Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 52 (1952)

Artikel: Über eine spezielle Klasse von Frequenzfunktionen

Autor: Rufener, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-550798

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 29.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine spezielle Klasse von Frequenzfunktionen

Von E. Rufener, Zürich

A. Sommerfeld hat für seine Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes symmetrische Verteilungen herangezogen, die sich durch Faltung gleichbreiter rechteckiger Frequenzfunktionen ergeben [1] ¹). Derartige Funktionen gehen auch in die Lösungsformeln für die gleichwahrscheinliche Aufteilung [2] und den Mittelwert der mittleren Breite zufallsartig gestalteter Polygone ein [3].

Die Faltung rechteckiger Frequenzfunktionen verschiedener Breite führt auf eine allgemeinere Klasse von symmetrischen Frequenzfunktionen. Einblick in ihr Verhalten vermittelt ihre Darstellung durch bestimmte Integrale. Wie in derartigen Fällen üblich, benutzen wir die Fouriertransformation, um das Faltungsprodukt in ein bestimmtes Integral überzuführen und dessen Wert explizite anzugeben. Dem zentralen Grenzwertsatz entnehmen wir schliesslich eine Grenzwertformel, die bemerkenswerte Sonderfälle enthält. Die Bedeutung, die einzelne der angeführten Relationen als Hilfsmittel für das Lösen von Problemen, namentlich aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, haben, rechtfertigt unseres Erachtens eine zusammenfassende Darstellung ihrer Eigenschaften in dieser Mitteilung ²).

1. Integraldarstellung des Faltungsproduktes von *n* elementaren Frequenzfunktionen ³)

Die Verteilungen der n unabhängigen Variabel
n t_i seien durch die Frequenzfunktionen

¹⁾ Die Zahlen in [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

²) Ableitungen der von uns betrachteten Funktionen treten auch auf als Kerne einer gewissen Integralgleichung unendlich hoher Ordnung, die mit einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, für deren Hauptlösungen man das asymptotische Verhalten kennt, eng verknüpft ist (vgl. R. Jost, Helv. Phys. Acta 20 [1947], S. 256).

³⁾ Vgl. etwa G. Dötsch, Handbuch der Laplace-Transformation I (Basel 1950), insbes. S. 104–131 und 191–209.

$$F_{i}(t_{i}) = \begin{cases} \frac{1}{2a_{i}}, |t_{i}| < a \\ \frac{1}{4a_{i}}, |t_{i}| = a \\ 0, |t_{i}| > a \end{cases}$$
 (1)
$$\frac{1}{4a_{i}}$$
 Fig. 1

gegeben. Wir bezeichnen sie als «elementare rechteckige Verteilungen». Ihr Bild ist in Fig. 1 festgehalten.

Das Faltungsprodukt

$$\Omega_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_n(t),$$
 (2)

das von n Parametern $a_i (i=1,2,\ldots,n)$ abhängt, ist Frequenzfunktion der Summe $t=t_1+t_2+\ldots+t_n$

der als stochastisch unabhängig vorausgesetzten Variabel
n t_i mit den Frequenzfunktionen (1).

Die Fouriertransformation algebraisiert die transzendente Integralbildung der Faltung. Mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{F}\left\{\Omega_n(t;a_i);y\right\} = \omega(y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}\left\{F_i(t);y\right\} = f_i(y)$$
 folgt dann
$$\omega(y) = \prod_{\lambda=1}^n f_\lambda(y)$$
 oder, weil
$$f_i(y) = \int_{-\infty}^\infty e^{iyt} F_i(t) \, dt = \frac{1}{2a_i} \int_{-a_i}^{a_i} e^{-iyt} \, dt = \frac{\sin a_i y}{a_i y}$$
 ist,
$$\omega(y) = \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_\lambda y}{a_i y}.$$

 $\Omega_n(t; a_i)$ ist in t gerade Funktion; der Inversionssatz (Fouriersche Cosinustransformation) führt zur Integraldarstellung

(3)

$$\Omega_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=1}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{a_{\lambda} x} \cos tx \, dx = \frac{\Phi_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n})}{a_{1} a_{2} \dots a_{n}}.$$
 (4)

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda=1}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx, \qquad (5)$$

durch das Produkt $a_1 a_2 \ldots a_n$ normiert, ist Frequenzfunktion. Ihre Fouriertransformierte $\mathfrak{F}\left\{\Phi_n(t;a_i);y\right\}$ sei mit $\varphi(y)$ bezeichnet. Das Integral

$$\Phi_{1}(t; a_{1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_{1}x}{x} \cos tx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, |t| < a_{1} \\ \frac{1}{4}, |t| = a_{1} \\ 0, |t| > a_{1} \end{cases}$$
 (6)

ist als Dirichletscher Diskontinuitätsfaktor bekannt [4].

2. Integralrekursionen

Da das Faltungsprodukt assoziativ ist, lassen sich in (2) die ersten m und die n-m übrigen Faktoren zu Funktionen Ω_m und Ω_{n-m} zusammenfassen:

$$\begin{array}{l}
 & \Omega_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{n}) = \Omega_{m}(t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{m}) * \Omega_{n-m}(t; a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n}) \\
 & \Phi_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{n}) = \Phi_{m}(t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{m}) * \Phi_{n-m}(t; a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n}), \\
 & t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{m}(t - \tau; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{m}) \Phi_{n-m}(\tau; a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n}) d\tau.
\end{array}$$

Insbesondere ist

$$\begin{split} &\mathcal{Q}_{n}(t;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n}) = \mathcal{Q}_{n-1}(t;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n-1}) * \mathcal{Q}_{1}(t;a_{n})\,, \\ &\text{also} \\ &\mathcal{Q}_{n}(t;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n}) = \frac{1}{2a_{n}} \int_{-a_{n}}^{a_{n}} \mathcal{Q}_{n-1}(t-\tau;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n-1}) \,d\tau \\ &\text{oder} \\ &\mathcal{Q}_{n}(t;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n}) = \frac{1}{2a_{n}} \int_{t-a_{n}}^{t+a_{n}} \mathcal{Q}_{n-1}(\tau;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n-1}) \,d\tau \\ &\text{und} \\ &\mathcal{\Phi}_{n}(t;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n}) = \frac{1}{2} \int_{-a_{n}}^{a_{n}} \mathcal{\Phi}_{n-1}(t-\tau;a_{1},a_{2},\ldots,a_{n-1}) \,d\tau \end{split}$$

 $\Omega_n(t;a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ist Integralmittel von $\Omega_{n-1}(t;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ der symmetrischen Nachbarschaft von t über ein Intervall der Breite $2a_n$. $\Omega_n(t;a_1,a_2,\ldots,a_n)$ entsteht aus $\Omega_{n-1}(t;a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ durch einen «Glättungsprozess». $\Omega_n(t;a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ist Ergebnis der n-ten Glättung von $\Omega_1(t;a_1)$ und kann durch fortgesetztes Bilden des Integralmittels aus $\Omega_1(t;a_1)$ explizite berechnet werden.

3. Die Polynomdarstellungen der Funktionen $\Phi_n(t; a_i)$

Die rekursive Berechnung der $\Omega_n(t; a_i)$ oder der $\Phi_n(t; a_i)$ ist nur für kleine n geeignet; sie wird für $n \ge 3$ unübersichtlich und mühsam.

Um $\Phi_n(t;a_i)$ explizite darzustellen, können wir beispielsweise eine der gebräuchlichen funktionentheoretischen Methoden zur Ermittlung derartiger Integrale heranziehen.

Nahezu auf triviale Weise lässt sich die Polynomdarstellung von $\Phi_n(t; a_i)$ jedoch durch geschicktes Ausnützen der Eigenschaften der Fouriertransformation finden. Wir führen zunächst die Funktionen

$$[t]^{n} = \begin{cases} t^{n}, \ t \geqslant 0 \\ 0, \ t \leqslant 0 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$[t]^{0} = \begin{cases} 1, \ t > 0 \\ \frac{1}{2}, \ t = 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases} \quad (9)$$
ein.
$$\Re\{[t + \alpha]^{n}; y\} = \Gamma(n + 1) \frac{e^{i\alpha y}}{(iy)^{n+1}}$$

entnehmen wir die Inversionsformel

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{e^{i\alpha y}}{(iy)^{n+1}};t\right\} = \frac{[t+\alpha]^n}{n!}.$$
(10)

Fig. 2

Die Fouriertransformierte $\varphi(y)$ von $\Phi_n(t; a_i)$ wird auf zwei Arten dargestellt. Das Produkt der Sinusfaktoren,

$$\varphi(y) = \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} y}{y}, \qquad (3')$$

führt in der Inversion auf das bestimmte Integral (5) für $\Phi_n(t;a_i)$.

Stellt man in (3') die $\sin a_{\lambda} y$ durch die Eulerschen Formeln dar, so lässt sich $\varphi(y)$ als Summe schreiben, nämlich:

$$\varphi(y) = \prod_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{e^{ia_{\lambda}y} - e^{-ia_{\lambda}y}}{2iy} \right) = \frac{1}{2^{n}} \sum_{\epsilon_{j}} (-1)^{\lambda} \frac{e^{i(\epsilon_{1}a_{1} + \epsilon_{2}a_{2} + \dots + \epsilon_{n}a_{n})y}}{(iy)^{n}}$$

 ε_j ist der Werte +1 und -1 fähig; summiert wird über 2^n Summanden (über alle 2^n Vorzeichenanordnungen in der Klammer); λ ist die Anzahl der negativen ε_j in jedem Summand. Mittels (10) entsteht jetzt durch gliedweise Inversion eine Polynomdarstellung für $\Phi_n(t; a_i)$, die wegen der Eindeutigkeit der inversen Fouriertransformation das Integral (5) explizite darstellt:

$$\Phi_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx =
= \frac{1}{2^{n}(n-1)!} \sum_{\varepsilon_{j}} (-1)^{\lambda} \left[\varepsilon_{1} a_{1} + \varepsilon_{2} a_{2} + \dots + \varepsilon_{n} a_{n} \pm t \right]^{n-1}
(\varepsilon_{j} = \pm 1, \lambda \text{ Anzahl der negativen } \varepsilon_{j})$$
(11)

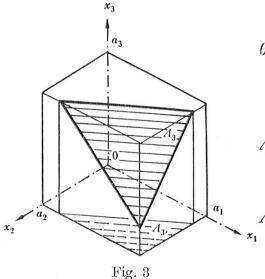
In der Klammer gelten beide Vorzeichen für t, da $\Phi_n(t; a_i)$ in t gerade Funktion ist.

(11) lehrt, dass $\Phi_n(t;a_i)$ aus Parabel
n der Ordnungen $\leqslant (n-1)$ zusammengesetzt ist und dass

$$\Phi_n(t; a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \text{ für } |t| \geqslant a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
 (12) wird.

4. Eine anschauliche geometrische Interpretation der Funktionen $\Phi_n(t; a_i)$ [1], [5]

Wir betrachten im Euklidischen n-dimensionalen Raum den Hyperquader mit Mittelpunkt 0 und den Kantenlängen $2a_i (i = 1, 2, ..., n)$. Seine Kanten seien zu den Koordinatenachsen x_i parallel.



Es bezeichne

- $heta_n(t)$ das Volumen des Quaders zwischen den (n-1)-dimensionalen Hyperebenen $x_1+x_2+\ldots+x_n=\pm t,$
- $A_n(t)$ das (n-1)-dimensionale Schnittvolumen zwischen Quader und Hyperebene,
- $A'_n(t)$ seine Projektion in eine der n Koordinatenhyperebenen $x_i = 0$.

Das Schnittvolumen $\theta_n(t)$ ist dann bestimmt durch

$$\theta_n(t) = \int_{-a_1}^{a_1} \int_{-a_2}^{a_2} \dots \int_{-a_n}^{a_n} \Phi \, dx_n \dots \, dx_2 \, dx_1.$$

Führt man für den Dirichletschen Faktor

$$\Phi = 2\Phi_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n; t) = \begin{cases} 1, |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| < t \\ 0, |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| > t \end{cases}$$

die Integraldarstellung (6) ein und integriert nach den x_i aus, so folgt

$$\theta_n(t) = 2^n \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 \xi}{\xi} \frac{\sin a_2 \xi}{\xi} \dots \frac{\sin a_n \xi}{\xi} \frac{\sin t \xi}{\xi} d\xi. \tag{13}$$

 $\varLambda_n'(t)$ und $\varLambda_n(t)$ entstehen aus $\theta_n(t)$ durch Differentiation:

$$\Lambda'_{n}(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta_{n}}{\partial t} = 2^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx = 2^{n} \Phi_{n}(t; a_{i})$$

$$\Lambda_{n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{2} \frac{\partial \theta_{n}}{\partial t} = 2^{n} \sqrt{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx = 2^{n} \sqrt{n} \Phi_{n}(t; a_{i}).$$
(14)

 $2^n \sqrt{n} \, \Phi_n(t; a_i)$ ist mithin (n-1)-dimensionales Schnittvolumen zwischen Quader und Ebene $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = t$; $2^n \Phi_n(t; a_i)$ ist Projektion des Schnittvolumens in eine der Koordinatenhyperebenen $x_i = 0$.

Wir bemerken noch, dass aus der Integralrekursion (8), wenn sie fortgesetzt auf sich selbst angewendet wird,

$$(a_i) = \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-a_n}^{a_n} \int_{-a_{n-1}}^{a_{n-1}} \dots \int_{-a_2}^{a_2} \Phi_1(t - \tau_n - \tau_{n-1} - \dots - \tau_2; a_1) d\tau_2 \dots d\tau_{n-1} d\tau_n = \frac{1}{2^n} \Lambda'_n(t)$$

folgt. Ebenso führt die geometrische Methode zur Berechnung von Frequenz- und Wahrscheinlichkeitsfunktionen einer Summe stochastisch unabhängiger Variabeln im Fall der elementar rechteckigen Verteilungen auf unsere geometrische Interpretation.

Die geometrische Deutung ermöglicht uns, in anschaulichen Fällen, Integrale $\Phi_n(t; a_i)$ durch geometrisch einfache Überlegungen zu ermitteln. Aus Fig. 4 folgt z. B. ohne Rechnung

$$\Phi_2(0; a_1, a_2) = \frac{a_1}{2}$$

und hieraus das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x}{x^2} dx = \text{Min.} (a_1, a_2).$$

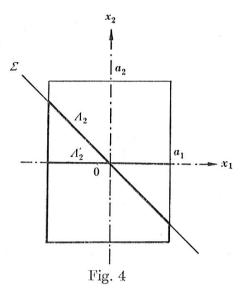


Fig. 5, konstruiert unter den Voraussetzungen $a_1 < a_2 < a_3$, $a_1 + a_2 < a_3$, entnehmen wir, dass in den Intervallgrenzen für t, die den Schnittebenen

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 + x_3 &=& a_1 + a_2 + a_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& -a_1 + a_2 + a_3 \equiv \varGamma_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& a_1 - a_2 + a_3 \equiv \varDelta_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& -a_1 - a_2 + a_3 \equiv E_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& a_1 + a_2 - a_3 \equiv E_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& -a_1 + a_2 - a_3 \equiv \varDelta_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& a_1 - a_2 - a_3 \equiv \varGamma_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& -a_1 - a_2 - a_3 \end{array}$$

entsprechen, die Darstellungspolynome für $\Phi_3(t; a_1, a_2, a_3)$ ändern.

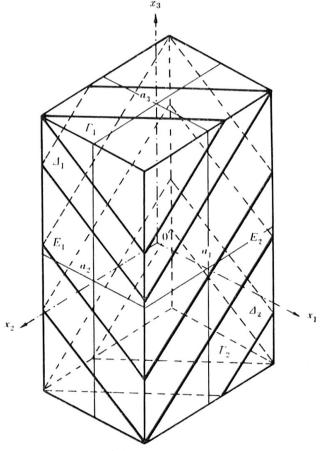


Fig. 5

Den expliziten Funktionsverlauf (Fig. 6) erhalten wir durch Berechnung der Schnittfiguren:

$$\varPhi_3(t; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 \,, & |t| \geqslant -a_1 + a_2 + a_3 \\ \frac{1}{16}(a_1 + a_2 + a_3 - t)^2, & a_1 + a_2 + a_3 \geqslant |t| \geqslant -a_1 + a_2 + a_3 \\ \frac{1}{4}(a_1 a_2 + a_1 a_3 - a_1 t), & -a_1 + a_2 + a_3 \geqslant |t| \geqslant -a_1 - a_2 + a_3 \\ \frac{1}{16}[8 \, a_1 \, a_2 - (a_1 + a_2 - a_3 + t)^2], & a_1 - a_2 + a_3 \geqslant |t| \geqslant -a_1 - a_2 + a_3 \\ \frac{a_1 \, a_2}{2} \,, & -a_1 + a_2 + a_3 \geqslant |t| \geqslant 0 \,. \end{cases}$$

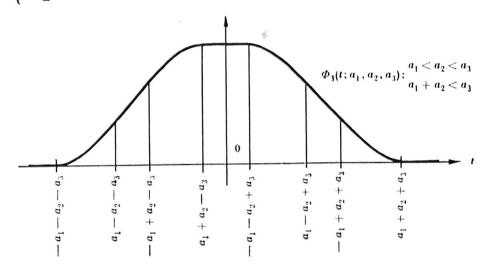


Fig. 6

5. Die Ableitungen nach t; Differentialrekursionen. Abschätzungsformeln

Aus
$$\Phi_n(t;a_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^n \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx$$

folgt durch Ableiten nach t mittelst einer naheliegenden trigonometrischen Umformung des Integranden, zunächst die Differentialrekursion

$$\frac{\partial \Phi_{n}(t; a_{i})}{\partial t} = \frac{1}{2} \left\{ \Phi_{n-1}(t + a_{1}; a_{2}, \dots, a_{n}) - \Phi_{n-1}(t - a_{1}; a_{2}, \dots, a_{n}) \right\} (16)$$

und hieraus

$$\frac{\partial^r \Phi_n(t; a_i)}{\partial t^r} = \frac{1}{2^r} \sum_{\epsilon_j} (-1)^{\lambda} \Phi_{n-r}(t + \epsilon_1 a_1 + \ldots + \epsilon_r a_r; a_{r+1}, \ldots, a_n)$$
 (17)
$$(\lambda = \text{Anzahl der negativen } \epsilon_i).$$

 $\Phi_n(t; a_i)$ hat nach (17) höchstens (n-2) stetige Ableitungen; existiert die (n-1)-te, so ist sie unstetig.

Die Kanten des Parallelepipedes seien in der Reihenfolge a_1, a_2, a_3, \ldots der Grösse nach angeordnet: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Die in der Koordinatenhyperebene $x_i = 0$ liegende «Grundfläche» des Quaders ist also kleinste begrenzende «Seitenfläche».

Weil die Projektion des Schnittvolumens, $A'_n(t)$, in eine Koordinatenhyperebene höchstens die in ihr liegende «Grundfläche» ausfüllen kann, folgen die Abschätzungen

$$\Phi_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n}) \leqslant \frac{1}{2} a_{1} a_{2} \dots a_{n-1} \leqslant \frac{1}{2} (a_{1} a_{2} \dots a_{n-1})^{\frac{n-1}{n}} = \frac{a_{1} a_{2} \dots a_{n}}{2N}$$
mit
$$N = \sqrt[n]{a_{1} a_{2} \dots a_{n}} \tag{18}$$

$$\left| \frac{\partial^r \Phi_n(t; a_i)}{\partial t^r} \right| \leqslant \frac{1}{2} a_1 a_2 \dots a_{n-r-1} \leqslant \frac{1}{2} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{n-r-1}{n}} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2 N^{r+1}}$$
 (19)

oder

$$\left| \frac{\partial^r \boldsymbol{\Phi}_n(t; a_i)}{\partial t^r} \right| \leqslant \frac{1}{2} \left(a_1 a_2 \dots a_m \right)^{\frac{n-r-1}{m}}, \quad (n - r - 1 \leqslant m \leqslant n). \tag{20}$$

6. Die Grenzfälle unendlich grosser Kantenlängen

Um den Einfluss der Grössenbeziehungen zwischen den Kanten $2a_i$ auf das Aussehen der Funktion $\Phi_n(t;a_i)$ zu untersuchen, ist es zweckmässig, die Quaderecke $(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$ als neuen Ursprung 0* des Koordinatensystems zu wählen. Bezeichnen wir die Kantenlängen durch $\alpha_i=2a_i, \quad (i=1,2,\ldots,n),$

so hat im neuen Koordinatensystem die Schnittebene \sum den Achsenabschnitt n

 $\tau = t + \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda} = t + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\lambda}$

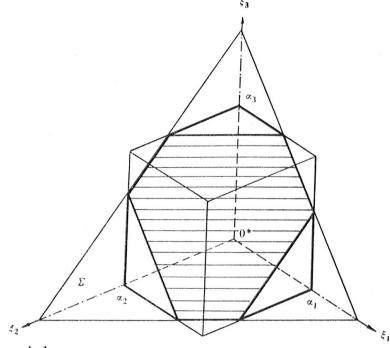


Fig. 7

und es wird

$$\begin{split} \varPhi_{n}(t;a_{i}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \cos tx \, dx \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin \alpha_{\lambda} x}{x} \cos \left(2\tau - \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda}\right) x \, dx \\ &= \frac{1}{2^{n}(n-1)!} \sum_{\theta_{j}} (-1)^{\lambda} \left[\theta_{1}\alpha_{1} + \theta_{2}\alpha_{2} + \ldots + \theta_{n}\alpha_{n} + \tau\right]^{n-1} = \varPhi^{*}(\tau;\alpha_{i}) \\ &\left(\theta_{j} = \frac{\varepsilon_{j} - 1}{2} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \, \lambda \text{ Anzahl der negativen } \theta_{j} \right) \end{split}$$

oder

$$\Phi_n^*(\tau;\alpha_i) = \frac{1}{2^n(n-1)!} \cdot \{ [\tau]^{n-1} - \sum_i [\tau - \alpha_i]^{n-1} + \sum_{i_1, i_2} [\tau - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}]^{n-1} - + \dots + (-1)^n [\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n]^{n-1} \}$$

 $\Phi_n^*(\tau; \alpha_i)$ ist monoton in den α_i , symmetrisch zu $\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda}$ und verschwindet für $\tau \leqslant 0$ und $\tau \geqslant \sum_{\lambda=1}^n \alpha_{\lambda}$.

Werden einzelne der α_i unendlich gross, z. B. $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, so erhält man die entsprechende Funktion $\Phi_n^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \infty, \infty, \ldots, \infty)$ dadurch, dass in (21') die Klammerausdrücke, die eines der unendlich grossen α_i enthalten, weggelassen werden. Wir betrachten zwei Sonderfälle:

a)
$$\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \infty}$$
 (in der Integralformel genügt es, $\underline{\alpha_i = \tau \text{ zu setzen}}$):
$$\underline{\Phi^*(\tau; \infty, \infty, \infty, \ldots, \infty)} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \tau x}{x}\right)^n \cos(2-n) \tau x \, dx = \frac{\tau^{n-1}}{2^n (n-1)!}. \quad (22)$$

Die geometrische Interpretation dieser Formel ist offensichtlich. (22) enthält für feste τ die Abschätzung

$$\Phi_n^*(\tau;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \leqslant \frac{\tau^{n-1}}{2^n(n-1)!}$$
 (22')

(das Gleichheitszeichen gilt, falls $\alpha_i \geqslant \tau$, (i = 1, 2, ..., n)), sowie eine Integraldarstellung der reziproken Fakultät

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos (n-2) x \, dx = \frac{1}{(n-1)!}.$$
 (23)

b)
$$\alpha_n = \infty \ (a_n = \infty)$$
.

Die Projektion der Schnittfigur in die Hyperebene $\xi_n = 0$ $(x_n = 0)$ fällt für $\tau \geqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}$ (t beliebig) ganz mit der in ihr liegenden «Grundfläche» des Quaders zusammen.

Es folgen die Relationen

$$\Phi_{n}^{*}(\tau; \alpha_{1}, \alpha_{2}, \dots, \alpha_{n-1}, \infty) = \frac{\alpha_{1}\alpha_{2}\dots\alpha_{n-1}}{2^{n}}, \ \tau \geqslant \alpha_{1} + \alpha_{2} + \dots + \alpha_{n-1},
\Phi_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n-1}, \infty) = \Phi_{n}(0; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n-1}, \infty)
= \Phi_{n}(0; a_{1}, a_{2}, \dots, a_{n-1}, a_{1} + a_{2} + \dots + a_{n-1}) = \frac{a_{1}a_{2}\dots a_{n-1}}{2}$$
(24)

und aus ihnen die Integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n-1} \frac{\sin a_{\lambda} x}{x} \frac{\sin (a_{1} + a_{2} + \dots + a_{n-1}) x}{x} dx = a_{1} a_{2} \dots a_{n-1}, (25)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n} \frac{\sin nx}{x} dx = 1. \tag{25'}$$

7. Beispiele 1)

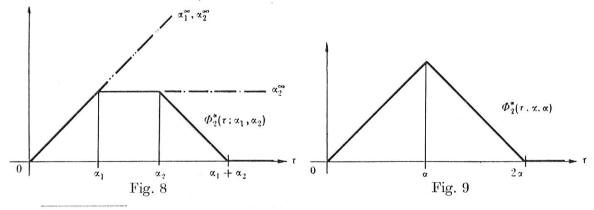
I.
$$\alpha_1 < \alpha_2$$
 (Fig. 8)
$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1$$

$$\alpha_1, \qquad \alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2$$

$$4arPhi_2^*(au;lpha_1,lpha_2) = egin{cases} au, & 0\leqslant au\leqslantlpha_1\ lpha_1, & lpha_1\leqslant au\leqslantlpha_2\ lpha_1+lpha_2- au, & lpha_2\leqslant au\leqslantlpha_1+lpha_2\ 0, & lpha_1+lpha_2\leqslant au \end{cases}$$

II.
$$\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha}$$
 (Fig. 9)

$$4arPhi_2^*(au;lpha,lpha) = egin{cases} au\,, & 0\leqslant au\leqslant lpha\ 2lpha- au\,, & lpha\leqslant au\leqslant 2lpha\ 0\,, & 2lpha\leqslant au \end{cases}$$

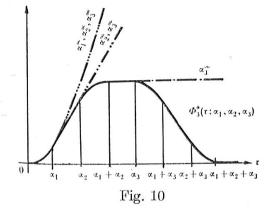


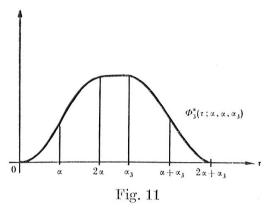
¹⁾ Die Funktionskurven zu unendlich grossen Parametern α_i sind entsprechend mit α_i^{∞} bezeichnet.

b)
$$n = 3$$

I.
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$
; $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$ (Fig. 10 und 11)

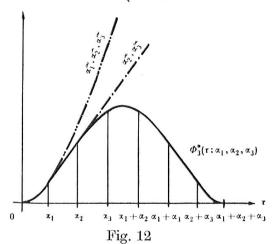
$$\begin{array}{l}
0) \ \underline{n=3} \\
1. \ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3; \ \underline{\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3} \ (\text{Fig. 10 und 11}) \\
6 \mathcal{P}_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{cases}
\tau^2, & 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 \\
2\alpha_1 \tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 \\
-\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) \tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 \\
2\alpha_1 \alpha_2, & \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \alpha_3 \\
-\tau^2 + 2\alpha_3 \tau + 2\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2, & \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_3 \\
-2\alpha_1 \tau + 2\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 + \alpha_3 \\
(\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\
0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \tau
\end{array}$$

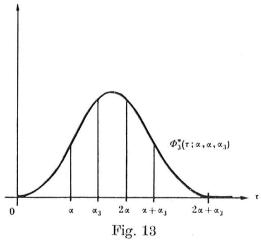




II. $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$; $\underline{\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3}$ (Fig. 12 und 13)

$$6\varPhi_3^*(\tau;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 \\ 2\alpha_1\tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \alpha_3 \\ -2\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\tau - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, & \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2\alpha_3\tau + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2, & \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1\tau + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 + \alpha_3 \\ (\tau - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0, & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \tau \end{cases}$$





III.
$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$
; $\underline{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3}$ (Fig. 14 und 15)

$$16 \varPhi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{cases} \tau^2, & 0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 \\ 2\alpha_1\tau - \alpha_1^2, & \alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 \\ -\tau^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\tau - \alpha_1^2 - \alpha_2^2, & \alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1\tau + 4\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1^2, & \alpha_1 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_2 + \alpha_3 \\ (\tau - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)^2 = (\tau - 2\alpha_3)^2, & \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

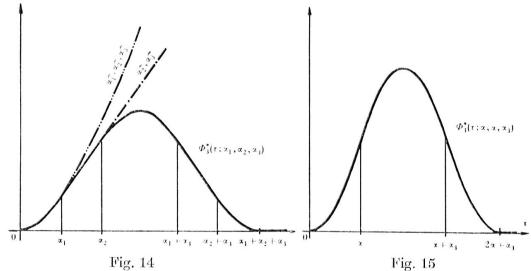
$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$0 \leqslant$$



 $\Phi_3^*(\tau; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ setzt sich aus quadratischen Parabeln und Geradenstücken mit gemeinsamen Tangenten in den Nahtstellen zusammen. In den Fällen I und III ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) folgen sich diese abwechslungsweise. Das horizontale Scheitelstück verschwindet, wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ ist (III); in II ist es ebenfalls durch einen parabolischen Bogen ersetzt. Die linearen Stücke im aufsteigenden und im absteigenden Ast arten für $\alpha_1 = \alpha_2$ aus. Die Vertikale durch ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$)/2 ist Symmetrieachse.

8. Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$

Hornich hat gezeigt [6], dass die Integrale

$$\Omega_{n}(t; a_{1}, a_{2}, \ldots, a_{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin a_{\lambda} x}{a_{\lambda} x} \cos tx \, dx$$

für $n \to \infty$ stets gleichmässig in t konvergieren und dass die Grenzfrequenzfunktion $\Omega(t; a_1, a_2, \ldots)$, falls $\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^2$ konvergiert, eine von Null verschiedene analytische Funktion ist (divergiert $\sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^{2}$, so verschwindet $\Omega(t; a_{1}, a_{2}, \ldots)$ identisch). Die Funktionen $\Omega(t; a_{1}, a_{2}, \ldots)$ sind von unendlich vielen Parametern abhängig.

Der zentrale Grenzwertsatz (Central Limit Theorem) gibt uns die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Gaußsche Konvergenz. Es sei

 $M_n = \sum_{\lambda=1}^n m_{\lambda} \text{ und } m_{\lambda} = \frac{a_{\lambda}^2}{3}$

das zweite Moment der elementaren Verteilungen (1). Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{M_n} \, \Omega_n \left(\sqrt{M_n} \, t; a_i \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{26}$$

falls $\frac{m_{\lambda}}{M_n} \rightarrow 0 (\lambda = 1, 2, ..., n)$, und $\sqrt{M_n}$ nicht beschränkt ist. Für die in der Tabelle

	a_{λ}	m_{λ}	M_n
(I)	1	1 3	$\frac{n}{3}$
(II)	\[\sum_{\lambda} \]	$\frac{\lambda}{3}$	$\frac{(n+1)n}{6}$
(III)	λ	$\frac{\lambda^2}{3}$	$\frac{(2n+1)(n+1)n}{18}$

enthaltenen Beispiele ergeben sich daher die Grenzwertformeln:

(I)
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \, \Phi_n(\sqrt{n} \, t) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3t^2}{2}}, \qquad (27)$$

$$(\text{II}) \quad \lim_{n \to -\infty} \sqrt{\overline{(n+1)}\, n} \ \varOmega_n(\sqrt{\overline{(n+1)}\, n} \ t; 1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{\overline{n}}) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \, e^{-3t^2},$$

$$(\text{III}) \lim_{n \to -\infty} \sqrt{(2n+1)(n+1)n} \, \Omega_n \big(\sqrt{(2n+1)(n+1)n} \, t \, ; 1, 2, \ldots, n \big) = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-9t^2},$$

und an der Stelle t=0:

(I)
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \sqrt{6\pi}, \tag{28}$$

(II)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(n+1)\,n} \int_{\lambda=1}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}\,x} \, dx = \sqrt{12\pi},$$

(III)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(2n+1)(n+1)n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\sin \lambda x}{\lambda x} dx = 6\sqrt{\pi}.$$

9. Der Sommerfeldsche Fall:
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$$

$$\Phi_n(t; 1, 1, \dots, 1) = \Phi_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots)$$
 (29)

sind symmetrische Frequenzfunktionen. Sommerfeld hat ihr Grenzverhalten benutzt zu seiner anschaulichen Herleitung des Gaußschen Fehlergesetzes [1]. Die nachfolgend erwähnten Formeln sind Sonderfälle der für die $\Phi_n(t; a_i)$ hergeleiteten Relationen:

$$\Phi_{n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n} \cos tx \, dx \tag{30}$$

ist Lösung der Faltungsfunktionalgleichung

$$\Phi_{n+m}(t) = \Phi_n(t) * \Phi_m(t) = \int_0^\infty \Phi_n(t-\tau) \Phi_m(\tau) d\tau$$
 (31)

und erfüllt die Integralrekursionen

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{t+1} \Phi_{n-1}(\xi) \, d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \Phi_{n-1}(t-\xi) \, d\xi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \Phi_{n-1}(t+\xi) \, d\xi. \quad (32)$$

(11) geht wegen $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \ldots + a_n \varepsilon_n \pm t = n - 2\lambda \pm t$ nach Zusammenfassen der $\binom{n}{\lambda}$ gleichen Summanden über in die erstmals von Laplace [7] angegebene Formel

$$\Phi_{n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n} \cos tx \, dx = \frac{1}{2^{n}(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n+t}{2}\right]^{*}} (-1)^{\lambda} {n \choose \lambda} (n-2\lambda \pm t)^{n-1}$$
(33)

*)
$$\left[\frac{n\pm t}{2}\right]$$
 ist die Gaußsche Klammer und bedeutet die grösste ganze Zahl $\leq \frac{n\pm t}{2}$.

(17) gibt
$$\frac{d^r \Phi_n(t)}{dt^r} = \frac{1}{2^r} \sum_{\lambda=0}^r (-1)^{\lambda} {r \choose \lambda} \Phi_{n-r}(t+r-2\lambda), \qquad (34)$$

woraus

$$\left| \Phi^{(r)}(t) \right| \leqslant \Phi_{n-r}(0) \tag{34'}$$

folgt.

 $\Phi_n(t)$ wird stückweise durch Polynome (n-1)-ten Grades, die sich mit wachsendem n an den Nahtstellen inniger zusammenschliessen, dargestellt. $\Phi_1(t)$ ist unstetig, $\Phi_2(t)$ stetig, $\Phi_3(t)$ stetig differenzierbar; allgemein hat $\Phi_n(t)$ (n-1) Ableitungen, wovon die (n-2) ersten stetig sind. Das Verhalten der $\Phi_n(t)$ nähert sich mit wachsendem n dem Verhalten einer analytischen Funktion. Bei geeigneter Normierung gilt die Grenzwertformel [5]

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \, \Phi_n(\sqrt{n} \, t) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3t^2}{2}} \qquad ^{1) \, 2}, \qquad (27)$$

die L. Maurer zum Beweis seines Grenzwertsatzes für iterierte Mittelwerte herangezogen hat [8].

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n} \cos r \, \sqrt{n} \, x \, dx = \sqrt{\frac{3}{2n \, \pi}} \, e^{-\frac{3r^{2}}{2}} \left\{1 - \frac{3}{20 \, n} \left(1 - 6r^{2} + 3r^{4}\right) + \ldots\right\} = \varPhi_{n} \left(\sqrt{n} \, r\right)$$

abgelesen werden.

Im Lichte des zentralen Grenzwertsatzes ist Formel (27) trivial. Ohne diesen Satz vorauszusetzen, zeigt man z.B. mittels des Ergänzungssatzes der Gammafunktion,

$$\Gamma(1-t) \Gamma(1+t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t}, \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t),$$

dass für die charakteristische Funktion

kteristische Funktion
$$\mathfrak{F}\left\{\sqrt{n} \; \boldsymbol{\Phi}_{n}\left(\sqrt{n} \; t\right); \; y\right\} = \varphi_{n}(y) = \left(\frac{\sin \frac{y}{\sqrt{n}}}{\frac{y}{\sqrt{n}}}\right)^{n}$$

gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y)=-\frac{y^2}{\pi^2}\,\psi'(1)=-\frac{y^2}{6},$$

woraus (27) folgt.

²⁾ Die zur Richtung $(1,1,\ldots,1)$ normale Hyperebene im Abstand d vom Würfelmittelpunkt schneidet aus dem n-dimensionalen Einheitswürfel die Fläche $2\sqrt{n} \Phi_n(2\sqrt{n} d)$. Nach (27) beträgt die entsprechende Schnittfläche am unendlichvieldimensionalen Einheitswürfel $\sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6d^2}$.

¹) Ohne strengen Grenzübergang kann (27) aus der von Laplace [7] angegebenen Beziehung

Wir benutzen (33), um die Funktionen $\Phi_1(t)$ bis $\Phi_{10}(t)$ explizite anzuschreiben:

$$\Phi_{1}(t) = \begin{cases}
\frac{1}{2}, & (0 \le t < 1) \\
\frac{1}{4}, & (1 = t) \\
0, & (1 < t)
\end{cases}$$

$$\Phi_{2}(t) = \begin{cases}
\frac{2-t}{4}, & (0 \le t \le 2) \\
0, & (2 \le t)
\end{cases}$$

$$\Phi_{3}(t) = \begin{cases}
\frac{3-t^{2}}{8}, & (0 \le t \le 1) \\
\frac{9-6t+t^{2}}{16}, & (1 \le t \le 3) \\
0, & (3 \le t)
\end{cases}$$

$$\Phi_{4}(t) = \begin{cases}
\frac{32-12t^{2}+3t^{3}}{96}, & (0 \le t \le 2) \\
\frac{64-48t+12t^{2}-t^{3}}{96}, & (2 \le t \le 4) \\
0, & (4 \le t)
\end{cases}$$

$$\Phi_{5}(t) = \begin{cases}
\frac{115-30t^{2}+3t^{4}}{384}, & (0 \le t \le 1) \\
\frac{55+10t-30t^{2}+10t^{3}-t^{4}}{192}, & (1 \le t \le 3) \\
\frac{625-500t+150t^{2}-20t^{3}+t^{4}}{768}, & (3 \le t \le 5) \\
0, & (5 \le t)
\end{cases}$$

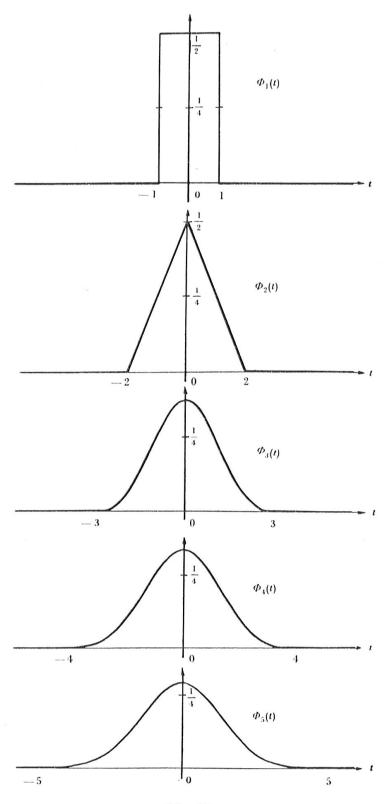


Fig. 16

$$\varPhi_{6}(t) = \begin{cases} \frac{1056 - 240\,t^{2} + 30\,t^{4} - 5\,t^{5}}{3840}, & (0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{3}) \\ \frac{1632 + 1200\,t - 1680\,t^{2} + 600\,t^{3} - 90\,t^{4} + 5\,t^{5}}{7680}, & (2 \leqslant t \leqslant \frac{4}{3}) \\ \frac{7776 - 6480\,t + 2160\,t^{2} - 360\,t^{3} + 30\,t^{4} - t^{5}}{7680} = \frac{(6 - t)^{5}}{7680}, & (4 \leqslant t \leqslant 6) \\ 0, & (6 \leqslant t) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{5587 - 1155\,t^{2} + 105\,t^{4} - 5\,t^{6}}{23\cdot040}, & (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ \frac{23\cdot583 - 210\,t - 4095\,t^{2} - 700\,t^{3} + 945\,t^{4} - 210\,t^{5} + 15\,t^{6}}{92\cdot160}, & (1 \leqslant t \leqslant 9) \\ \frac{4137 + 15\cdot204\,t - 14\cdot805\,t^{2} + 5320\,t^{3} - 945\,t^{4} + 84\,t^{5} - 3\,t^{6}}{46\cdot080}, & (3 \leqslant t \leqslant 9) \\ \frac{117\cdot649 - 100\cdot842\,t + 36\cdot015\,t^{2} - 6860\,t^{3} + 735\,t^{4} - 42\,t^{5} + t^{6}}{92\cdot160}, & (5 \leqslant t \leqslant 7) \\ 0, & (7 \leqslant t) \end{cases}$$

- 117 -

Tafel der Funktionen $A_n \Phi_n(t) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} C_{\lambda}^{(n)} t^{\lambda}$ für n = 8, 9 und 10

t	$C_0^{(n)}$	$C_{\mathbf{i}}^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	$C_5^{(n)}$	C (n)	$C_7^{(n)}$	$C_8^{(n)}$	$C_{9}^{(n)}$
	$n = 8$, $A_8 = 1.290.240$									
[0,2] [2,4] [4,6] [6,8]	309 248 316 416 -142 336 2 097 152	0 - 25 088 777 728 -1 835 008	- 53 760 - 16 128 - 61 824 688 128	$219\ 520$	4 480 20 160 -42 560 17 920	$ \begin{array}{r} 0 \\ -4704 \\ 4704 \\ -1344 \end{array} $	- 280 504 - 280 56	35 -21 7 -1		-
	$n = 9$, $A_9 = 20.643.840$									
[0,1] [1,3] [3,5] [5,7] [7,9]	2 337 507 1 168 722 1 306 503 -2 209 122 43 046 721	0 252 - 367 164 5 257 836 - 38 263 752	-364 140 -182 152 245 700 -3 691 800 14 880 348	1764 -284004	27 090 11 340 130 410 - 263 340 459 270	0 1 764 - 29 988 33 012 - 40 824	-1 260 -1 512 3 780 -2 520 2 268	0 252 -252 108 -72	$ \begin{array}{r} 35 \\ -14 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{array} $	
	$n=10$, $A_{10}=185 \cdot 794 \cdot 560$									
[0,2] [2,4] [4,6] [6,8] [8,10]	39 984 640 19 965 440 27 829 760 -342 177 280 1 000 000 000	0 120 960 -17 573 760 609 949 440 -900 000 000	-5 644 800 -3 064 320 14 630 400 -394 974 720 360 000 000		383 040 -20 160 3 850 560 -28 687 680 12 600 000	0 105 840 - 861 840 3 900 960 -1 260 000	-16 800 -43 680 117 600 -346 080 84 000	0 7 560 - 9 720 19 440 - 3 600	630 - 630 - 450 - 630 90	$ \begin{array}{r r} -63 \\ \hline 21 \\ -9 \\ 9 \\ -1 \end{array} $

Die Maximalwerte der Funktionen $\Phi_n(t)$ sind bestimmt durch

$$\Phi_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{1}{2^n (n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n-1}$$

und in einer Tabelle zusammengestellt:

n	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$		
1	$rac{1}{2}$	= 0.5	
2	$rac{1}{2}$	= 0.5	
3	$\frac{3}{8}$	= 0.375	
4	$\frac{1}{3}$	$=0.333\ldots$	
5	$\frac{115}{384}$	= 0.29947917	
6	$\frac{11}{40}$	= 0.275	
7	$\frac{5887}{23.040}$	= 0.255512152	
8	$\frac{151}{630}$	$= 0.239\ 682\ 539$	
9	$\frac{259.723}{1.146.880}$	=0.226460484	
10	$\frac{15.619}{72.576}$	= 0.215208884	

Grenzwertformel (27) gibt für t=0

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \sqrt{6\pi}.$$
 (28)

Das Potenzmoment k-ter Ordnung von $\Phi_n(t)$, M_n^k , ist nach dem Momentensatz gegeben durch

$$M_n^k = i^{-k} \varphi_n^{(k)}(0)$$
.

Für die k-te Ableitung der charakteristischen Funktion $\varphi_n(y) = \left(\frac{\sin y}{y}\right)^n$

erhalten wir mittels der Integralformel von Cauchy in y = 0 die Beziehung

$$\varphi_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta^{k+1}} = \frac{i^k k!}{2^n (n+k)!} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n+k},$$

$$M_n^k = \begin{cases} \frac{k!}{2^{n-1}(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda} (n-2\lambda)^{n+k}, & k=2\varkappa\\ 0, & k=2\varkappa+1 \end{cases} (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt.

Sonderfälle ($k = 2\varkappa$):

n	1	2	3	4		
-						
M^k	1	2^{k+1}	$3 3^{k+2} - 1$	$2^{k+3}(2^{k+2}-1)$		
n	k+1	$\overline{(k+1)(k+2)}$	$\overline{4} (k+1) (k+2) (k+3)$	(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)		

 ${\cal M}_n^0$ ist Fläche zwischen Abszissenachse und Funktionskurve; mit-

hin wird

$$\frac{1}{2^{n} n!} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} {n \choose \lambda} (n-2\lambda)^{n} = 1$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} {n \choose \lambda} \left(\frac{n}{2} - \lambda\right)^{n} = n!$$
(37)

oder

$$W(\pm t) = \int_{-\infty}^{\pm t} \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \pm \int_{0}^{t} \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \pm G_n(t), (t > 0)$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufallsartige Variable ξ mit der Frequenzfunktion $\Phi_n(\xi)$ kleiner als $\pm t$ ausfalle;

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin tx}{x} dx$$

ist Wahrscheinlichkeit einer Abweichung zwischen 0 und t. Insbesondere ist $G_n(1) = \Phi_{n+1}(0)$, d. h. der Maximalwert der Funktion $\Phi_{n+1}(t)$ ist gleichzeitig Wahrscheinlichkeit, dass die nach $\Phi_n(\xi)$ verteilte zufallsartige Variable ξ ins Intervall [0,1] falle. Bekannte Methoden (vgl. 3) ergeben für $G_n(t)$ die Polynomdarstellung

$$G_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \frac{\sin tx}{x} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n n!} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n+t}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \binom{n}{\lambda} (n+t-2\lambda)^n,$$
(38)

von der wir noch die beiden Sonderfälle t=1 und t=n festhalten:

$$G_{n-1}(1) = \Phi_{n}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{\lambda} \binom{n-1}{\lambda} (n-2\lambda)^{n-1},$$

$$(n = 1, 2, \dots) \quad (39)$$

$$G_{n}(n) = \frac{1}{2}, \quad \text{also} \quad \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!} \frac{(n-\lambda)^{n}}{(n-\lambda)!} = 1. \quad (40)$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. Sommerfeld: «Eine besondere anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes», Festschrift Ludwig Boltzmann (Leipzig 1904), S. 848–859.
- [2] H. Hadwiger: «Über gleichwahrscheinliche Aufteilungen», Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 22, Heft 4 (1942), S. 226–232.
- [3] H. Hadwiger: «Über die mittlere Breite zufallsartig gestalteter Polygone», Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 11 (1938/39), S. 321–329.
- [4] H. Burkhardt: «Trigonometrische Reihen und Integrale», Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II, 1. Teil, 2. Hälfte, S. 1320–1324 (Diskontinuitätsfaktoren).
- [5] G. Pólya: «Berechnung eines bestimmten Integrals», Math. Annalen 74 (1913), S. 204–212.
- [6] H. Hornich: «Über gewisse trigonometrische Integrale I und II», Math. Zeitschrift 48 (1942/43) und 49 (1943/44), S. 787–790 und S. 374–379.
- [7] P. S. de Laplace: Oeuvres, Tome Septième, «Théorie Analytique des Probabilités» (Paris 1847), S. 186 und 187.
- [8] L. Maurer: «Über die Mittelwerthe der Functionen einer reellen Variabeln», Math. Annalen 47 (1896), S. 263–280, bes. S. 267–270.