:

$$\left.\begin{aligned}
a_{(2,3)} &= {}^0a\, e^{-4{\cdot}12945 \operatorname{arctg} \frac{2{\cdot}00081\,\Delta}{2{\cdot}50247\,\Delta + 0{\cdot}60152}} \\
{}^0a &= a_{39}(3\,\%) = 18{\cdot}116
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Die Tabelle 3 enthält die exakten Werte von $a_{39}(i)$ für $i = 0\,\%$, $1\,\%$, $2\,\%$, $4\,\%$, $5\,\%$, $6\,\%$ als auch die entsprechenden Fehler der Güttingerschen Formel (34) und der verbesserten Näherungsformel (39).

Tabelle 3

Zinsfuss i	Exakter Wert $a_{39}(i)$	Fehler von $a_{(1)}$	Fehler von $a_{(2,3)}$
0 %	28·948	—0·157	+ 0·003
1 %	24·433	—0·033	0·000
2 %	20·907	—0·002	—0·001
4 %	15·879	+ 0·002	—0·001
5 %	14·062	+ 0·011	0·000
6 %	12·570	+ 0·030	+ 0·001

Die Näherungswerte $a_{(2,3)}$ sind also bedeutend besser als $a_{(1)}$.

Setzen wir weiter

$$h_1 = {}^0h_1 + \varDelta\, {}^0h_1' + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\, {}^0h_1''. \tag{40}$$

Den zum zweiten Male verbesserten Näherungswert von a bezeichnen wir mit $a_{(3)}$. Aus (28) und (40) folgt

$$a_{(3)} = B\,e^{-\int \frac{d\varDelta}{-\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1\, v_0} + ({}^0h_1 - 1)\varDelta + 0{\cdot}5\,{}^0h_1'\varDelta^2 + \frac{1}{6}\,{}^0h_1''\varDelta^3}}. \tag{41}$$

Der Polynom unter dem Integralzeichen in (41) kann haben:

1. drei reelle verschiedene Wurzeln α, β, γ;
2. drei reelle gleiche Wurzeln α, α, α;
3. drei reelle Wurzeln, von denen zwei gleich sind α, α, β;
4. eine reelle und zwei komplexe oder imaginäre Wurzeln α, $\mu + \nu i$, $\mu - \nu i$, wobei $-2\mu = \beta$ und $\mu^2 + \nu^2 = \gamma$.

Dementsprechend bekommen wir aus (41) folgende vier Formen der zum zweiten Male verbesserten Güttingerschen Näherungsformel

$$\left.\begin{aligned}
a_{(3,1)} &= {}^0a\left[\left(1-\frac{\varDelta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}}\left(1-\frac{\varDelta}{\beta}\right)^{\frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}}\left(1-\frac{\varDelta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\right]^{-\frac{6}{{}^0h_1''}}\\
a_{(3,2)} &= {}^0a\; e^{\frac{3}{{}^0h_1''}\left[\frac{1}{(\varDelta-\alpha)^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right]}\\
a_{(3,3)} &= {}^0a\left[\frac{\varDelta-\alpha}{\varDelta-\beta}\,\frac{\beta}{\alpha}\right]^{\frac{6}{{}^0h_1''(\alpha-\beta)^2}}\; e^{\frac{6\varDelta}{(\varDelta-\alpha)(\alpha-\beta)\,\alpha\,{}^0h_1''}}\\
a_{(3,4)} &= {}^0a\left[\frac{\sqrt{\varDelta^2+\varDelta\beta+\gamma}}{\alpha-\varDelta}\,\frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\right]^{\frac{6}{(\alpha^2+\alpha\beta+\gamma)\,{}^0h_1''}}\; e^{\frac{12\alpha+6\beta}{{}^0h_1''(\alpha^2+\alpha\beta+\gamma)\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\operatorname{arctg}\frac{\varDelta\sqrt{4\gamma-\beta^2}}{\varDelta\beta+2\gamma}}
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Wir können weiter setzen

$$h_1 = {}^0h_1 + \varDelta\, {}^0h_1' + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\, {}^0h_1'' + \tfrac{1}{6}\varDelta^3\, {}^0h_1''' \tag{43}$$

und so die Güttingersche Formel (34) zum dritten Male verbessern. Wir sehen jedoch davon ab. Die Formeln sind kompliziert und weisen ausserdem nichts wesentlich Neues oder Interessantes auf. Für die Bedürfnisse der Versicherungspraxis reichen schon die Formeln (38) vollkommen aus. Wir bemerken nur, dass aus (43) neun Formen der verbesserten Näherungsformel $a_{(4,1)}$, $a_{(4,2)}$, $a_{(4,3)}$, ..., $a_{(4,9)}$ resultieren, je nachdem die Wurzeln des zu integrierenden Polynoms reell, komplex, gleich, verschieden usw. sind.

Für $n = 2$ bekommen wir aus (17)

$$a = C + B \int e^{\int \frac{d\varDelta}{\varDelta - A_2 - \int h_2\, d\varDelta}} d\varDelta\,. \tag{44}$$

Die erste Ableitung von (44) nach $\varDelta$ lautet

$$-Iv = M_1 v = B\, e^{\int \frac{d\varDelta}{\varDelta - A_2 - \int h_2\, d\varDelta}}\,. \tag{45}$$

Die Grösse $I = (Ia)_x$ bedeutet den Barwert der steigenden nachschüssigen lebenslänglichen Leibrente. Die Gleichung (45) bekommen wir aus (28) einfach so, dass wir ${}^0a = M_0$ mit $-Iv = M_1 v$, $A_1 = -\frac{{}^0M_0}{{}^0M_1 v_0}$ mit $A_2 = -\frac{{}^0M_1}{{}^0M_2 v_0}$ und h_1 mit h_2 vertauschen. Infolgedessen können wir die verschiedenen Näherungsformeln der steigenden Rente I gleich niederschreiben.

Wenn wir $h_2 = {}^0h_2$ setzen, bekommen wir analog (34)

$$I_{(1)} = {}^0I \frac{v_0}{v} \left[1 + \frac{(1 - {}^0h_2)\, v_0\, \varDelta\, {}^0M_2}{{}^0M_1}\right]^{\frac{1}{1 - {}^0h_2}}. \tag{46}$$

Wenn wir $h_2 = {}^0h_2 + \varDelta\, {}^0h_2'$ setzen, bekommen wir analog den Formeln (37) und (38)

$$D = 1 + {}^0h_2^2 (2\, {}^0h_3 - 3) \gtreqless 0\,. \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned}
I_{(2,1)} &= {}^0I \frac{v_0}{v} \left(\frac{\varDelta\, {}^0h_2' + {}^0h_2 - 1 + \sqrt{D}}{\varDelta\, {}^0h_2' + {}^0h_2 - 1 - \sqrt{D}} \; \frac{{}^0h_2 - 1 - \sqrt{D}}{{}^0h_2 - 1 + \sqrt{D}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{D}}} \\
I_{(2,2)} &= {}^0I \frac{v_0}{v} e^{-\frac{2\varDelta\, {}^0h_2'}{\varDelta\, {}^0h_2' ({}^0h_2 - 1) + ({}^0h_2 - 1)^2}} \\
I_{(2,3)} &= {}^0I \frac{v_0}{v} e^{-\frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\varDelta\, {}^0h_2' \sqrt{-D}}{\varDelta\, {}^0h_2' ({}^0h_2 - 1) + ({}^0h_2 - 1)^2 - D}}
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Für $x + 1 = 40$ und $i_0 = 3\,\%$ haben wir anhand der STM folgende Näherungsformel gefunden:

$$\left.\begin{aligned}
I_{(2,3)} &= {}^0I \frac{v_0}{v} e^{-6{\cdot}67706 \operatorname{arctg} \frac{0{\cdot}520684\, \varDelta}{0{\cdot}453006\, \varDelta + 0{\cdot}15763}} \\
{}^0I &= (Ia)_{39,3\,\%} = 256{\cdot}32
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Die Tabelle 4 enthält die exakten Werte von $I = (Ia)_{39}$ für $i = 0\%$, 1%, 2%, 4%, 5%, 6% und die Fehler der Näherungsformeln (46) und (49).

Tabelle 4

Zinsfuss i	Exakter Wert $(Ia)_{39}$	Fehler von $I_{(1)}$	Fehler von $I_{(2,3)}$
0 %	511·94	+ 2·54	— 0·03
1 %	401·05	+ 0·54	— 0·01
2 %	318·52	+ 0·05	— 0·01
4 %	208·88	— 0·03	0·00
5 %	172·26	— 0·16	+ 0·01
6 %	143·68	— 0·42	+ 0·01

* * *

Die Taylorschen Reihen der Poukkaschen Funktionen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ermöglichen die Verbesserung der Näherungsformeln des Zinsfussproblemes bis zur beliebig hohen Präzision. Die Schattenseite solcher Verbesserungen bildet die verhältnismässig grosse Rechenarbeit, welche man dabei zu bewältigen hat. Es gibt jedoch gewisse Gebiete des Zinsfussproblemes, in welchen sich die Anwendung der Taylorschen Reihen von k_n sehr einfach gestaltet. Zwei solche Beispiele geben wir im folgenden.

I. Gegeben sind zwei Rentenbarwerte ${}^0a = a_x(i_0)$ und ${}^1a = a_x(i_1)$, aus welchen man mit verschiedenen Inter- und Extrapolationsmethoden mehr oder weniger genaue Näherungswerte von $a = a_x(i)$ berechnen kann. Bezeichnen wir mit m_1 und m_2 zwei solche Interpolations- bzw. Extrapolationswerte von ${}^0a$ und ${}^1a$. Die lineare Kombination

$$m_1 f_1 + m_2(1 - f_1) = m_{1,2} \tag{50}$$

wo f_1 eine rationale Funktion von $k_1 = k_1(x+1, i)$ bedeutet, stellt einen verbesserten Näherungswert von a dar [1]). Dieses Verfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden. Die lineare Kombination

$$m_{1,2} f_2 + m_{3,4}(1 - f_2) = m_{1,2-3,4} \tag{51}$$

[1]) «Noch einige praktische Interpolationsformeln des Zinsfussproblemes von hoher Präzision», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 52. Band, Heft 2, 15. Oktober 1952, Seite 161–172.

wo f_2 eine rationale Funktion von k_1 und k_2 bedeutet, stellt einen weiter verbesserten Näherungswert von a dar. Die Funktionen f_1 und f_2 sind meistens sehr einfach. Bei der arithmetischen und harmonischen Inter- bzw. Extrapolation ist z. B. $f_1 = k_1$ usw. Ähnliche ebenfalls sehr einfache Formeln haben wir auch bei den Verbesserungen der Inter- und Extrapolationswerte der steigenden Rente bzw. ${}^0I v_0$ und ${}^1I v_1$. In diesem Gebiete des Zinsfussproblemes haben also die Taylorschen Reihen von k_n nicht nur einen theoretischen, sondern auch einen bedeutenden praktischen Wert.

II. Das vollständige Integral der Differentialgleichung (23) lautet

$$\frac{1}{a} = c + \frac{1}{p_x} \int k_0 \, d\Delta \tag{52}$$

oder nach Bestimmung der Integrationskonstante c

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{1}{{}^0a} + \frac{1}{p_x} \int k_0 \, d\Delta \\ &= \frac{1}{{}^0a} + \frac{1}{p_x} \left(\Delta\, {}^0k_0 + \tfrac{1}{2} \Delta^2\, {}^0k_0' + \tfrac{1}{6} \Delta^3\, {}^0k_0'' + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Anhand der STM haben wir für $x + 1 = 40$ und $i_0 = 3\,\%$ folgende Reihe gefunden:

$$\frac{1}{a_{39}(i)} = 0{\cdot}0551998 + 0{\cdot}75821\,\Delta + 2{\cdot}0529\,\Delta^2 - 9{\cdot}1587\,\Delta^3 + \ldots. \tag{54}$$

Die exakten Werte von $a_{39}(i)$ als auch die entsprechenden Fehler F_ν, wenn die Reihe (54) beim ν-ten Gliede abgebrochen wird, sind in der Tabelle 5 gegeben.

Tabelle 5

Zinsfuss i	Exakter Wert $a_{39}(i)$	Fehler		
		F_1	F_2	F_3
0 %	28·948	+ 1·865	+ 0·206	— 0·003
1 %	24·433	+ 0·545	+ 0·043	— 0·001
2 %	20·907	+ 0·094	+ 0·003	— 0·001
4 %	15·879	+ 0·049	— 0·003	0·000
5 %	14·062	+ 0·150	— 0·014	0·000
6 %	12·570	+ 0·259	— 0·038	+ 0·001

Mit Hilfe der Taylorschen Reihe von k_0 können also die Näherungswerte von a bis zur beliebig hohen Präzision ohne viel Rechenarbeit berechnet werden. Aus dem Näherungswerte von a kann weiter auch der Barwert der steigenden Rente näherungsweise leicht berechnet werden, und zwar nach der Formel

$$I = \frac{k_0 a^2}{v p_x}. \tag{55}$$

Die Taylorsche Reihe von k_0 hat also im allgemeinen einen bedeutenden praktischen Wert.