Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 51 (1951)

Artikel: Ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Prämienbestimmung in der Invalidenversicherung bei Variation der Rechnungsgrundlagen

Autor: Zwinggi, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555056

Ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Prämienbestimmung in der Invalidenversicherung bei Variation der Rechnungsgrundlagen

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

In Band 49 (1949) der «Mitteilungen» haben wir ein Verfahren entwickelt, das mit geringem Aufwand die Prämie für die Invalidenrente näherungsweise zu berechnen gestattet, wenn der Parameter c im Ansatz für die einjährige abhängige Invalidierungswahrscheinlichkeit $^*i_x = \alpha + \beta c^x$ variiert wird [1]. Im folgenden wollen wir eine weitere Methode zur Lösung der gleichen Aufgabe darlegen. Den Ausgangspunkt zum neuen Verfahren bilden Ergebnisse, die wir im Zusammenhang mit der Erfassung einer Zinsfussvariation bei der Prämie der Todesfallversicherung gefunden haben [2]. Das neue Vorgehen ist noch genauer als das frühere, ohne aber mehr Rechenarbeit zu bedingen.

Sei p_x^{ai} die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven, innerhalb Jahresfrist invalid zu werden und das Invalidierungsjahr zu überleben. Dann lässt sich für p_x^{ai} unter Verwendung der üblichen Symbole schreiben [3]

$$p_x^{ai} = (1 - q_x^i)\, i_x \left(1 - \frac{q_x^{aa}}{2} + \frac{q_x^i}{2}\right).$$

Wir nehmen an, die Sterblichkeit der Invaliden sei gleich der allgemeinen Sterblichkeit; das hat zur Folge, dass $q_x^i = q_x = q_x^{aa}$ und somit $p_x^{ai} = i_x(1 - q_x)$. Schliesslich ersetzen wir im Ansatz für die Prämie die Aktivitätsordnung durch die Überlebensordnung. Wir

---

[1]) Variation der Rechnungsgrundlagen in der Invalidenversicherung, S. 158 bis 164.

[2]) A study of the dependence of the premium on the rate of interest (Skandinavisk Aktuarietidskrift, 33. Jahrgang, 1950, S. 88–97).

[3]) Vgl. «Versicherungsmathematik», S. 27, Formel (42).

können dann die Jahresprämie für die Invalidenrente «1», zahlbar erstmals Ende Invalidierungsjahr[1]), letztmals im Alter von $x+n-1$ Jahren, darstellen als

$$P^{i}_{x\overline{n}|} = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} v^{t+1}\, l_{x+t}\, i_{x+t}\, (1-q_{x+t})\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} v^{t}\, l_{x+t}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} D_{x+t+1}\, i_{x+t}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t}}\,. \tag{1}$$

Für den Verlauf der einjährigen unabhängigen Invalidierungswahrscheinlichkeit[2]) nehmen wir die Makehamformel an, also

$$i_x = \alpha + \beta c^{x}; \tag{2}$$

gleichzeitig kürzen wir ab mit $\sum\limits_{t=0}^{n-1} D_{x+t} = N_{x\overline{n}|}$. Beziehung (1) lautet dann

$$P^{i}_{x\overline{n}|}(\alpha,\beta,c) = \alpha\, \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} D_{x+t+1}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{N_{x\overline{n}|}} +$$

$$+\, \beta\, \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} c^{x+t}\, D_{x+t+1}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{N_{x\overline{n}|}} = \tag{3}$$

$$= K_1(\alpha) + K_2(\beta, c)\,. \tag{4}$$

Die Variation von α und β bedarf wiederum keiner Erläuterung; wir haben also nur $K_2(\beta, c)$ näher zu untersuchen.

---

[1]) Das Verfahren ist genau gleich durchführbar, wenn festgesetzt wird, die Rente beginne durchschnittlich in der Mitte des Jahres zu laufen.

[2]) In der eingangs genannten Untersuchung bezog sich der gleiche Ansatz auf die abhängige Wahrscheinlichkeit, was an sich belanglos ist.

Sei mit
$$J(c) = \sum_{t=0}^{n-2} c^{x+t} D_{x+t+1} a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \tag{5}$$
bezeichnet; für einen bestimmten Wert c_0 von c ist dann
$$J(c_0) = \sum_{t=0}^{n-2} c_0^{x+t} D_{x+t+1} a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}. \tag{6}$$

Ferner wird $c_0 = e^{w_0} = \exp[w_0]$ und $c = e^{w} = e^{w_0-\varepsilon} = \exp[w_0 - \varepsilon]$ gesetzt; damit geht (5) über in
$$J(c) \to \sum_{t=0}^{n-2} \exp[-\varepsilon(x+t)] \exp[w_0(x+t)] D_{x+t+1} a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} =$$
$$= \sum_{t=0}^{n-2} \exp[-\varepsilon(x+t)] f(x+t) = F(\varepsilon). \tag{7}$$

Für die spätere Auswertung führen wir neue Kommutationszahlen ein gemäss
$$f(x+t) = \exp[w_0(x+t)] D_{x+t+1} a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} =$$
$$= \exp[w_0(x+t)] (N_{x+t+1} - N_{x+n}) = \tilde{N}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}. \tag{8}$$

Wenn $c = c_0$, d. h. $\varepsilon = 0$, nimmt (7) die Form an
$$J(c_0) \to \sum_{t=0}^{n-2} f(x+t) = F(0). \tag{9}$$

Wir bilden weiter [1])
$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -\sum_{t=0}^{n-2} (x+t) \exp[-\varepsilon(x+t)] f(x+t) \tag{10}$$
und führen noch unbestimmt die Grösse $A(\varepsilon)$ ein gemäss
$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -A(\varepsilon) \sum_{t=0}^{n-2} \exp[-\varepsilon(x+t)] f(x+t) = -A(\varepsilon) F(\varepsilon). \tag{11}$$

---

[1]) Das von uns im folgenden zur Gewinnung von (18) benutzte Vorgehen gründet sich auf ein Verfahren, das *A. J. Lotka* zur Bestimmung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung entwickelte. Bei Lotka war ε die gesuchte Grösse; für unsere Aufgabe ist ε als gegeben anzusehen und $F(\varepsilon)$ zu bestimmen. Wir werden in der «Notiz zur Berechnung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung» ein weiteres Verfahren zur Berechnung von ε ableiten, das in gleicher Weise wie das verwendete zur Ermittlung von $F(\varepsilon)$ gebraucht werden könnte. Beide Verfahren haben den gleichen Rechenaufwand, die Genauigkeit ist dieselbe; es ist deshalb eine Ermessensfrage, welches Vorgehen anzuwenden ist.

Daraus folgt
$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}\,\frac{1}{F(\varepsilon)} = -A(\varepsilon)$$

und
$$\ln\frac{F(\varepsilon)}{F(0)} = -\int A(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{12}$$

Zur Bestimmung von $A(\varepsilon)$ erhalten wir aus (10) und (11) die Beziehung
$$A(\varepsilon) = \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2}(x+t)\exp\left[-\varepsilon(x+t)\right]f(x+t)}{\sum\limits_{t=0}^{n-2}\exp\left[-\varepsilon(x+t)\right]f(x+t)}\,. \tag{13}$$

In (13) entwickeln wir sodann $\exp\left[-\varepsilon(x+t)\right]$ in die Reihe und bezeichnen die Momente mit
$$R_k = \sum_{t=0}^{n-2}(x+t)^k f(x+t)\,. \tag{14}$$

Aus (13) folgt dann
$$A(\varepsilon) = \frac{R_1 - \varepsilon R_2 + \frac{\varepsilon^2}{2}R_3 - + \ldots}{R_0 - \varepsilon R_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}R_2 - + \ldots}\,, \tag{15}$$

oder, wenn wir Glieder in ε mit höherer als der zweiten Potenz vernachlässigen,
$$A(\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2, \tag{16}$$

wobei
$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{R_1}{R_0},\\ a_1 &= a_0^2 - \frac{R_2}{R_0},\\ a_2 &= a_0^3 - \frac{3R_2}{2R_0}a_0 + \frac{R_3}{2R_0}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Gleichung (16) eingeführt in (12) führt auf
$$\ln\frac{F(0)}{F(\varepsilon)} = a_0\varepsilon + \frac{a_1\varepsilon^2}{2} + \frac{a_2\varepsilon^3}{3}\,. \tag{18}$$

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Für das variierte c ist
$$K_2(\beta, c) = \frac{\beta F(\varepsilon)}{N_{x\overline{n}|}}, \tag{19}$$
wobei $F(\varepsilon)$ aus (18), d. h. aus $F(0)$ über die Gleichungen (16) und (17) zu bestimmen ist. Die Rechenarbeit beschränkt sich im wesentlichen auf die Ermittlung der Momente R_0, R_1 und R_2. (Die numerischen Beispiele zeigen, dass es für die praktisch vorkommenden Variationen von c vollauf genügt, $A(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon$ zu setzen.)

Es ist möglich, die Momente durch Kommutationszahlen gemäss (8) auszudrücken; man kann sich leicht überzeugen, dass gilt

$$R_0 = \tilde{S}_{x+1:\overline{n-1}|}, \tag{20}$$
$$R_1 = x R_0 + \tilde{S}^{(2)}_{x+2:\overline{n-2}|}, \tag{21}$$
$$R_2 = x^2 R_0 + 2x(R_1 - x R_0) + \tilde{S}^{(3)}_{x+2:\overline{n-2}|} + \tilde{S}^{(3)}_{x+3:\overline{n-3}|}. \tag{22}$$

Die Überführung der Momente in Ausdrücke mit Kommutationszahlen lässt sich etwas einfacher gestalten, wenn Gleichung (13) wie folgt geschrieben wird,

$$\begin{aligned} P^i_{x\overline{n}|}(\alpha, \beta, c) &= K_1(\alpha) + \beta c^x \frac{\sum\limits_{t=0}^{n-2} c^t D_{x+t+1}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{N_{x\overline{n}|}} = \\ &= K_1(\alpha) + c^x \overline{K}_2(\beta, c). \end{aligned} \tag{23}$$

Sinngemäss ist dann

$$\overline{J}(c) = \sum_{t=0}^{n-2} c^t D_{x+t+1}\, a_{x+t+1:\overline{n-t-1}|} \tag{24}$$

zu setzen, worauf
$$\overline{F}(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n-2} \exp\,[-\varepsilon t]\, \overline{f}(x+t) \tag{25}$$
wird mit
$$\overline{f}(x+t) = \exp\,[w_0 t]\,(N_{x+t+1} - N_{x+n}). \tag{26}$$

Der Gang der Ableitung bleibt sich von hier an grundsätzlich gleich; die Momente (14) nehmen die Gestalt an

$$\overline{R}_k = \sum_{t=0}^{n-2} t^k \overline{f}(x+t), \tag{27}$$

die übergeführt werden können in etwas einfachere Ausdrücke als wie sie (20) bis (22) darstellen. Dafür muss man aber hinnehmen, in (23) die Grösse c^x für das variierte c jedesmal zu bestimmen.

Abschliessend wollen wir die Güte der Näherung durch ein Zahlenbeispiel belegen. Die Voraussetzungen sind in wesentlicher Übereinstimmung mit der frühern Methode die folgenden:

Sterbetafel: SM 1939/44.

Zinsfuss: 3 %.

Parameter der Makehamformel $\alpha = 0{,}004$, $\beta = 0{,}00009$ und $c = 1{,}10$.

Variierter Parameter $c = 1{,}11$ und $c = 1{,}12$.

Tabelle 1 zeigt, welchen Variationsbereich für i_x wir mit der getroffenen Annahme erreichen.

Tabelle 1: Verlauf der Invalidierungswahrscheinlichkeit

x	$c = 1{,}10$	$c = 1{,}11$	$c = 1{,}12$	Zum Vergleich IF 1948 [1]
20	0,0046	0,0047	0,0049	0,0047
30	0,0056	0,0061	0,0067	0,0061
40	0,0081	0,0099	0,0124	0,0098
50	0,0146	0,0206	0,0300	0,0205
60	0,0314	0,0512	0,0848	0,0502

[1]) Gruppenversicherungstarife 1948, Frauen.

Ein grösserer Variationsbereich für ein Schlussalter von 60 Jahren als $\dfrac{0{,}0848}{0{,}0314} = 2{,}7$ wird praktisch nicht vorkommen.

In *Tabelle 2* führen wir die genaue Prämie und die näherungsweise bestimmte Prämie für $x + n = 60$ und für $\ln \dfrac{F(0)}{F(\varepsilon)} = a_0\,\varepsilon + \dfrac{a_1\,\varepsilon^2}{2}$ auf.

Tabelle 2: Prämie für die Invalidenrente 100

Eintrittsalter x	$c = 1{,}11$			$c = 1{,}12$		
	genau	genähert	relative Abweichung ‰	genau	genähert	relative Abweichung ‰
20	14,16	14,16	0,0	17,95	17,95	0,0
30	16,01	16,01	0,0	21,66	21,66	0,0
40	18,23	18,23	0,0	26,45	26,45	0,0
50	18,97	18,97	0,0	29,59	29,59	0,0

Selbst bei einer Dauer von $n = 40$ ist die Abweichung null. Diese Tatsache veranlasste uns zu prüfen, ob es genügen würde, $\ln \frac{F(0)}{F(\varepsilon)} = a_0 \varepsilon$ zu setzen. Die Ergebnisse sind in *Tabelle 3* zusammengestellt.

Tabelle 3: Prämie für die Invalidenrente 100

Eintrittsalter x	$c = 1{,}11$			$c = 1{,}12$		
	genau	genähert	relative Abweichung ‰	genau	genähert	relative Abweichung ‰
20	14,16	14,12	2,8	17,95	17,73	12,3
30	16,01	15,98	1,9	21,66	21,46	9,2
40	18,23	18,21	1,1	26,45	26,31	5,3
50	18,97	18,96	0,5	29,59	29,53	2,0

Für eine Variation des Parameters c von 1,10 auf 1,11 reicht der Ansatz $\ln \frac{F(0)}{F(\varepsilon)} = a_0 \varepsilon$ völlig aus. Das gleiche gilt für die Variation von c auf 1,12, wenn die Versicherungsdauer 30 Jahre nicht übersteigt.