Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 53 (1953)

Artikel: Über die Orthogonalpolynome

Autor: Kreis, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550887

Über die Orthogonalpolynome

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die Entwicklung einer Funktion nach Orthogonalpolynomen wird durch zwei charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet:

1. bei *gegebener Gradzahl* liefert sie die *Miminalsumme* der quadratischen Abweichungen der ausgeglichenen von den ursprünglichen Werten;
2. bei *wachsender Gradzahl* der herangezogenen Orthogonalpolynome nimmt diese Summe der Fehlerquadrate monoton gegen 0 ab.

Die vorliegende Mitteilung untersucht allgemein diese bei der Ausgleichung von Beobachtungswerten sich aufdrängenden Funktionen und bringt in Zusammenhang damit einen Beweis für eine von *Tchebycheff* angegebene Formel.

Die den beliebigen Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zugeordneten Orthogonalpolynome werden durch folgende Bedingungsgleichungen definiert:

$$\sum^x P_h(x) P_k(x) = 0\,, \tag{1}$$

$P_s(x)$ bedeutet ein Polynom vom s. Grad, das in der Normalform folgendermassen geschrieben werden kann:

$$P_s(x) = x^s + a_{s-1}\, x^{s-1} + \ldots + a_0\,.$$

Die Summation erstreckt sich über die n Abszissen x_1 bis x_n; die Gleichungen (1) gelten für alle Zahlenpaare $h \neq k$.

Der Definition zufolge hat man insbesondere:

$a)$ $\qquad P_0(x) = x^0 = 1\,, \quad \sum^x P_0(x) = n \equiv N_0;$

$b)$ $\qquad \sum^x P_k(x) = 0\,, \quad$ für $k \neq 0;$

$c)$ $\qquad \sum^x x^h P_k(x) = 0\,, \quad$ für $h < k$.

Hieraus folgt:

$$P_1(x) = x - \frac{\sum_1^n {}^i\, x_i}{n},$$

und falls $n > 1$, ist die *Norm*

$$N_1 \equiv \sum^x P_1^2(x) = \sum^x x P_1(x)$$

von Null verschieden, da sonst die lineare Gleichung $P_1(x) = 0$, $n > 1$ verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ hätte.

Das Polynom $P_2(x)$ kann aus der Gleichung

$$x^2 = P_2(x) + A_1 P_1(x) + A_0 P_0(x)$$

ermittelt werden, in der A_0 und A_1 durch die Bedingungsgleichungen

$$A_0 N_0 = \sum^x x^2 P_0(x),$$
$$A_1 N_1 = \sum^x x^2 P_1(x),$$

bestimmt werden. Das so definierte Polynom P_2 erfüllt die Orthogonalitätsbedingungen (1), und falls $n > 2$, ist die Norm

$$N_2 \equiv \sum^x P_2^2(x) = \sum^x x^2 P_2(x)$$

nicht Null.

Werden auf diese Weise die Polynome $P_3, P_4 \ldots$ und die zugehörigen Normen $N_3, N_4 \ldots$ nach und nach ermittelt, so gelangt man schliesslich zum Polynom $P_n(x)$, das mit dem Produkt

$$P_n^*(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

identisch ist. Denn in der Entwicklung

$$P_n^*(x) = P_n(x) + A_{n-1} P_{n-1} + \ldots + A_0 P_0(x)$$

hat man

$$A_i N_i = \sum^x P_n^*(x) P_i(x) = 0, \quad \text{für } 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

also $A_i = 0$. Folglich sind $P_n(x)$ und $P_n^*(x)$ identisch gleich und die Norm

$$N_n \equiv \sum^x P_n^2(x) = \sum^x P_n^{*2}(x)$$

verschwindet.

Durch das beliebige Abszissensystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ wird infolgedessen ein System von Polynomen, das den Orthogonalbedingungen (1) genügt, eindeutig definiert.

Führt man eine neue Variable $z = x - m$, m beliebig, ein und setzt

$$P_s(x) = P_s(z + m) \equiv Q_s(z),$$

so erfüllen die Polynome $Q_s(z)$ ebenfalls die Bedingungen (1). Die beiden Koordinatensysteme (x_i) und (z_i) sind sowohl in bezug auf die Polynomauswertungen als auch in bezug auf die Normen *äquivalent*. Für jeden Index s ist nämlich

$$P_s(x_i) = Q_s(z_i).$$

$$N_s = \sum_1^n {}^i\, P_s^2(x_i) = \sum_1^n {}^i\, Q_s^2(z_i).$$

Zahlenbeispiel: 1. $x = 1,\ 2,\ 4,\ 5.$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - 3 \\ P_2(x) &= x^2 - 6x + 6{,}5 \\ P_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 23{,}6x - 16{,}8 \\ P_4(x) &= (x-1)(x-2)(x-4)(x-5) \end{aligned}$$

2. $m = 3 : z = x - 3 = -2, -1, 1, 2.$

$$\begin{aligned} Q_0(z) &= 1 \\ Q_1(z) &= z \\ Q_2(z) &= z^2 - 2{,}5 \\ Q_3(z) &= z^3 - 3{,}4z \\ Q_4(z) &= (z^2-1)(z^2-4) \end{aligned}$$

x	z	$P_0 = Q_0$	$P_1 = Q_1$	$P_2 = Q_2$	$P_3 = Q_3$	$P_4 = Q_4$
1	−2	1	−2	1,5	−1,2	0
2	−1	1	−1	−1,5	2,4	0
4	1	1	1	−1,5	−2,4	0
5	2	1	2	1,5	1,2	0

$$N_0 = 4;\ N_1 = 10;\ N_2 = 9;\ N_3 = 14{,}4;\ N_4 = 0.$$

Bilden die Abszissen x_i die natürliche Zahlenreihe $1, 2, \ldots n$ und wird $m = \frac{1+n}{2}$ gewählt, so bilden die z-Werte eine arithmetische *symmetrische* Folge mit dem Anfangsglied $z_1 = -\frac{n-1}{2}$ und dem Schlussglied $z_n = \frac{n-1}{2}$. Da die Argumente z paarweise entgegengesetzt gleich sind, erfüllen die beiden Polynome $Q_s(z)$ und $(-1)^s Q_s(-z)$ die Orthogonalitätsbedingungen (1), und da die Koeffizienten von z^s, nämlich 1 und $(-1)^{2s}$, gleich sind, hat man

$$(-1)^s Q_s(-z) = Q_s(z).$$

Für ein gerades s folgt hieraus

$$Q_s(-z) = Q_s(z)$$

und für ein ungerades s

$$-Q_s(-z) = Q_s(z).$$

D. h. das Orthogonalpolynom $Q_s(z)$ ist eine gerade oder ungerade Funktion von z, je nachdem der Grad s desselben eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zwischen drei aufeinanderfolgenden Polynomen $Q_s(z)$ besteht folgende Beziehung:

$$Q_{s+1}(z) = z\,Q_s(z) - \frac{N_s}{N_{s-1}} Q_{s-1}(z). \tag{2}$$

Um diese Relation zu beweisen, denken wir uns das Produkt $z\,Q_s(z)$ nach Orthogonalpolynomen entwickelt:

$$z\,Q_s(z) = Q_{s+1}(z) + A_{s-1} Q_{s-1}(z) \ldots + A_0 Q_0(z).$$

Der allgemeine Koeffizient A_i für $i = 0$ bis $s-2$ wird erhalten durch Multiplikation mit z^i und Summation; es ergibt sich

$$\sum_z z^{i+1} Q_s(z) = A_i N_i,$$

da $i + 1 < s$ ist, verschwindet die Summe auf der linken Seite, also $A_i = 0$. Multipliziert man aber die Gleichung mit z^{s-1} und summiert, so erhält man

$$\sum_z z^s Q_s(z) = A_{s-1} \sum_z z^{s-1} Q_{s-1}(z),$$

also

$$N_s = A_{s-1} N_{s-1},$$

somit

$$A_{s-1} = N_s : N_{s-1}.$$

Hieraus resultiert die Rekursionsformel

$$N_{s-1} Q_{s+1}(z) = N_{s-1}\, z\, Q_s(z) - N_s Q_{s-1}(z). \tag{3}$$

Für die Norm N_s besteht die noch zu beweisende allgemeine Beziehung:

$$N_s = \frac{s!\,s!}{\binom{2s}{s}} \binom{n+1}{2s+1}. \tag{4}$$

Durch Einsetzung geht die Formel (2) in die eingangs erwähnte Formel von Tchebycheff über

$$Q_{s+1}(z) = z\,Q_s(z) - \frac{s^2(n^2 - s^2)}{4(4s^2 - 1)}\,Q_{s-1}(z).$$

Zur Begründung der Formel (4) formen wir die rechte Seite der Definitionsgleichung

$$N_s = \sum\nolimits^z z^s\,Q_s(z)$$

um, indem wir die Summen der geraden Potenzen der Zahlen z_i, Z_{2k}, einführen. N_s lässt sich folgendermassen darstellen

$$N_s = Z_{2s} + b_{2s-2}\,Z_{2s-2} + \ldots + b_{2r}\,Z_{2r},$$

wobei $2r$ gleich s oder $s+1$, je nachdem s eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

Durch partielle Differentiation der erzeugenden Funktion

$$F(t;m) = e^{-mt} + e^{-mt+t} + \ldots + e^{mt}$$

$\left(m = \frac{n+1}{2}\right)$ nach t, findet man

$$Z_{2k} = \frac{\partial^{2k} F(t;m)}{\partial t^{2k}}, \quad \text{für } t = 0.$$

Summiert man die geometrische Folge rechts, so wird

$$F(t;m) = \frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} \equiv E(t;n).$$

Es ist somit auch

$$Z_{2k} = \frac{\partial^{2k} E(t;n)}{\partial t^{2k}}, \quad \text{für } t = 0.$$

Da $E(t;n) = E(-t;n)$, eine gerade Funktion von t ist, gilt folgende Entwicklung nach Potenzen von t^2:

$$E(t;n) = A_0(n) + A_2(n)\,t^2 + A_4(n)\,t^4 + \ldots.$$

Aus $E(t;-n) = -E(t;n)$, ergibt sich ferner

$$A_{2k}(-n) = -A_{2k}(n),$$

d. h. die Koeffizienten A_{2k} sind ungerade Funktionen von n.

Für $n = 1$ wird

$$E(t;1) = 1 = \sum_0^\infty{}_k A_{2k}(1)\, t^{2k},$$

folglich

$$A_0(1) = 1; \quad A_{2k}(1) = 0, \quad \text{für } k > 0.$$

Für $n = -1$ findet man analog aus

$$E(t;-1) = -1 = \sum_0^\infty{}_k A_{2k}(-1)\, t^{2k},$$

$$A_0(-1) = -1; \quad A_{2k}(-1) = 0, \quad \text{für } k > 0.$$

Zweimalige Differentiation von

$$\frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \sum_0^\infty{}_k A_{2k}(n)\, t^{2k}$$

nach n ergibt

$$\frac{t^2}{4} \sum_0^\infty{}_k A_{2k}(n)\, t^{2k} = \sum_0^\infty{}_k A''_{2k}(n)\, t^{2k}.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert folgende Relation

$$A''_{2k}(n) = \tfrac{1}{4} A_{2k-2}(n).$$

Zweimalige Integration von $A_{2k}(n)$ nach n liefert ein Polynom, in dem die beiden Glieder $pn + q$ noch unbestimmte Koeffizienten haben. $A_{2k}(0)$ führt auf $q = 0$ und $A_{2k+2}(1) = 0$ gestattet, p zu bestimmen.

Die ersten Koeffizienten lauten

$$A_0 = n$$

$$A_2 = \frac{n^3 - n}{6}$$

$$A_4 = \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{3 \cdot 5!}$$

$$A_6 = \frac{3n^7 - 21n^5 + 49n^3 - 31n}{3 \cdot 7!}.$$

Die Polynome $A_{2k+2}(n)$ besitzen die Nullstellen -1, 0, $+1$ und lassen sich auf folgende Form bringen

$$A_{2k+2}(n) = \binom{n+1}{3} f_k(n^2),$$

wobei $f_k(n^2)$ ein Polynom von n^2 vom k. Grad bezeichnet. Z. B.

$$A_2 = \binom{n+1}{3}$$

$$A_4 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{60}$$

$$A_6 = \binom{n+1}{3} \frac{6n^4 - 36n^2 + 62}{7!}.$$

Die Potenzsummen Z_{2k} lassen sich demnach wie folgt darstellen:

$$Z_{2k} = (2k)! \binom{n+1}{3} f_{k-1}(n^2), \quad k > 0.$$

Z. B.

$$Z_2 = \tfrac{1}{2} \binom{n+1}{3}$$

$$Z_4 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{40}$$

$$Z_6 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^4 - 18n^2 + 31}{224}.$$

Die Normen N_s erhalten für $s > 0$ dieselbe Form wie die Summen $Z_2, Z_4 \ldots$, so dass geschrieben werden kann

$$N_s = \binom{n+1}{3} g_{s-1}(n^2), \quad s > 0. \tag{5}$$

Wählt man $Q_s(z) = Q_n(z)\, R_p(z)$, wobei $R_p(z)$ irgendein Polynom vom Grad p bedeutet, so genügt diese besondere Funktion $Q_s(z)$ den Orthogonalbedingungen (1), verschwindet aber für alle Werte z_i, über welche summiert wird, so dass auch N_s verschwindet.

Betrachtet man in der Gleichung (5) s als feste und n als veränderliche Zahl, so verschwindet N_s für $n = 1, 2, \ldots s$, so dass die rechte Seite der Gleichung (5) die Form haben muss:

$$N_s = C_s\, n(n^2 - 1)(n^2 - 4) \ldots (n^2 - s^2)$$

oder kürzer

$$N_s = C_s \binom{n+s}{2s+1}.$$

Für $n + s = 2s + 1$, also $n = s + 1$, ist die Konstante $C_s = N_s$. Die Glieder des entwickelten Binoms $(1 - 1)^s$ liefern bis auf einen konstanten Faktor A einen solchen Spezialfall. Die $s + 1$-Werte

$$P_s(i) = A(-1)^{i-1} \binom{s}{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots s + 1$$

genügen den Orthogonalbedingungen (1); denn

$$\sum_1^{s+1}{}_i\, P_s(i)\, i^k = A \sum_1^{s+1}{}_i\, (-1)^{i-1} \binom{s}{i-1} i^k = A\, \Delta^s\, (i^k).$$

Diese Differenz der s. Ordnung der Funktion vom k. Grad i^k verschwindet aber, falls $k = 0, 1, \ldots (s-1)$ ist.

Der konstante Faktor A wird erhalten, indem N_s auf zwei verschiedene Arten ausgewertet wird. Es ist

1. $$N_s = \sum_1^{s+1}{}_i\, P_s^2(i) = A^2 \sum_1^{s+1}{}_i \binom{s}{i-1}.$$

Die Summe auf der rechten Seite stimmt überein mit dem Koeffizienten von t^s in der Entwicklung von $(1 + 1)^{2s}$, also

$$N_s = A^2 \binom{2s}{s}.$$

2. $$N_s = \sum_1^{s+1}{}_i\, i^s P_s(i) = A \sum_1^{s+1}{}_i\, (-1)^{i-1} \binom{s}{i-1} = A(-1)^s s!,$$

wie man durch s-malige Differentiation des Produktes

$$(1 - e^t)^s e^t = (-1)^s t^s + A_{s+1} t^{s+1} + \ldots,$$

für $t = 0$ erkennt.

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für N_s ergibt

$$A = (-1)^s s! : \binom{2s}{s},$$

und hieraus folgt die behauptete Formel

$$N_s = \frac{s!\,s!}{\binom{2s}{s}} \binom{n+s}{2s+1},$$

die auch für $s = 0$ gilt, wenn, wie üblich, unter dem Symbol $0!$ die Zahl 1 verstanden wird, nämlich $N_0 = n$.

Pareto [1] hat eine Zusammenstellung der Polynome $Q_s(z)$ und $P_s(x) = Q_s\left(x - \frac{n+1}{2}\right)$ für $s = 1$ bis 8 publiziert und ausserdem die Auswertungen derselben für die positiven Werte der Argumente z für die Gliederzahlen $n = 4$ bis $n = 25$ tabelliert.

Die ersten Orthogonalpolynome heissen:

$$Q_0(z) = 1$$

$$Q_1(z) = z$$

$$Q_2(z) = z^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$Q_3(z) = z^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} z$$

$$Q_4(z) = z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}$$

$$Q_5(z) = z^5 - \frac{5n^2 - 35}{18} z^3 + \frac{15n^4 - 230n^2 + 407}{1008} z.$$

Gegeben sei eine auszugleichende Folge von Beobachtungswerten $u_1, u_2, \ldots u_n$. Mit Hilfe der Orthogonalpolynome $P_s(x)$ lässt sich die Zahlenreihe analytisch folgendermassen genau darstellen

$$u_x = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + \ldots + A_{n-1} P_{n-1}(x), \tag{6}$$

oder, wenn die Momente der Funktion u_x eingeführt werden,

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_x u_x P_0(x) = A_0 N_0 \\ M_1 &= \sum_x u_x P_1(x) = A_1 N_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n-1} &= \sum_x u_x P_{n-1}(x) = A_{n-1} N_{n-1} \end{aligned}$$

$$u_x = \frac{M_0}{N_0} P_0(x) + \frac{M_1}{N_1} P_1(x) + \ldots + \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} P_{n-1}(x).$$

Beschränkt man sich auf die k ersten Glieder der Entwicklung (6), so ist der begangene Fehler gleich der Summe der vernachlässigten Glieder

$$A_k P_k(x) + \ldots + A_{n-1} P_{n-1}(x),$$

so dass die Summe der Fehlerquadrate beträgt

$$A_k^2 N_k + \ldots + A_{n-1}^2 N_{n-1} \equiv F_k.$$

Irgendeine Ersatzfunktion ebenfalls $(n-1)$. Grades für u_x, etwa

$$A_0^* P_0(x) + \ldots + A_{k-1}^* P_{k-1}(x)$$

bedingt folgende Abweichung von u_x:

$$(A_0 - A_0^*) P_0 + \ldots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*) P_{k-1} + A_k P_k + \ldots + A_{n-1} P_{n-1}.$$

Die Summe F_k^* der Fehlerquadrate setzt sich aus F_k und den folgenden Ausdrücken zusammen:

$$(A_0 - A_0^*)^2 N_0 + \ldots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*)^2 N_{k-1},$$

und da mindestens eine der Klammern nicht verschwindet, ist die Summe F_k kleiner als F_k^*.

Unter allen Ersatzfunktionen $(k-1)$. Grades für u_x, bedingt das aus den Momenten $M_0, M_1, \ldots M_{k-1}$ gebildete Polynom

$$\frac{M_0}{N_0} P_0(x) + \ldots + \frac{M_{k-1}}{N_{k-1}} P_{k-1}(x)$$

die kleinste Summe der Fehlerquadrate.

Den aufeinanderfolgenden Ausgleichungspolynomen entsprechend

$$\frac{M_0}{N_0}$$

$$\frac{M_0}{N_0} + \frac{M_1}{N_1} P_1(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{M_0}{N_0} + \frac{M_1}{N_1} P_1(x) + \ldots + \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} P_{n-1}(x)$$

sind diese Minimalsummen

$$F_1 \geqslant F_2 \geqslant F_3 \geqslant \ldots \geqslant F_{n-2} \geqslant F_{n-1} \geqslant 0 .$$

Die Gleichheit $F_k = F_{k+1}$ bedeutet, dass die Summe der Momente M_k Null ist.

Literatur

[1] *Pareto, V.:* Tables pour faciliter l'application de la méthode des moindres carrés. *Journal de Statistique suisse,* 1$^{\text{er}}$ volume, 1899.

[2] *Gram, J. P.:* Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. *Mitteilungen,* Band 10, 1915.