

**Zeitschrift:** Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker  
= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of  
Swiss Actuaries

**Herausgeber:** Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

**Band:** 51 (1951)

**Artikel:** Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung

**Autor:** Lah, Ivo

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-555069>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Eine neue Funktion der Versicherungsmathematik und ihre Anwendung

Von *Ivo Lah*, Ljubljana

## 1. Definition der neuen Funktion

In der Mathematik spielen eine wichtige Rolle die Funktionen  $f_n(x)$ , welche die Eigenschaft haben

$$\frac{d^v f_n(x)}{dx^v} = f_{n+v}(x),$$

d. h. die Ableitungen und die Integrale von  $f_n(x)$  werden einfach durch Änderung von  $n$  gebildet. Eine bekannte derartige Funktion ist  $\frac{x^n}{n!}$ , weil

$$\frac{d^v \left( \frac{x^n}{n!} \right)}{dx^v} = \frac{x^{n-v}}{(n-v)!}.$$

Im folgenden wollen wir eine neue Funktion  $M_n v^n$  konstruieren, deren  $v$ -te Abteilung

$$\frac{d^v (M_n v^n)}{dv^v} = M_{n+v} v^{n+v}$$

und nachher werden wir zeigen, wie diese Funktion in der Versicherungsmathematik mit Vorteil angewendet werden kann.

Die neue Funktion wollen wir mittels der Summen der diskontierten Zahlen definieren. Unter der  $n$ -ten Summe der diskontierten Zahlen verstehen wir

$$S_x^{(n)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+t}{n} D_{x+t}. \quad (1)$$

In der Versicherungspraxis ist  $n = -1, 0, 1, 2$ . Also

$$S_x^{(-1)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-1+t}{-1} D_{x+t} = D_x$$

$$S_x^{(0)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{t}{0} D_{x+t} = N_x$$

$$S_x^{(1)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{1+t}{1} D_{x+t} = S_x$$

. . . . .

Theoretisch dagegen kann  $n$  eine beliebige positive, negative, rationale, irrationale, transzedente, sogar imaginäre oder komplexe Zahl sein. Vom theoretischen Standpunkt ist also  $S_x^{(n)}$  eine kontinuierliche Funktion des Argumentes  $n$  und als solche wollen wir sie bei unseren Ausführungen betrachten. So z. B. haben wir

$$S_x^{(-2)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-2+t}{-2} D_{x+t} = D_x - D_{x+1}$$

$$S_x^{(-3)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-3+t}{-3} D_{x+t} = D_x - 2D_{x+1} + D_{x+2}$$

. . . . .

und weiter

$$S_x^{(0.5)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{0.5+t}{0.5} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{\Gamma(1.5+t)}{t! \Gamma(1.5)} D_{x+t}$$

$$S_x^{(-0.5)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{-0.5+t}{-0.5} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{\Gamma(0.5+t)}{t! \Gamma(0.5)} D_{x+t}$$

. . . . .

Wenn  $n < -1$ , kann die Summe der diskontierten Zahlen negativ ausfallen, und zwar auch dann, wenn alle  $D_{x+t}$  positiv sind. Dagegen ist die Summe der diskontierten Zahlen stets positiv, wenn  $n \geq -1$  und wenn zugleich alle

$$D_{x+t} > 0.$$

Unter der diskontierten Zahl  $D_{x+t}$  verstehen wir im folgenden das Produkt irgendeiner positiven Zahl  $l_{x+t}$  mit der  $(x+t)$ -en Potenz des Diskontfaktors  $v$ .

$$D_{x+t} = l_{x+t} v^{x+t} = l_{x+t} (1+i)^{-(x+t)}.$$

Die Folge der positiven Zahlen  $l_{x+t}$  nennen wir die Ausscheideordnung. Bei Absterbeordnungen ist  $l_{x+t} > l_{x+t+1}$ . In der Versicherungspraxis kommt es aber auch  $l_{x+t} \leq l_{x+t+1}$  vor. Unsere Ausführungen gelten für alle Fälle  $l_{x+t} \cong l_{x+t+1}$ . Um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, führen wir folgende Bezeichnungen ein: Die Ausscheideordnung ist «abnehmend», wenn durchweg  $D_{x+t} > D_{x+t+1}$  — «zunehmend», wenn durchweg  $D_{x+t} < D_{x+t+1}$  — «konstant», wenn durchweg  $D_{x+t} = D_{x+t+1}$  — «gemischt», wenn  $D_{x+t} \cong D_{x+t+1}$ . Wir bemerken noch, dass unsere Ausführungen keine Geltung haben, wenn  $l_{x+t}$  eine Funktion des Zinsfußes  $i$  ist, was z. B. bei der Berechnung der Anwartschaften auf Invaliden-, Witwen- und Waisenrenten in der Pensionsversicherung der Fall ist.

Nach diesen Erklärungen definieren wir

$$M_n = (-1)^n n! \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x}. \quad (2)$$

Speziell ist

$$M_{-1} = \infty, \quad (3)$$

$$M_0 = \frac{N_{x+1}}{D_x} = a_x, \quad (4)$$

$$M_1 = -\frac{S_{x+1}}{D_x} = -(Ia)_x, \quad (5)$$

$$M_2 = \frac{2S_{x+1}^{(2)}}{D_x}, \quad (6)$$

. . . . .

Die neue Funktion lautet somit

$$\left. \begin{aligned} M_n v^n &= (-1)^n n! v^n \frac{S_{x+1}^{(n)}}{D_x} \\ &= (-1)^n n! v^n \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} \binom{n-1+t}{n} D_{x+t} \\ &= \frac{(-1)^n}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} (n-1+t)_n l_{x+t} (1+i)^{-(n+t)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die erste Ableitung von (7) nach dem Zinsfusse  $i$  ist

$$\frac{d(M_n v^n)}{di} = \frac{(-1)^{n+1}}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} (n+t)_{n+1} l_{x+t} (1+i)^{-(n+1+t)} = M_{n+1} v^{n+1}.$$

Daher allgemein

$$\frac{d^r(M_n v^n)}{di^r} = M_{n+r} v^{n+r}. \quad (8)$$

$M_n v^n$  ist eine Funktion von  $n$ ,  $i$ ,  $x$ ,  $l_{x+t}$ . Nachdem unsere Ausführungen für alle Alter  $x$  und für alle Ausscheideordnungen  $l_{x+t}$  gelten — insofern  $l_{x+t}$  nicht eine Funktion von  $i$  ist — wollen wir im folgenden  $M_n v^n$  als eine kontinuierliche Funktion nur von  $n$  und  $i$  betrachten.

## 2. Ableitungen der Versicherungswerte

Mittels der neuen Funktion können leicht und einfach die Versicherungswerte nach dem Zinsfusse differenziert werden. Dazu braucht man nur den Versicherungswert durch die Funktion  $M_n v^n$  auszudrücken. So lautet z. B. die Ableitung von  $a_x$  (4):

$$\frac{da_x}{di} = \frac{dM_0}{di} = M_1 v = -v \frac{S_{x+1}}{D_x} = -v(Ia)_x. \quad (9)$$

Desgleichen findet man die Ableitung von  $(Ia)_x$  (5):

$$\frac{d(Ia)_x}{di} = -\frac{d[M_1 v(1+i)]}{di} = -v(M_1 + M_2) = \frac{v}{D_x} (S_{x+1} - 2S_{x+1}^{(2)}). \quad (10)$$

Die Jahresprämie der lebenslänglichen Ablebensversicherung ist bekanntlich

$$P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1}{1+a_x} - \frac{i}{1+i} = \frac{1}{1+M_0} - \frac{i}{1+i}. \quad (11)$$

Daraus folgt

$$\frac{dP_x}{di} = -\frac{M_1 v}{(1+M_0)^2} - \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{v(Ia)_x}{a_x^2} - v^2. \quad (12)$$

Die Prämienreserve der lebenslänglichen Ablebensversicherung mit gleichbleibenden Jahresprämien nach Ablauf von  $t$  Versicherungsjahren ist bekanntlich

$$V_{x,t} = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_x} = \frac{a_x - a_{x+t}}{1 + a_x} = \frac{M_0 - \mathfrak{M}_0}{1 + M_0}. \quad (13)$$

Daher

$$\frac{dV_{x,t}}{di} = \frac{v}{a_x^2} [a_x(Ia)_{x+t} - a_{x+t}(Ia)_x] \quad (14)$$

. . . . .

In der Versicherungsmathematik werden ausser dem Zinsfusse  $i$  noch folgende Zinsmasse verwendet: der Aufzinsungsfaktor  $r$ , der Diskontfaktor  $v$  und die Zinsintensität  $\delta$ . Zwischen diesen Grössen bestehen folgende Beziehungen:

$$1 + i = r = \frac{1}{v} = e^\delta.$$

Daher

$$di = dr = -\frac{dv}{v^2} = e^\delta d\delta.$$

Die neue Funktion kann also auch dann mit Vorteil angewendet werden, wenn die Versicherungswerte nach  $r$  oder nach  $v$  oder nach  $\delta$  zu differenzieren sind.

Die neue Funktion ist sozusagen ein «Logarithmus» der Versicherungsmathematik in bezug auf die Infinitesimalrechnung. Der Versicherungswert  $V$  wird in eine Funktion von  $M_n v^n$ , d. i.

$$V = F(M_n v^n)$$

umgewandelt, an welcher die notwendigen Differentiationen und Integrationen nach dem Zinsmasse vorgenommen werden. Nach Beendigung dieser Operationen kehrt man von den  $M_n v^n$ -Werten zu den Versicherungswerten wieder zurück.

### 3. Die Taylorschen Reihen der Versicherungswerte

Mittels der neuen Funktion können die Versicherungswerte leicht und rasch in die Taylorsche Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \quad (15)$$

entwickelt werden.

Wenn wir in (15)

$$\begin{aligned} x &= i \\ x_0 &= i_0 \\ f(x) &= a_x(i) = M_0 \\ f(x_0) &= a_x(i_0) = {}^0M_0 \end{aligned}$$

setzen, so bekommen wir die Taylorsche Reihe des Barwertes der konstanten lebenslänglichen nachschüssigen Leibrente  $a_x$  (4)

$$M_0 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(i-i_0)^v}{v!} {}^0M_v v_0^v \quad (16)$$

oder wenn wir mittels (2) zu den Summen der diskontierten Zahlen zurückkehren

$$a_x(i) = \frac{1}{{}^0D_x} \sum_{v=0}^{\infty} [-(i-i_0) v_0]^v {}^0S_{x+1}^{(v)}. \quad (17)$$

Wenn wir (16) nach  $i$  differenzieren, bekommen wir die Taylorsche Reihe des Barwertes der steigenden Rente  $(Ia)_x$  (5)

$$M_1 v = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(i-i_0)^{v-1}}{(v-1)!} {}^0M_v v_0^v \quad (18)$$

bzw.

$$(Ia)_x = \frac{1}{{}^0D_x} \frac{v_0}{v} \sum_{v=1}^{\infty} v [-(i-i_0) v_0]^{v-1} {}^0S_{x+1}^{(v)}. \quad (19)$$

Im folgenden geben wir noch die Anfangsglieder der Taylorschen Reihe der Jahresprämie der lebenslänglichen Ablebensversicherung  $P_x$  (11) und der Prämienreserve  $V_{x,t}$  (13) dieser Versicherung

$$P_x = {}^0P_x - (i-i_0) v_0 \left( \frac{{}^0M_1}{{}^0a_x^2} + v_0 \right) + \frac{(i-i_0)^2 v_0^2}{2} \left( \frac{2 {}^0M_1^2}{{}^0a_x^3} - \frac{{}^0M_2}{{}^0a_x^2} + 2 v_0 \right) + \dots \quad (20)$$

$$\begin{aligned} V_{x,t} &= {}^0V_{x,t} + \frac{(i-i_0) v_0}{{}^0a_x^2} ({}^0M_1 {}^0a_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1 {}^0a_x) + \frac{(i-i_0)^2 v_0^2}{2 {}^0a_x^3} \\ &\quad \cdot [{}^0a_x ({}^0M_2 {}^0a_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_2 {}^0a_x) - 2 {}^0M_1 ({}^0M_1 {}^0a_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1 {}^0a_x)] + \dots \quad (21) \end{aligned}$$

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} {}^0M_1 &= -\frac{{}^0S_{x+1}}{{}^0D_x}, & {}^0M_2 &= \frac{2 {}^0S_{x+1}^{(2)}}{{}^0D_x}, \\ {}^0\mathfrak{M}_1 &= -\frac{{}^0S_{x+t+1}}{{}^0D_{x+t}}, & {}^0\mathfrak{M}_2 &= \frac{2 {}^0S_{x+t+1}^{(2)}}{{}^0D_{x+t}}. \end{aligned}$$

#### 4. Integration der Versicherungswerte

Wenn  $n \geq 1$ , kann die neue Funktion leicht integriert werden. Es ist nämlich

$$\int M_n v^n di = M_{n-1} v^{n-1} + C,$$

wo  $C$  die Integrationskonstante bedeutet. So z. B. ist

$$\begin{aligned} \int (Ia)_x di &= - \int (M_1 v)(1+i) di = - M_0(1+i) + \int M_0 di + C \\ &= -ra_x + \int a_x di + C. \end{aligned}$$

Dagegen  $M_0$  können wir nicht auf diese Art integrieren, weil  $M_{-1} v^{-1}$  unendlich ist (3). Die Versicherungswerte sind aber meistens Funktionen eben von  $M_0$ . In solchen Fällen greift man zur Taylorsche Reihe des Versicherungswertes. Aus (16) findet man leicht

$$\int a_x di = \int M_0 di = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i-i_0)^{r+1}}{(r+1)!} {}^0M_r v_0^r + C$$

Ähnlich findet man aus (20)

$$\int P_x di = {}^0P_x(i-i_0) - \frac{(i-i_0)^2 v_0}{2} \left( \frac{{}^0M_1}{{}^0a_x^2} + v_0 \right) + \dots + C,$$

und aus (21)

$$\int V_{x,t} di = {}^0V_{x,t}(i-i_0) + \frac{(i-i_0)^2 v_0}{2 {}^0a_x^2} ({}^0M_1 {}^0a_{x+t} - {}^0\mathfrak{M}_1 {}^0a_x) + \dots + C.$$

In der Versicherungsmathematik kommen aber auch Größen vor, welche Funktionen von  $i$ ,  $M_0$ ,  $M_1 v$ ,  $M_2 v^2 \dots M_n v^n$  sind. In solchem Falle heisst es die Differentialgleichung

$$F(i, M_0, M_1 v, M_2 v^2, \dots M_n v^n) = 0$$

integrieren. Die Lösung einer solchen Aufgabe, nämlich die Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion (23), wollen wir später zeigen.



## 5. Grenzwerte der generalisierten Poukkaschen Funktion

Poukka hat gefunden, dass sich der Wert des folgenden Doppelverhältnisses der Summen der diskontierten Zahlen

$$\frac{S_x^{(2)} N_x}{(S_x)^2} = k_1(x, i) \quad (22)$$

mit dem Alter  $x$ , mit dem Zinsfusse  $i$  und mit der Ausscheideordnung  $l_{x+t}$  nur wenig ändert und deshalb  $k_1(x, i)$  als Konstante betrachtet werden kann. Der Wert dieser Konstante wird von verschiedenen Autoren meistens mit 0.84 angenommen. Die Poukkasche Formel wollen wir generalisieren, wie folgt

$$\frac{S_x^{(n+1)} S_x^{(n-1)}}{(S_x^{(n)})^2} = k_n(x, i). \quad (23)$$

Mit der neuen Funktion  $M_n v^n$  können leicht die Grenzwerte von  $k_n(x, i)$  bestimmt werden. Dabei betrachten wir  $k_n(x, i)$  als eine kontinuierliche Funktion von  $n$ , jedoch nur im Bereiche  $0 \leq n \leq \infty$ , denn im Falle  $n < 0$  kann der Wert einer oder mehrerer Summen der diskontierten Zahlen in (23) negativ ausfallen, wie wir eingangs erwähnt haben, obwohl alle  $D_{x+t}$  in der Versicherungspraxis nur positiv sein können. Unter dieser Voraussetzung ist stets  $k_n(x, i) > 0$ .

Zunächst erhöhen wir in (23) das Alter  $x$  um eine Einheit, damit wir die generalisierte Poukkasche Formel gemäss (2) als Funktion von  $M_n$  ausdrücken können.

$$\frac{S_{x+1}^{(n+1)} S_{x+1}^{(n-1)}}{(S_{x+1}^{(n)})^2} = \frac{n}{n+1} \frac{M_{n+1} M_{n-1}}{M_n^2} = k_n(x+1, i) = k_n.$$

Daraus folgt

$$\frac{M_{n+1} M_{n-1}}{M_n^2} = \frac{n+1}{n} k_n = h_n \quad (24)$$

oder

$$h_n = \frac{M_{n+1} v^{n+1} M_{n-1} v^{n-1}}{(M_n v^n)^2}. \quad (25)$$

Die Grenzwerte von  $h_n$  in bezug auf  $n$  und  $i$  ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{dh_n}{dn} = 0, \quad \frac{dh_n}{di} = 0.$$

Da das Argument  $n$  in der Funktion  $M_n v^n$  unter anderem auch als Faktorielle auftritt (7), können wir nicht  $h_n$  nach  $n$  differenzieren. Diese Schwierigkeit kann aber leicht umgangen werden. Die erste Ableitung von  $h_n$  nach  $i$  kann geschrieben werden

$$\frac{dh_n}{di} = (h_{n+1} h_n - 2h_n + 1) \frac{M_{n+1} v^{n+1}}{M_n v^n}.$$

Die Bedingung für das Bestehen eines Grenzwertes von  $h_n$  in bezug auf  $i$  ist also gegeben durch die Differenzengleichung

$$h_{n+1} h_n - 2h_n + 1 = 0, \quad (26)$$

welche nicht nur vom Alter und der Ausscheideordnung, sondern auch vom Zinsfusse frei ist. Die aus ihr hergeleiteten Grenzwerte gelten also für alle Alter  $x$ , für alle Ausscheideordnungen  $l_{x+t}$  und für alle Zinsfüsse  $i$ . Die Ableitung von  $h_n$  nach  $n$ , welche rechnerisch undurchführbar ist, wie wir oben bemerkt haben, ist nun überflüssig geworden, da wir die Grenzwerte vom  $h_n$  in bezug auf  $n$  aus der Differenzengleichung (26) leicht herleiten können. Die vollständige Lösung von (26) lautet

$$h_n = 1 + \frac{1}{n + c}, \quad (27)$$

wo  $c$  die Summationskonstante bedeutet, welche wir so bestimmen wollen, dass  $h_n$  in bezug auf  $n$  die Grenzwerte darstellen wird. Vorweg bemerken wir, dass  $h_n$  (27) eine kontinuierliche Funktion von  $n$  ist, und zwar eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten  $h_n - 1 = 0$  und  $n + c = 0$ .

Die untere Grenze von  $h_n$  finden wir offensichtlich so, dass wir in (27)  $c = \infty$  setzen, also

$$1 < h_n. \quad (28)$$

$$\frac{n}{n+1} < k_n. \quad (29)$$

Die untere Grenze (28) bzw. (29) gilt für alle Ausscheideordnungen gleichwohl, ob sie abnehmend, zunehmend, konstant oder gemischt sind, jedoch unter der Bedingung, dass  $n \geq 0$  und zugleich alle  $D_{x+t} \geq 0$ . Nur wenn  $n < 0$  oder wenn einzelne  $D_{x+t} < 0$ , gelten obige Grenzwerte nicht. In diesem Falle gibt es überhaupt kein allgemein gültiges Minimum von  $k_n$  und  $h_n$ .

Für abnehmende Ausscheideordnungen (Absterbeordnungen) kann eine strengere untere Grenze gezogen werden. Im höchsten Alter  $\omega$  ist

$$k_n(\omega, i) = \frac{S_{\omega}^{(n+1)} S_{\omega}^{(n-1)}}{(S_{\omega}^{(n)})^2} = \frac{D_{\omega} D_{\omega}}{(D_{\omega})^2} = 1.$$

Infolgedessen muss  $k_n(x, i) \sim 1$  sein, wenn  $D_x$  gross ist, die folgenden  $D_{x+t}$  als auch ihre iterierten Summen dagegen im Vergleiche zu  $D_x$  verhältnismässig klein sind. Daraus schliessen wir, dass  $k_n$  bei starkem Gefälle der diskontierten Zahlen gross, bei schwachem Gefälle dagegen klein sein muss. Die strengere untere Grenze von  $k_n$  für abnehmende Ausscheideordnungen findet man also aus der Annahme  $D_{x+t} = \text{konstant}$ , d. h. es gibt keine Verzinsung und keine Ausscheidung. Für solche konstante Ausscheideordnungen haben wir gemäss (1) und (23)

$$\begin{aligned} k_n(x, i) &= \frac{\sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+1+t}{n+1} \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n-1+t}{n-1}}{\left[ \sum_{t=0}^{\omega-x} \binom{n+t}{n} \right]^2} \\ &= \frac{\binom{n+2+\omega-x}{n+2} \binom{n+\omega-x}{n}}{\binom{n+1+\omega-x}{n+1}^2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \left( 1 + \frac{1}{n+1+\omega-x} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Die strengere untere Grenze (30) ist eine Funktion nicht nur von  $n$ , sondern auch vom Alter  $x$  und  $\omega$ . Sie hat keine Beziehung zur Differenzgleichung (26). Für die in der Lebensversicherung üblichen Alter  $x$  ist der Wert des Bruches in (30) rechts von nicht allzugrosser Bedeutung und kann weggelassen werden. Die Formel (30) büsst so ein wenig an der Strenge ein, sie wird aber dadurch viel einfacher. Für abnehmende und konstante Ausscheideordnungen haben wir also folgende nur von  $n$  abhängige untere Grenze

$$\frac{n+1}{n+2} < k_n. \quad (31)$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} < h_n. \quad (32)$$

Eine obere Grenze von  $k_n$  bzw.  $h_n$  existiert gar nicht. Wenn wir nämlich in (27) die Konstante  $c = -n$  setzen, dann ist  $h_n = \infty$  und damit auch  $k_n = \infty$ . Dies ist allerdings eine sonderbare, paradoxe Tatsache, weil Poukka selbst als auch zahlreiche andere Autoren nach ihm  $k_n$ , speziell  $k_1$  als eine Grösse betrachteten, die sich nur wenig in bezug auf  $x, i, l_{x+i}$  ändert und deshalb praktisch als Konstante angenommen werden kann.

Dass es tatsächlich keine obere Grenze von  $k_n$  und  $h_n$  gibt, wollen wir noch auf eine andere Art zeigen. Nehmen wir folgende Aus-  
scheideordnung

$$D_x = 1,$$

$$D_{x+1} = D_{x+2} = D_{x+3} = \dots = D_{x+m} = \varepsilon,$$

wo  $\varepsilon$  eine kleine positive Zahl darstellt. In diesem Falle haben wir

$$N_x = 1 + m\varepsilon,$$

$$S_x = 1 + \left[ m + \binom{m+1}{2} \right] \varepsilon,$$

$$S_x^{(2)} = 1 + \left[ m + \binom{m+1}{2} + \binom{m+2}{3} \right] \varepsilon.$$

Also

$$k_1 = \frac{S_x^{(2)} N_x}{(S_x)^2} = \frac{1 + \frac{17m + 6m^2 + m^3}{6} \varepsilon + \frac{11m^2 + 6m^3 + m^4}{6} \varepsilon^2}{1 + (3m + m^2) \varepsilon + \frac{9m^2 + 6m^3 + m^4}{4} \varepsilon^2}. \quad (33)$$

Wenn wir in (33) setzen

$$m = 6 \cdot 10^{10}, \quad 6 \cdot 10^{20}, \quad \dots$$

$$\varepsilon = 10^{-20}, \quad 10^{-40}, \quad \dots,$$

dann bekommen wir  $k_1 \sim 10^9, \quad 10^{19}, \quad \dots$

Für noch grössere  $m$  und noch kleinere positive  $\varepsilon$  liefert (33) noch grössere Werte von  $k_1$ . Bei sehr kleinem  $\varepsilon$  und entsprechend grossem  $m$  sind in (33) die Glieder von  $\varepsilon$  massgebend. Das Glied von  $\varepsilon$  im

Zähler (33) ist ein Polynom der dritten, im Nenner dagegen nur der zweiten Potenz von  $m$ . Ähnliche Situation haben wir auch bei analogen Formeln für  $k_2, k_3, k_4$  usw. Eine obere Grenze von  $k_n$  und  $h_n$  existiert theoretisch tatsächlich nicht.

In der Versicherungspraxis kommen solche «anormale» Ausscheideordnungen selbstverständlich gar nicht vor. Für den Bedarf der Versicherungspraxis können auch obere Grenzen von  $k_n$  und  $h_n$  festgesetzt werden, welche jedoch zum Teil mit gewissen Reserven zu nehmen sind.

Wir haben schon gesagt, dass bei zunehmenden Ausscheideordnungen die Werte von  $k_n$  kleiner sind als bei abnehmenden Ausscheideordnungen. Den grössten Wert von  $k_n$  bei zunehmenden Ausscheideordnungen haben wir im Schlussalter  $\omega$ , nämlich

$$k_n(\omega, i) = 1.$$

Die obere Grenze von  $k_n$  und  $h_n$  bei zunehmenden Ausscheideordnungen ist in jedem Falle

$$k_n \leq 1. \quad (34)$$

$$h_n \leq \frac{n+1}{n}. \quad (35)$$

Den Wert in (35) findet man auch so, dass man in (27) die Konstante  $c = 0$  setzt.

Bei abnehmenden Ausscheideordnungen sind die Werte von  $k_n$  verhältnismässig gross. Aber auch bei diesen Ausscheideordnungen kommt es in der Praxis nur selten vor, dass  $k_n > 1$  wird, so dass man (34) und (35) im allgemeinen auch bei abnehmenden Ausscheideordnungen als obere Grenze betrachten kann, jedoch mit gewissen Ausnahmen, welche nur bei sehr starkem Gefälle der diskontierten Zahlen auftreten können. So z. B. ist die Sterblichkeit in den ersten Altersjahren gross, das Gefälle der diskontierten Zahlen  $D_0, D_1, D_2, \dots$  stark, und so kann es vorkommen, dass  $k_0(0, i) > 1$ . Ähnlich ist die Sterblichkeit der Invaliden im niedrigsten Produktivalter von 15—25 Jahren gross, das Gefälle der diskontierten Zahlen  $D_{15}^{ii}, D_{16}^{ii}, D_{17}^{ii}, \dots$  stark, und so kann es auch hier vorkommen, dass  $k_0 > 1, k_1 > 1$  usw.

Unsere Ausführungen wollen wir nun übersichtshalber kurz zusammenfassen.

Bei *zunehmenden* Ausscheideordnungen sind die Grenzwerte von  $k_n$  und  $h_n$  ohne Ausnahme

$$\frac{n}{n+1} < k_n \leq 1. \quad (36)$$

$$1 < h_n \leq \frac{n+1}{n}. \quad (37)$$

Bei *abnehmenden* Ausscheideordnungen haben wir folgende ohne Ausnahme gültige untere Grenze, wogegen die obere Grenze bei sehr starkem Gefälle der diskontierten Zahlen problematisch werden kann.

$$\frac{n+1}{n+2} < k_n \leq 1 (?) \quad (38)$$

$$\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} < h_n \leq \frac{n+1}{n} (?) \quad (39)$$

Bei der oberen Grenze (38) bzw. (39) ist also Vorsicht geboten. Deshalb haben wir das Fragezeichen (?) dazugeschrieben.

Wir bemerken noch, dass hohe Zinsfüsse eine stärkere Diskontierung und damit ein stärkeres Gefälle von  $D_{x+t}$  zur Folge haben. Infolgedessen wird die obere Grenze bei hohen Zinsfüssen öfter und tiefer überschritten wie bei niedrigen Zinsfüssen.

## 6. Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion

Die in der generalisierten Poukkaschen Formel (23) erscheinenden Summen der diskontierten Zahlen haben wir mittels (2) durch die neue Funktion  $M_n v^n$  ersetzt und so die Gleichung (25) erhalten, welche eine homogene quadratische Differentialgleichung  $(n+1)$ -ter Ordnung darstellt.

Die Grösse  $h_n$  in (25) ist eine Funktion des Zinsfusses  $i$ , denn nur an den Grenzen (27) ist  $h_n$  unabhängig von  $i$ , sonst aber nicht. Bei der Integration von (25) müsste daher, streng genommen, die funktionelle Abhängigkeit der Grösse  $h_n$  von  $i$  berücksichtigt werden. In diesem Falle stellt das vollständige Integral von (25) den exakten Wert  $M_0 = a_x(i)$  dar, d. h. bei Kenntnis der Funktion  $h_n = h_n(i)$  ist es möglich, aus der generalisierten Poukkaschen Formel den Barwert

der gleichbleibenden lebenslänglichen Leibrente  $a_x(i)$  exakt zu berechnen. Wir kennen aber die Funktion  $h_n(i)$  nicht, welche übrigens auch vom Alter  $x$  als auch von der Ausscheideordnung  $l_{x+t}$  abhängt. Wir kennen nur ihre untere und obere Grenze (37) bzw. (39). Mit Rücksicht auf die schmale Spannung zwischen der unteren und der oberen Grenze wollen wir  $h_n$  bei der Integration von (25) als Konstante betrachten. Das vollständige Integral von (25) wird deshalb nur einen Näherungswert von  $a_x(i)$  darstellen, welchen wir mit  $a_{(n)}$  bezeichnen wollen.

Die Gleichung (25) können wir schreiben

$$\frac{M_{n+1} v^{n+1}}{(M_n v^n)^2} M_{n-1} v^{n-1} = h_n.$$

Daraus findet man mittels teilweiser Integration

$$-\frac{M_{n-1} v^{n-1}}{M_n v^n} + i = -A + h_n i,$$

oder

$$\frac{M_n v^n}{M_{n-1} v^{n-1}} = \frac{1}{A + (1 - h_n) i}.$$

Nach weiteren Integrationen findet man der Reihe nach

$$\begin{aligned} M_{n-1} v^{n-1} &= (A + B i)^{\frac{1}{1-h_n}}, \\ M_{n-2} v^{n-2} &= C + (A + B i)^{\frac{2-h_n}{1-h_n}}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{(n)} &= \sum_{v=0}^{n-2} C_v i^v + (A + B i)^{\frac{n-(n-1)h_n}{1-h_n}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Die Integrationskonstanten  $A, B, C_0, C_1, \dots C_{n-2}$  können durch Anfangswerte, welche uns zur Verfügung stehen, bestimmt werden.

Aus (40) kann auch die Grösse des Fehlers abgeschätzt werden, welchen wir begangen haben, indem wir bei der Integration  $h_n$  als Konstante betrachtet haben, und zwar so, dass man einmal die untere, das zweitemal die obere Grenze von  $h_n$  in (40) einsetzt.

Man kann zeigen, dass in (40) die meisten und darunter die besten bisher bekannten Näherungsformeln von  $a_x$  als Spezialfälle enthalten sind <sup>1)</sup>. Wenn wir z. B. in (40)  $h_n = 0$  setzen, bekommen wir für  $a_{(n)}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades von  $i$ , welchen wir schreiben können

$$a_{(n)} = C_0 + C_1 i + C_2 i^2 + \dots + C_n i^n, \quad (41)$$

das ist aber nichts anderes als die Taylorsche Reihe des Rentenbarwertes  $a_x(i)$  (17), welche beim Gliede  $i^n$  abgebrochen ist. In (40) ist also auch die Taylorsche Reihe von  $a_x$  als Spezialfall enthalten. Die Präzision der gekürzten Taylorschen Reihe (41) lässt übrigens zu wünschen übrig, weil  $h_n = 0$  entschieden zu klein genommen ist.

Bei der Integration der Differentialgleichung (25) haben wir stillschweigend  $n$  für eine ganze positive Zahl angenommen. Es kann aber  $n$  auch eine nicht ganze positive Zahl sein. In diesem Falle ist das Endresultat der Integration der generalisierten Poukkaschen Funktion ein Näherungswert von  $M_x v^\varepsilon$ , wo  $0 < \varepsilon < 1$ . Es ist also möglich, Näherungsformeln auch für die Berechnung der Summen der diskontierten Zahlen  $S_x^{(\varepsilon)}$  aufzustellen.

## 7. Pensionsversicherung

Unsere Ausführungen gelten selbstverständlich auch für die Ausscheideordnungen der Aktiven und für die Absterbeordnungen der Invaliden, Witwen, Waisen, Aszendenten und Deszendenten in der Pensionsversicherung. Bezüglich der Anwartschaften der Aktiven auf Invalidenrente, weiters bezüglich der Anwartschaften der Aktiven und Invaliden auf Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten sind noch einige Erklärungen notwendig.

Zur Vereinfachung der Rechnung supponieren wir, dass die Invalidenrente erst am Ende des Jahres, in welchem die Invalidität eingetreten ist, flüssig wird. Der Wert der Anwartschaft eines  $x$ -jährigen Aktiven auf Invalidenrente ist somit

---

<sup>1)</sup> Siehe Autors Abhandlung «Das Zinsfussproblem», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 47. Band, Heft 1, 1947, S. 167–247.



$$\begin{aligned} a_x^{ai} &= \frac{1}{D_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} D_{x+t}^{ai} \\ &= \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} (l_{x+t-1}^{aa} i_{x+t-1} a_{x+t}^{ii}) v^t \\ &= \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} \lambda_{x+t} (1+i)^{-t}. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet

$l_x^{aa}$  = die Zahl der Aktiven im Alter  $x$  in der Tafel der Ausscheidungsordnung der Aktiven;

$i_x$  = die einjährige Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen Aktiven, invalid zu werden und als Invalide das Alter von  $(x+1)$  Jahren zu erreichen;

$a_x^{ii}$  = der Barwert der vorschüssigen lebenslänglichen konstanten Leibrente des Invaliden.

Die Grösse  $\lambda_{x+t} = l_{x+t-1}^{aa} i_{x+t-1} a_{x+t}^{ii}$

ist eine Funktion des Zinsfusses  $i$ , mit welchem der Wert  $a_{x+t}^{ii}$  berechnet ist, was bei der Differentiation der Gleichung (7) berücksichtigt werden muss. Die Formel (8) gilt also in diesem Falle nicht. Dieses Hindernis der Anwendung der Funktion  $M_n v^n$  im Gebiete der Anwartschaften kann jedoch leicht umgangen werden.

Bezeichnen wir mit  $I_{x+t}$  die Zahl der Invaliden, welche sich aus der Gesamtheit der Aktiven  $l_x^{aa}$  im Laufe von  $t$  Jahren rekrutiert haben und welche das Alter von  $(x+t)$  Jahren erreicht haben. Der Wert der Anwartschaft eines  $x$ -jährigen Aktiven auf Invalidenrente kann also auch geschrieben werden

$$a_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \sum_{t=1}^{\omega-x} I_{x+t} (1+i)^{-t}.$$

Die Grösse  $I_{x+t}$  ist aber keine Funktion des Zinsfusses. Auf dieselbe Art und Weise kann der Wert aller anderen in der Pensionsversicherung vorkommenden Anwartschaften berechnet werden. Dadurch ist die Möglichkeit geschaffen, die neue Funktion  $M_n v^n$  auch in der gesamten Pensionsversicherung anwenden zu können. So z. B. ist gemäss (9)

$$\frac{d a_x^{ai}}{d i} = -v (I a^{ai})_x. \quad (42)$$

Zu beachten ist, dass die Grösse  $(Ia^{ai})_x$  in (42) den Wert der Anwartschaft auf steigende Leistungen bedeutet, welche allen Invaliden ohne Rücksicht, wann die Invalidität eingetreten ist, im gleichen Betrage gezahlt werden. So z. B. bekommen die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre die Rente 1, 2, 3, 4, 5 usw., die aus dem zweiten Versicherungsjahre 2, 3, 4, 5 usw., die aus dem dritten Versicherungsjahre 3, 4, 5 usw. usw. Es ist also

$$(Ia^{ai})_x > \frac{\sum_{t=1}^{\omega-x} \binom{t}{1} D_{x+t}^{ai}}{D_x^{aa}}.$$

Nach den Vorschriften der Pensionsversicherungsgesetze wird aber die Höhe der Invalidenrente mit Rücksicht auf die Dauer der Pensionsversicherung vor dem Eintritte der Invalidität bestimmt, nachher bleibt aber die Invalidenrente konstant, d. h. die Invaliden aus dem ersten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 1, die aus dem zweiten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 2, die aus dem dritten Versicherungsjahre bekommen die gleichbleibende Rente im Betrage 3 usw. usw. Ganz dasselbe gilt auch für die Witwen-, Waisen-, Aszendenten- und Deszendentenrenten.

Die Grenzwerte von  $k_n$  und  $h_n$ , welche übrigens vom Zinsfusse unabhängig sind, wie wir oben gezeigt haben, gelten selbstverständlich auch bei den Anwartschaften, denn jede Anwartschaft kann auch mittels einer vom Zinsfusse unabhängigen Ausscheideordnung  $l_{x+t}$  berechnet werden. Nachdem die diskontierten Zahlen, mit welchen die Anwartschaften berechnet werden, in niedrigen Altern rasch zunehmen, in höheren Altern aber langsam abnehmen, sind bei den Anwartschaften die Grenzen von  $k_n$  und  $h_n$  (36) bzw. (37), d. i.

$$\frac{n}{n+1} < k_x \leq 1,$$

$$1 < h_n \leq \frac{n+1}{n}.$$

Bis jetzt sind wenigstens unseres Wissens die Poukkaschen Zahlen nur für Absterbeordnungen der Versicherten und der Bevölkerung be-



$$k_1^{ii}(x, i) = \frac{S_x^{ii(2)} N_x^{ii}}{(S_x^{ii})^2}$$

$x \backslash i$	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	$i \backslash x$
16	1.01	1.05	1.09	1.12	1.13	1.14	1.14	16
21	0.90	0.94	0.97	1.00	1.03	1.04	1.05	21
26	0.84	0.88	0.91	0.93	0.95	0.97	0.98	26
31	0.82	0.85	0.87	0.89	0.91	0.93	0.95	31
36	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89	0.91	0.92	36
41	0.80	0.82	0.84	0.86	0.88	0.89	0.91	41
46	0.80	0.82	0.83	0.85	0.87	0.88	0.89	46
51	0.80	0.82	0.83	0.85	0.86	0.87	0.88	51
56	0.80	0.82	0.83	0.84	0.85	0.87	0.88	56
61	0.81	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.87	61
66	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	66
71	0.85	0.86	0.87	0.87	0.88	0.89	0.89	71
76	0.88	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91	76
81	0.89	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91	0.91	81

$$k_1^{ai}(x, i) = \frac{S_x^{ai(2)} N_x^{ai}}{(S_x^{ai})^2}$$

[illegible]

$$k_1^{aw}(x, i) = \frac{S_{x(y)}^{a(2)} N_{x(y)}^a}{(S_{x(y)}^a)^2}$$

[illegible]

$$k_1^{ak}(x, i) = \frac{S_{x(z)}^{a(2)} N_{x(z)}^a}{(S_{x(z)}^a)^2}$$

[illegible]