

# Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **52 (1952)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-550888>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Prämien und Deckungskapitalien in der Todesfallversicherung, wenn die Beiträge nur bis zum Todestag geschuldet sind

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

### Einleitung

Die heute geltenden Tarife für Todesfallversicherungen sehen fast ausnahmslos die echte unterjährige Prämienzahlung vor. Beim Ableben des Versicherten sind demzufolge die Beiträge nur noch für die im Zeitpunkt des Todes laufende Versicherungsperiode geschuldet. Formal versicherungstechnisch gesehen, ist diese Art der Prämienfestsetzung durchaus richtig; die Prämie ist «gerecht», da sie ein *Mittel aus Beständen gleichartiger Risiken* (d. h. gleichartig auch in bezug auf die *Art der Prämienzahlung*) darstellt. Neben dieser Betrachtungsweise gibt es aber noch eine andere, der eine Berechtigung nicht abzusprechen ist. Der Versicherte empfindet es oft als ungerecht, indem er *individuell* urteilt, wenn die Prämie für die ganze Versicherungsperiode entrichtet werden muss, unbekümmert darum, wann der Tod eingetreten ist. Sofern der Monat oder gar die Woche die Versicherungsperiode ist, entstehen praktisch kaum Schwierigkeiten; anders jedoch wenn die Prämien als jährlich oder halbjährlich zahlbar vereinbart sind. Der Versicherte möchte die Prämien nur bis zum Todestag geschuldet ansehen, d. h. die über den Todestag hinaus (nach seiner Auffassung zu viel) bezahlten Prämien rückerstattet haben.

Wir möchten im folgenden zeigen, wie sich die wichtigsten Formeln für Prämie, Deckungskapital, Sparprämie, Risikoprämie und Bilanzdeckungskapital gestalten, wenn angenommen wird, die Prämien seien nur bis zum Todestag geschuldet. Die Ansätze werden in diesem Fall mit grossem Vorteil kontinuierlich getroffen. Unsere Darlegungen können somit auch als ein Beispiel dafür gelten, wie kontinuierliche Ansätze umgewandelt werden können (und unseres Erachtens auch müssen), um praktisch verwendet werden zu können.

Wir werden die Ableitungen schrittweise vornehmen. Die Unterteilung wäre nicht nötig, wenn nur die Prämie bestimmt werden müsste; man könnte direkt die Äquivalenzgleichung durch näherungsweise Integration der numerischen Auswertung zuführen. Da aber neben der Prämie auch Bilanzdeckungskapital und Risikoprämie zu ermitteln sind, ist ein gestaffeltes Vorgehen vorzuziehen.

### 1. Rekursionsformel für das Deckungskapital

Für den Ansatz nehmen wir an, der Versicherte entrichte *stetig* die Prämie  $\bar{P}_x$ . Im Falle des Todes, spätestens nach  $n$  Jahren, werde die Summe «1» fällig (gemischte Versicherung). Die als vorläufig gedachte Annahme der stetigen Prämienzahlung enthebt uns der Berücksichtigung der Prämienrückerstattung, denn es sind keine Beiträge über den Todestag hinaus bezahlt.

Wir bezeichnen mit

$\delta$ : Zinsintensität,

$\mu_x$  bzw.  $q_x$ : Sterbeintensität bzw. einjährige Sterbewahrscheinlichkeit,

${}_t\bar{V}_x$ : Nettodeckungskapital im Zeitpunkt  $t$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir vorübergehend  ${}_t\bar{V}_x = \bar{V}(0)$ ,  ${}_{t+1}\bar{V}_x = \bar{V}(1)$  und  $x + t = y$  ein, wobei  $t$  ganzzahlig sein soll.

Für den Zeitabschnitt  $t$  bis  $t + h$  ( $h \leq 1$ ) gilt mit den gewählten Bezeichnungen die (Rekursions-)Formel

$$\bar{V}(0) e^{\delta h} + \bar{P}_x \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y+\xi}}{l_y} d\xi - \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y+\xi} \mu_{y+\xi}}{l_y} d\xi - \frac{l_{y+h}}{l_y} \bar{V}(h) = 0. \quad (1)$$

Innerhalb des Intervalls  $t$  bis  $t + h$  ( $h \leq 1$ ) soll die Sterbewahrscheinlichkeit linear verlaufen. Es ist also

$$\frac{l_{y+\xi}}{l_y} = 1 - {}_\xi q_y = 1 - \xi q_y. \quad (2)$$

Daraus folgt für  $\mu_{y+\xi} = \frac{q_y}{1 - \xi q_y}$ , und (1) geht über in

$$(\bar{V}(0) + \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{h}}) e^{\delta h} - q_y \left( \bar{s}_{\bar{h}} + \bar{P}_x \int_0^h \xi e^{\delta(h-\xi)} d\xi \right) - (1 - h q_y) \bar{V}(h) = 0. \quad (3)$$

Wir setzen

$$k_h = \int_0^h \xi e^{\delta(h-\xi)} d\xi = \frac{e^{\delta h} - 1 - h\delta}{\delta^2}. \quad (4)$$

Für  $h = 1$  folgt mit  $e^\delta = 1 + i$ ,

$$k_1 = \frac{i - \delta}{\delta^2}, \quad (5)$$

und weiter aus (3) mit  $v = e^{-\delta}$  die Rekursionsformel

$$\bar{V}(1) = \frac{\bar{V}(0)}{vp_y} + \frac{\bar{P}_x(\bar{a}_{\bar{1}|} - vk_1q_y) - v\bar{s}_{\bar{1}|}q_y}{vp_y}. \quad (6)$$

## 2. Auflösung der Rekursionsformel (6)

Wir schreiben (6) in der ausführlichen Form

$${}_{t+1}\bar{V}_x = \frac{1}{vp_{x+t}} {}_t\bar{V}_x + \frac{\bar{P}_x(\bar{a}_{\bar{1}|} - vk_1q_{x+t}) - v\bar{s}_{\bar{1}|}q_{x+t}}{vp_{x+t}} = H(t) {}_t\bar{V}_x + R(t). \quad (7)$$

Bezeichnen wir zur Auflösung der Differenzengleichung mit

$$U(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} H(\tau),$$

so wird

$${}_t\bar{V}_x = U(t) \left[ \sum_{\tau=0}^{t-1} \frac{R(\tau)}{U(\tau+1)} + K \right].$$

Wir nehmen  ${}_0\bar{V}_x = 0$  an; folglich ist  $K = 0$ . Ferner ist

$$U(t) = \prod_{\tau=0}^{t-1} \frac{1}{vp_{x+\tau}} = \frac{l_x}{v^t l_{x+t}}$$

und damit

$${}_t\bar{V}_x = \frac{1}{v^t l_{x+t}} \sum_{\tau=0}^{t-1} v^\tau l_{x+\tau} \{ \bar{P}_x(\bar{a}_{\bar{1}|} - vk_1q_{x+\tau}) - v\bar{s}_{\bar{1}|}q_{x+\tau} \}. \quad (8)$$

Weil  ${}_n\bar{V}_x = 1$ , folgt aus (8), wenn noch die üblichen diskontierten Zahlen der Lebenden und Gestorbenen eingeführt werden,

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{\bar{P}_x}{D_x} \left\{ \bar{a}_{\bar{1}|} \sum_{\tau=0}^{n-1} D_{x+\tau} - k_1 \sum_{\tau=0}^{n-1} C_{x+\tau} \right\} - \frac{\bar{s}_{\bar{1}|}}{D_x} \sum_{\tau=0}^{n-1} C_{x+\tau}, \quad (9)$$

woraus

$$\bar{P}_x = \frac{{}_nE_x + \bar{s}_{\bar{1}|} {}_nA_x}{\bar{a}_{\bar{1}|} a_{x:n|} - k_1 {}_nA_x} = \frac{\tilde{A}_{x:n|}}{\tilde{a}_{x:n|}}. \quad (10)$$

Damit ist eine sehr einfache Formel für  $\bar{P}_x$  gewonnen<sup>1)</sup>. Die  ${}_nE_x$ ,  ${}_nA_x$  und  $a_{x:\overline{n}|}$  sind die Barwerte bei diskontinuierlicher Betrachtungsweise, und für  $\bar{a}_{1|}$  bzw.  $\bar{s}_{1|}$  gelten die einfachen Beziehungen  $\bar{a}_{1|} = \frac{1-v}{\delta}$  bzw.  $\bar{s}_{1|} = (1+i)\bar{a}_{1|}$ .

Formel (8) ist retrospektiver Art; für die numerische Berechnung ist die Umwandlung in eine prospektive Formel angezeigt. Bei Teilung des Intervalls 0 bis  $n$  in (9) und nach Multiplikation mit  $\frac{D_x}{D_{x+t}}$  folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} {}_t\bar{V}_x &= {}_{n-t}E_{x+t} + \bar{s}_{1|}{}_{|n-t}A_{x+t} - \bar{P}_x(\bar{a}_{1|}a_{x+t:\overline{n-t}|} - k_1{}_{|n-t}A_{x+t}) = \\ &= \tilde{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \bar{P}_x\tilde{a}_{x+t:\overline{n-t}|}. \end{aligned} \quad (11)$$

Zu prüfen ist, ob die Beziehungen  $\tilde{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\tilde{a}_{x:\overline{n}|}$  und daraus  ${}_t\bar{V}_x = 1 - \frac{\tilde{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\tilde{a}_{x:\overline{n}|}}$  gelten. Nachdem in den stetigen Barwerten  $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$  und  $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$  die gleiche Näherung:  $q_y = \xi q_y$  gebraucht worden ist, folgt aus  $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\bar{a}_{x:\overline{n}|}$  die Gültigkeit der eingangs erwähnten Formeln.

### 3. Die vom Versicherten zu zahlende Prämie

Die Prämie  $\bar{P}_x$  ist als stetig zahlbar angenommen, kann also schon aus ihrer Definition heraus nicht gleich dem vom Versicherten verlangten Beitrag sein.

Die vom Versicherten zahlbare Nettoprämie sei  $\Pi_x$ . Zur Festsetzung von  $\Pi_x$  sind verschiedene Ansätze denkbar.

a) Der Versicherte entrichtet, wenn jährliche Prämienzahlung angenommen ist, zum voraus den Barwert

$$\Pi_x = \bar{P}_x\bar{a}_{1|}. \quad (12)$$

Im Falle des Ablebens ist der nicht geschuldete Teil einschliesslich Zinsen zurückzuerstatten. Erfolgt das Ableben im Zeitpunkt  $t+h$ ,

<sup>1)</sup> Man erhält die nämliche Formel, wenn im stetigen Ansatz für  $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$  und  $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$  der Integrationsweg 0 bis  $n$  in  $n$  jährliche Stufen eingeteilt wird und innerhalb eines Jahres der lineare Verlauf von  $\xi q_y$  angenommen wird. Warum wir nicht den direkten Weg beschritten haben, ist in der Einleitung begründet.

so war für das laufende Jahr  $\bar{P}_x \bar{a}_{\overline{h}|}$  (Wert zu Beginn des Jahres) geschuldet, also einschliesslich Zinsen  $e^{\delta h}(\bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|} - \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{h}|})$  rückzahlbar <sup>1)</sup>.

b) Für den Versicherten am besten verständlich ist der folgende Ansatz. Beim Ableben im Zeitpunkt  $t + h$  ist von der bezahlten Jahresprämie  $II_x$  der Teil  $h II_x$  verbraucht,  $(1 - h) II_x$  also rückzahlbar, oder einschliesslich Zinsen ab Zahlungstermin mit  $e^{\delta h}(1 - h) II_x$ . Es muss dann gelten

$$e^{\delta h} h II_x = e^{\delta h} \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{h}|},$$

woraus

$$II_x \sim \bar{P}_x \left( 1 - \frac{h\delta}{2} \right). \quad (13)$$

Der Rückerstattungsbetrag einschliesslich Zinsen wird damit

$$e^{\delta h}(1 - h) II_x \sim (1 - h) II_x (1 + ih).$$

Das Vorgehen führt zwangsläufig auf eine Prämie, die von  $h$ , also vom Todestag abhängig ist; man müsste zur praktischen Durchführung folglich einen mittleren Wert für  $h$  annehmen, z. B. bei jährlicher Prämienzahlung  $h = \frac{1}{2}$  setzen, woraus

$$II_x^{(1)} = \bar{P}_x \left( 1 - \frac{\delta}{4} \right). \quad (14)$$

Die Lösung verliert dadurch an Geschlossenheit; auch wird noch zu prüfen sein, wie sich die Deckungskapitalberechnung gestaltet, wenn die Prämie nach (14) angesetzt wird.

#### 4. Interpolation des Deckungskapitals

Gleichung (3) stellt bereits eine Interpolationsformel dar, sie beschränkt sich aber auf den Fall der stetig zahlbaren Prämie  $\bar{P}_x$ . Sofern der Versicherte zu Beginn des Jahres die Prämie  $II_x$  entrichtet, also nicht stetige Prämienzahlung angenommen ist, muss (3) angepasst werden. Man hat dabei zu beachten, dass beim Ableben im Zeitpunkt

---

<sup>1)</sup> Dieser Fall ist behandelt in *J. M. Boermeester: Certain implications which arise when the assumption is made that premiums are paid continuously and death benefits are paid at the moment of death.* (Transactions Actuarial Society of America. Vol. 50, 1949, S. 71-75.)

$t + h$  nicht nur die Summe «1» fällig wird, sondern auch die Prämienrückerstattung in Höhe von  $e^{\delta h}(II_x - \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{h}|})$ . Gleichung (1) nimmt dann die Gestalt an

$$(\bar{V}(0) + II_x) e^{\delta h} - \int_0^h e^{\delta(h-\xi)} \frac{l_{y+\xi} \mu_{y+\xi}}{l_y} [1 + e^{\delta \xi}(II_x - \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{\xi}|})] d\xi - \frac{l_{y+h}}{l_y} \bar{V}(h) = 0. \quad (15)$$

Mit dieser Schreibweise haben wir unterstellt, dass für ganzzahlige  $t$  das Deckungskapital  ${}_t \bar{V}_x$  vorhanden sein soll. Sofern dem so ist, also  $\bar{V}(0)$  das Deckungskapital bei stetiger Prämienzahlung bedeutet, muss  $\bar{V}(1) = \bar{V}(1)$  werden; das ist aber nur möglich, wenn  $II_x$  bestimmte Bedingungen erfüllt.

Für den Augenblick betrachten wir (15) ohne Randbedingung für  $II_x$  und werten nach gleichen Grundsätzen aus wie früher. Wir erhalten ohne Mühe, wenn wir noch

$$r_h = \frac{e^{-\delta h} - 1 + h\delta}{\delta^2} \quad (16)$$

setzen,

$$(\bar{V}(0) + II_x) e^{\delta h} - q_y \{ \bar{s}_{\bar{h}|} + h e^{\delta h} II_x - r_h e^{\delta h} \bar{P}_x \} - (1 - h q_y) \bar{V}(h) = 0. \quad (17)$$

Sei  $h = 1$ . Dann wird

$$\bar{V}(1) = \frac{\bar{V}(0)}{v p_y} + \frac{(1 - q_y) II_x + r_1 \bar{P}_x q_y - v \bar{s}_{\bar{1}|} q_y}{v p_y} \quad (18)$$

mit

$$r_1 = \frac{e^{-\delta} - 1 + \delta}{\delta^2}. \quad (19)$$

Sofern  $\bar{V}(1) = \bar{V}(1)$  sein soll, muss (18) = (6) werden,  $II_x$  also die Gleichung erfüllen

$$(1 - q_y) II_x + r_1 \bar{P}_x q_y = \bar{P}_x (\bar{a}_{\bar{1}|} - e^{-\delta} k_1 q_y),$$

woraus unter Beachtung von (5) und (19)

$$II_x = \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{1}|}.$$

Das heisst, die Deckungskapitalberechnung für ganzzahlige  $t$  darf nur dann nach der kontinuierlichen Methode und mit  $\bar{P}_x$  vorgenommen werden, wenn die tatsächlich erhobene Prämie  $II_x = \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{1}|}$  ist und im Todesfall  $e^{\delta h}(\bar{P}_x \bar{a}_{\bar{1}|} - \bar{P}_x \bar{a}_{\bar{h}|})$  zurückerstattet wird.

Wir werden später prüfen, wie gross die Abweichungen sein werden, wenn  $\Pi_x$  nach Beziehung (14) festgesetzt, das Deckungskapital aber mit der stetigen Prämie  $\bar{P}_x$  bestimmt wird. Vorerst wollen wir eine weitere Interpolationsformel für das Deckungskapital ableiten. Wir lösen (6) mit  $\Pi_x = \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1}|}$  nach  $\Pi_x$  auf und erhalten

$$\Pi_x = v\bar{V}(1) - \bar{V}(0) + vq_y(s_{\overline{1}|} + k_1 \bar{P}_x - \bar{V}(1)). \quad (20)$$

In dieser Gleichung hat  $v\bar{V}(1) - \bar{V}(0)$  den Sinn einer Sparprämie  $\Pi^S(y)$ ; der Rest  $vq_y(s_{\overline{1}|} + k_1 \bar{P}_x - \bar{V}(1))$  ist demnach die Risikoprämie  $\Pi^R(y)$ . Nimmt man zur Interpolation an, die Risikoprämie werde gleichmässig verbraucht, so wird das Deckungskapital für den Zeitpunkt  $t + h$

$$\bar{V}(h) = (\bar{V}(0) + \Pi_x) e^{\delta h} - \int_0^h e^{\delta \xi} \Pi^R(y) d\xi = (\bar{V}(0) + \Pi_x - \bar{a}_{\overline{h}|} \Pi^R(y)) e^{\delta h}. \quad (21)$$

Weil aber  $\Pi_x = \Pi^S(y) + \Pi^R(y)$  ist, folgt weiter

$$\bar{V}(h) = \{ \bar{V}(0) + \Pi^S(y) + (1 - \bar{a}_{\overline{h}|}) \Pi^R(y) \} e^{\delta h} = \{ v\bar{V}(1) + (1 - \bar{a}_{\overline{h}|}) \Pi^R(y) \} e^{\delta h};$$

mit  $\Pi^R(y) = \Pi_x - v\bar{V}(1) + \bar{V}(0)$  wird schliesslich

$$\bar{V}(h) = \{ (1 - \bar{a}_{\overline{h}|}) \bar{V}(0) + v\bar{a}_{\overline{h}|} \bar{V}(1) + (1 - \bar{a}_{\overline{h}|}) \Pi_x \} e^{\delta h}. \quad (22)$$

Aus dem Ansatz, der zu (22) führt, geht hervor, dass  $\bar{V}(1) \neq \bar{V}(1)$  sein kann. Will man  $\bar{V}(1) = \bar{V}(1)$  erreichen, muss man annehmen, dass der Bruchteil  $h$  der Risikoprämie  $\Pi^R(y)$  als zu Beginn verbraucht angesehen wird. Dann lautet die Interpolationsformel

$$\bar{V}(h) = \{ (1 - h) \bar{V}(0) + vh\bar{V}(1) + (1 - h) \Pi_x \} e^{\delta h} \quad (23)$$

mit  $\bar{V}(1) = \bar{V}(1)$ .

## 5. Numerische Beispiele

Wir wollen die Formeln (17), (22) und (23) numerisch vergleichen und zugleich abklären, welchen Wert  ${}_{t+h}\bar{V}_x$  annimmt, wenn

$\Pi_x^{(1)} = \bar{P}_x \left( 1 - \frac{\delta}{4} \right)$  gesetzt wird. Wir wählen die Kombination

$x = 30$ ,  $n = 30$ , die Sterbetafel SM 1921/30, den Zinsfuss  $i = 0,025$ . Die Ergebnisse der Berechnung sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.



${}_{t+\frac{1}{2}}\bar{V}_x$ nach Formel	$t = 0$	$t = 10$	$t = 20$
	‰	‰	‰
(17) } mit $II_x = \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1} }$	24,91	285,74	608,63
(22) }	24,95	285,79	608,71
(23) }	24,93	285,77	608,70
(17) } mit $II_x^{(1)} = \bar{P}_x \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)$	25,07	285,90	608,79
(22) }	25,03	285,87	608,79
(23) }	25,01	285,85	608,78
${}_{t+1}\bar{V}_x$ nach Formel <sup>2)</sup>			
(17) <sup>1)</sup> } mit $II_x = \bar{P}_x \bar{a}_{\overline{1} }$	23,18	286,95	613,49
(22) }	23,23	287,01	613,56
(23) <sup>1)</sup> }	23,18	286,95	613,49
(17) } mit $II_x^{(1)} = \bar{P}_x \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)$	23,34	287,11	613,65
(22) }	23,23	287,01	613,56
(23) <sup>1)</sup> }	23,18	286,95	613,49
<sup>1)</sup> Identisch mit ${}_{t+1}\bar{V}_x$ . <sup>2)</sup> Es handelt sich in jedem Fall um den rekursiven Aufbau des Deckungskapitals.			

Die genaue Formel (17) verlangt die Gliederung des Bestandes nach dem erreichten Alter  $x + t$ , ist also für gruppenweise Reserveberechnung nicht geeignet. Es zeigt sich, dass (22) und (23) zur Deckungskapitalberechnung für gebrochene Zeitpunkte völlig ausreichen; die Abweichungen zu (17) sind belanglos. Ferner erweist es sich, dass die Festsetzung der Prämie nach (14), d. h. die proportionale Beitragsrückerstattung im Todesfall, ungeachtet des frühern formalen Einwandes, absolut brauchbar ist und in der Deckungskapitalbestellung nur zu belanglosen Abweichungen führt.