Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 53 (1953)

Artikel: Über die Orthogonalpolynome

Autor: Kreis, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550887

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Orthogonalpolynome

Von H. Kreis, Winterthur

Die Entwicklung einer Funktion nach Orthogonalpolynomen wird durch zwei charakteristische Eigenschaften ausgezeichnet:

- 1. bei gegebener Gradzahl liefert sie die Miminalsumme der quadratischen Abweichungen der ausgeglichenen von den ursprünglichen Werten;
- 2. bei wachsender Gradzahl der herangezogenen Orthogonalpolynome nimmt diese Summe der Fehlerquadrate monoton gegen 0 ab.

Die vorliegende Mitteilung untersucht allgemein diese bei der Ausgleichung von Beobachtungswerten sich aufdrängenden Funktionen und bringt in Zusammenhang damit einen Beweis für eine von *Tchebycheff* angegebene Formel.

Die den beliebigen Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zugeordneten Orthogonalpolynome werden durch folgende Bedingungsgleichungen definiert:

$$\sum x P_h(x) P_k(x) = 0, \qquad (1)$$

 $P_s(x)$ bedeutet ein Polynom vom s. Grad, das in der Normalform folgendermassen geschrieben werden kann:

$$P_s(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \ldots + a_0.$$

Die Summation erstreckt sich über die n Abszissen x_1 bis x_n ; die Gleichungen (1) gelten für alle Zahlenpaare $h \neq k$.

Der Definition zufolge hat man insbesondere:

a)
$$P_{\mathbf{0}}(x) = x^{\mathbf{0}} = 1 \,, \quad \sum P_{\mathbf{0}}(x) = n \Longrightarrow N_{\mathbf{0}};$$

b)
$$\sum x P_k(x) = 0, \quad \text{für } k \neq 0;$$

c)
$$\sum x^h P_k(x) = 0, \quad \text{für } h < k.$$

Hieraus folgt:

$$P_1(x) = x - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

und falls n > 1, ist die Norm

$$N_1 \equiv \sum_{x} P_1^2(x) = \sum_{x} x P_1(x)$$

von Null verschieden, da sonst die lineare Gleichung $P_1(x)=0$, n>1 verschiedene Wurzeln $x_1,x_2,\ldots x_n$ hätte.

Das Polynom $P_2(x)$ kann aus der Gleichung

$$x^2 = P_2(x) + A_1 P_1(x) + A_0 P_0(x)$$

ermittelt werden, in der $A_{\mathbf{0}}$ und $A_{\mathbf{1}}$ durch die Bedingungsgleichungen

$$A_0 \, N_0 = \, \sum_{} \!\!\! x^2 \, P_0(x)$$
 ,

$$A_1 N_1 = \sum x x^2 P_1(x)$$
,

bestimmt werden. Das so definierte Polynom P_2 erfüllt die Orthogonalitätsbedingungen (1), und falls n>2, ist die Norm

 $N_2 \equiv \sum_{x} P_2^2(x) = \sum_{x} x^2 P_2(x)$

nicht Null.

Werden auf diese Weise die Polynome $P_3, P_4 \dots$ und die zugehörigen Normen $N_3, N_4 \dots$ nach und nach ermittelt, so gelangt man schliesslich zum Polynom $P_n(x)$, das mit dem Produkt

$$P_n^*(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

identisch ist. Denn in der Entwicklung

$$P_n^*(x) = P_n(x) + A_{n-1}P_{n-1} + \ldots + A_0P_0(x)$$

hat man

$$A_i N_i = \sum_{x} P_n^*(x) P_i(x) = 0$$
, für $0 \le i \le n-1$,

also $A_i = 0$. Folglich sind $P_n(x)$ und $P_n^*(x)$ identisch gleich und die Norm

$$N_n \equiv \sum_{x} P_n^2(x) = \sum_{x} P_n^{*2}(x)$$

verschwindet.

Durch das beliebige Abszissensystem $x_1, x_2 \dots x_n$ wird infolgedessen ein System von Polynomen, das den Orthogonalbedingungen (1) genügt, eindeutig definiert.

Führt man eine neue Variable z = x - m, m beliebig, ein und setzt

$$P_s(x) = P_s(z+m) \equiv Q_s(z)$$
,

so erfüllen die Polynome $Q_s(z)$ ebenfalls die Bedingungen (1). Die beiden Koordinatensysteme (x_i) und (z_i) sind sowohl in bezug auf die Polynomauswertungen als auch in bezug auf die Normen äquivalent. Für jeden Index s ist nämlich

$$P_s(x_i) = Q_s(z_i).$$

$$N_s = \sum_1^n P_s^2(x_i) = \sum_1^n Q_s^2(z_i)$$
.

Zahlenbeispiel: 1.

$$x = 1, 2, 4, 5.$$

$$\begin{split} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x - 3 \\ P_2(x) &= x^2 - 6x + 6.5 \\ P_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 23.6x - 16.8 \\ P_4(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) \end{split}$$

$$2. \quad m=3:z=x-3=-2,-1,1,2.$$

$$Q_0(z)=1$$

$$Q_1(z)=z$$

$$Q_2(z)=z^2-2,5$$

$$Q_3(z)=z^3-3,4z$$

$$Q_4(z)=(z^2-1)\,(z^2-4)$$

$$N_{\mathbf{0}}=4\,;\;N_{\mathbf{1}}=10\,;\;N_{\mathbf{2}}=9\,;\;N_{\mathbf{3}}=14,\!4\,;\;N_{\mathbf{4}}=0\,.$$

Bilden die Abszissen x_i die natürliche Zahlenreihe $1,2,\ldots n$ und wird $m=\frac{1+n}{2}$ gewählt, so bilden die z-Werte eine arithmetische

symmetrische Folge mit dem Anfangsglied $z_1 = -\frac{n-1}{2}$ und dem Schlussglied $z_n = \frac{n-1}{2}$. Da die Argumente z paarweise entgegengesetzt gleich sind, erfüllen die beiden Polynome $Q_s(z)$ und $(-1)^s Q_s(-z)$ die Orthogonalitätsbedingungen (1), und da die Koeffizienten von z^s , nämlich 1 und $(-1)^{2s}$, gleich sind, hat man

$$(-1)^s Q_s(-z) = Q_s(z)$$
.

Für ein gerades s folgt hieraus

$$Q_s(-z) = Q_s(z)$$

und für ein ungerades s $-Q_s(-z) = Q_s(z)$.

D. h. das Orthogonalpolynom $Q_s(z)$ ist eine gerade oder ungerade Funktion von z, je nachdem der Grad s desselben eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Zwischen drei aufeinanderfolgenden Polynomen $Q_s(z)$ besteht folgende Beziehung:

 $Q_{s+1}(z) = z Q_s(z) - \frac{N_s}{N_{s-1}} Q_{s-1}(z).$ (2)

Um diese Relation zu beweisen, denken wir uns das Produkt $z Q_s(z)$ nach Orthogonalpolynomen entwickelt:

$$z Q_s(z) = Q_{s+1}(z) + A_{s-1} Q_{s-1}(z) \dots + A_0 Q_0(z)$$
.

Der allgemeine Koeffizient A_i für i=0 bis s-2 wird erhalten durch Multiplikation mit z^i und Summation; es ergibt sich

$$\sum z^{i+1} Q_s(z) = A_i N_i$$
,

da i+1 < s ist, verschwindet die Summe auf der linken Seite, also $A_i = 0$. Multipliziert man aber die Gleichung mit z^{s-1} und summiert, so erhält man

$$\sum_{z} z^{s} Q_{s}(z) = A_{s-1} \sum_{z} z^{s-1} Q_{s-1}(z)$$

also

$$N_s = A_{s-1} N_{s-1}$$
,

somit

$$A_{s-1} = N_s : N_{s-1}$$
.

Hieraus resultiert die Rekursionsformel

$$N_{s-1}\,Q_{s+1}(z)\,=\,N_{s-1}\,z\,Q_{s}(z)\,-\,N_{s}\,Q_{s-1}(z)\,. \tag{3} \label{eq:3}$$

Für die Norm N_s besteht die noch zu beweisende allgemeine Beziehung:

$$N_s = \frac{s! \, s!}{\binom{2 \, s}{s}} \binom{n+1}{2 \, s+1}. \tag{4}$$

Durch Einsetzung geht die Formel (2) in die eingangs erwähnte Formel von Tchebycheff über

$$Q_{s+1}(z) \, = \, z \, Q_s(z) \, - \, \frac{s^2(n^2-s^2)}{4 \, (4 \, s^2-1)} \, Q_{s-1}(z) \, .$$

Zur Begründung der Formel (4) formen wir die rechte Seite der Definitionsgleichung $N_s = \sum_z z^s \, Q_s(z)$

um, indem wir die Summen der geraden Potenzen der Zahlen z_i , Z_{2k} , einführen. N_s lässt sich folgendermassen darstellen

$$N_s = Z_{2s} + b_{2s-2}Z_{2s-2} + \ldots + b_{2r}Z_{2r}$$

wobei 2r gleich s oder s+1, je nachdem s eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet.

Durch partielle Differentiation der erzeugenden Funktion

$$F(t;m)=e^{-mt}+e^{-mt+t}+\ldots+e^{mt}$$
 $\left(m=rac{n+1}{2}
ight)$ nach t , findet man $Z_{2k}=rac{\partial^{2k}F(t;m)}{\partial t^{2k}}$, für $t=0$.

Summiert man die geometrische Folge rechts, so wird

$$F(t;m) = \frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = E(t;n).$$

Es ist somit auch

$$Z_{2k} = rac{\partial^{2k} E(t;n)}{\partial t^{2k}}, \quad ext{für } t = 0.$$

Da E(t;n) = E(-t;n), eine gerade Funktion von t ist, gilt folgende Entwicklung nach Potenzen von t^2 :

$$E(t;n) = A_0(n) + A_2(n) t^2 + A_4(n) t^4 + \dots$$

Aus E(t;-n) = -E(t;n), ergibt sich ferner

$$A_{2k}(-n) = -A_{2k}(n)$$
,

d. h. die Koeffizienten A_{2k} sind ungerade Funktionen von n.

Für n = 1 wird

$$E(t;1) = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}(1) t^{2k},$$

folglich

$$A_0(1) = 1;$$
 $A_{2k}(1) = 0,$ für $k > 0.$

Für n = -1 findet man analog aus

$$\begin{split} E(t;-1) &= -1 = \sum_0^\infty A_{2k}(-1) \, t^{2k}, \\ A_0(-1) &= -1; \quad A_{2k}(-1) = 0 \,, \quad \text{für } k > 0 \,. \end{split}$$

Zweimalige Differentiation von

$$\frac{e^{\frac{n}{2}t} - e^{-\frac{n}{2}t}}{\frac{t}{e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}} = \sum_{0}^{\infty} A_{2k}(n) t^{2k}$$

nach n ergibt

$$\frac{t^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2k}(n) t^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2k}''(n) t^{2k}.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert folgende Relation

$$A_{2k}''(n) = \frac{1}{4} A_{2k-2}(n)$$
.

Zweimalige Integration von $A_{2k}(n)$ nach n liefert ein Polynom, in dem die beiden Glieder pn+q noch unbestimmte Koeffizienten haben. $A_{2k}(0)$ führt auf q=0 und $A_{2k+2}(1)=0$ gestattet, p zu bestimmen.

Die ersten Koeffizienten lauten

$$\begin{split} A_0 &= n \\ A_2 &= \frac{n^3 - n}{6} \\ A_4 &= \frac{3n^5 - 10n^3 + 7n}{3 \cdot 5!} \\ A_6 &= \frac{3n^7 - 21n^5 + 49n^3 - 31n}{3 \cdot 7!}. \end{split}$$

Die Polynome $A_{2k+2}(n)$ besitzen die Nullstellen -1, 0, +1 und lassen sich auf folgende Form bringen

$$A_{2k+2}(n) = \binom{n+1}{3} f_k(n^2),$$

wobei $f_k(n^2)$ ein Polynom von n^2 vom k. Grad bezeichnet. Z. B.

$$\begin{split} A_2 &= \binom{n+1}{3} \\ A_4 &= \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{60} \\ A_6 &= \binom{n+1}{3} \frac{6n^4 - 36n^2 + 62}{7!} \,. \end{split}$$

Die Potenzsummen Z_{2k} lassen sich demnach wie folgt darstellen:

$$Z_{2k} = (2k)! \binom{n+1}{3} f_{k-1}(n^2), \quad k > 0.$$
 Z. B.
$$Z_2 = \frac{1}{2} \binom{n+1}{3}$$

$$Z_4 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^2 - 7}{40}$$

$$Z_6 = \binom{n+1}{3} \frac{3n^4 - 18n^2 + 31}{224}.$$

Die Normen N_s erhalten für s>0 dieselbe Form wie die Summen $Z_2,\,Z_4\,\ldots$, so dass geschrieben werden kann

$$N_s = \binom{n+1}{3} g_{s-1}(n^2), \quad s > 0.$$
 (5)

Wählt man $Q_s(z) = Q_n(z) R_p(z)$, wobei $R_p(z)$ irgendein Polynom vom Grad p bedeutet, so genügt diese besondere Funktion $Q_s(z)$ den Orthogonalbedingungen (1), verschwindet aber für alle Werte z_i , über welche summiert wird, so dass auch N_s verschwindet.

Betrachtet man in der Gleichung (5) s als feste und n als veränderliche Zahl, so verschwindet N_s für $n = 1, 2, \ldots s$, so dass die rechte Seite der Gleichung (5) die Form haben muss:

$$N_s = C_s n(n^2-1)(n^2-4)\dots(n^2-s^2)$$

oder kürzer

$$N_s = C_s \left({n+s \atop 2s+1} \right).$$

Für n+s=2s+1, also n=s+1, ist die Konstante $C_s=N_s$. Die Glieder des entwickelten Binoms $(1-1)^s$ liefern bis auf einen konstanten Faktor A einen solchen Spezialfall. Die s+1-Werte

$$P_s(i) = A(-1)^{i-1} {s \choose i-1}, \quad i = 1, 2, \dots s+1$$

genügen den Orthogonalbedingungen (1); denn

$$\textstyle\sum_{1}^{s+1} P_s(i) \ i^k = A \textstyle\sum_{1}^{s+1} (-1)^{i-1} \begin{pmatrix} s \\ i-1 \end{pmatrix} i^k = A \varDelta^s \left(i^k \right).$$

Diese Differenz der s. Ordnung der Funktion vom k. Grad i^k verschwindet aber, falls $k = 0, 1, \ldots (s-1)$ ist.

Der konstante Faktor A wird erhalten, indem N_s auf zwei verschiedene Arten ausgewertet wird. Es ist

1.
$$N_s = \sum_{1}^{s+1} P_s^2(i) = A^2 \sum_{1}^{s+1} \binom{s}{i-1}.$$

Die Summe auf der rechten Seite stimmt überein mit dem Koeffizienten von t^s in der Entwicklung von $(1+1)^{2s}$, also

$$N_s = A^2 {2s \choose s}$$
.

$$2. \qquad N_s = \sum_{1}^{s+1} i^s P_s(i) = A \sum_{1}^{s+1} (-1)^{i-1} \binom{s}{i-1} = A (-1)^s \, s! \, ,$$

wie man durch s-malige Differentiation des Produktes

$$(1-e^t)^s\,e^t=(-1)^s\,t^s+A_{s+1}\,t^{s+1}+\ldots\,,$$

für t=0 erkennt.

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für N_s ergibt

$$A = (-1)^s \, s! : \binom{2s}{s},$$

und hieraus folgt die behauptete Formel

$$N_s = rac{s!\,s!}{{2s \choose s}} {n+s \choose 2s+1},$$

die auch für s=0 gilt, wenn, wie üblich, unter dem Symbol 0! die Zahl 1 verstanden wird, nämlich $N_{\bf 0}=n$.

Pareto [1] hat eine Zusammenstellung der Polynome $Q_s(z)$ und $P_s(x) = Q_s\left(x - \frac{n+1}{2}\right)$ für s=1 bis 8 publiziert und ausserdem die Auswertungen derselben für die positiven Werte der Argumente z für die Gliederzahlen n=4 bis n=25 tabelliert.

Die ersten Orthogonalpolynome heissen:

$$egin{align} Q_0(z) &= 1 \ Q_1(z) &= z \ Q_2(z) &= z^2 - rac{n^2 - 1}{12} \ Q_3(z) &= z^3 - rac{3\,n^2 - 7}{20}\,z \ Q_4(z) &= z^4 - rac{3\,n^2 - 13}{14}\,z^2 + rac{3\,(n^2 - 1)\,(n^2 - 9)}{560} \ Q_5(z) &= z^5 - rac{5\,n^2 - 35}{18}\,z^3 + rac{15\,n^4 - 230\,n^2 + 407}{1008}\,z \,. \end{array}$$

Gegeben sei eine auszugleichende Folge von Beobachtungswerten $u_1, u_2, \ldots u_n$. Mit Hilfe der Orthogonalpolynome $P_s(x)$ lässt sich die Zahlenreihe analytisch folgendermassen genau darstellen

$$u_x = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) + \dots + A_{n-1} P_{n-1}(x),$$
 (6)

oder, wenn die Momente der Funktion u_x eingeführt werden,

$$\begin{split} M_0 &= \sum u_x P_0(x) = A_0 \, N_0 \\ M_1 &= \sum u_x P_1(x) = A_1 \, N_1 \\ & \dots \dots \dots \dots \\ M_{n-1} &= \sum u_x P_{n-1}(x) = A_{n-1} \, N_{n-1} \\ u_x &= \frac{M_0}{N_0} \, P_0(x) + \frac{M_1}{N_1} \, P_1(x) + \dots + \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} \, P_{n-1}(x) \, . \end{split}$$

Beschränkt man sich auf die k ersten Glieder der Entwicklung (6), so ist der begangene Fehler gleich der Summe der vernachlässigten Glieder

$$A_k P_k(x) + \ldots + A_{n-1} P_{n-1}(x),$$

so dass die Summe der Fehlerquadrate beträgt

$$A_k^2 N_k + \ldots + A_{n-1}^2 N_{n-1} \equiv F_k.$$

Irgendeine Ersatzfunktion ebenfalls (n-1). Grades für u_x , etwa

$$A_0^* P_0(x) + \ldots + A_{k-1}^* P_{k-1}(x)$$

bedingt folgende Abweichung von u_x :

$$(A_0 - A_0^*) P_0 + \ldots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*) P_{k-1} + A_k P_k + \ldots + A_{n-1} P_{n-1}.$$

Die Summe F_k^* der Fehlerquadrate setzt sich aus F_k und den folgenden Ausdrücken zusammen:

$$(A_0 - A_0^*)^2 N_0 + \ldots + (A_{k-1} - A_{k-1}^*)^2 N_{k-1}$$

und da mindestens eine der Klammern nicht verschwindet, ist die Summe F_k kleiner als F_k^* .

Unter allen Ersatzfunktionen (k-1). Grades für u_x , bedingt das aus den Momenten $M_0, M_1, \ldots M_{k-1}$ gebildete Polynom

$$\frac{M_0}{N_0}P_0(x) + \ldots + \frac{M_{k-1}}{N_{k-1}}P_{k-1}(x)$$

die kleinste Summe der Fehlerquadrate.

Den aufeinanderfolgenden Ausgleichungspolynomen entsprechend

$$\frac{M_0}{N_0} + \frac{M_1}{N_1} P_1(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{M_0}{N_0} + \frac{M_1}{N_1} P_1(x) + \dots + \frac{M_{n-1}}{N_{n-1}} P_{n-1}(x)$$

sind diese Minimalsummen

$$F_1 \geqslant F_2 \geqslant F_3 \geqslant \ldots \geqslant F_{n-2} \geqslant F_{n-1} \geqslant 0$$
.

Die Gleichheit $F_k = F_{k+1}$ bedeutet, dass die Summe der Momente M_k Null ist.

Literatur

- [1] Pareto, V.: Tables pour faciliter l'application de la méthode des moindres carrés. Journal de Statistique suisse, 1er volume, 1899.
- [2] Gram, J. P.: Über partielle Ausgleichung mittels Orthogonalfunktionen. Mitteilungen, Band 10, 1915.