Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 51 (1951)

Artikel: Weitere Ergänzungen zur F-Methode der Reserveberechnung

Autor: Jecklin, H. / Zimmermann, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-555044

Weitere Ergänzungen zur F-Methode der Reserveberechnung

Von *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*, Zürich

Im Gefolge der beiden Publikationen in Bd. 50, 2 und Bd. 51, 1 dieser Hefte sind den Verfassern zahlreiche mündliche und schriftliche Mitteilungen und Anfragen zugekommen, welche auf ein reges Interesse an der neuen Reserveberechnungsmethode schliessen lassen. Nachdem die Verfasser inzwischen begonnen haben, die Methode in praktischer Anwendung zu verwirklichen, wobei mancherlei sich dabei ergebende Probleme zu lösen waren, mögen im folgenden weitere theoretische und praktische Ergänzungen zu den bereits gemachten Ausführungen mitgeteilt werden. In diesem Zusammenhange danken wir insbesondere den beiden englischen Kollegen M. A. W. Joseph und M. W. Perks für ihre interessanten Bemerkungen.

Wir erinnern daran, dass von der Idee ausgegangen wird, die Reservekurve von gemischten Versicherungen und von Versicherungen mit ähnlichem Reserveverlauf als einen Teil einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten aufzufassen. Es gilt dann im einfachsten Falle, wo ${}_0V = 0$ und ${}_nV = 1$ die Näherungsformel

$$ {}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \tag{I} $$

worin F eine charakteristische Konstante ist, welche aus einer bestimmten Reserveposition ${}_\alpha V$ ermittelt wird nach der Relation

$$ F = \frac{(1 - {}_\alpha V)\,\alpha}{{}_\alpha V\,(n - \alpha)}, \tag{II} $$

wobei am vorteilhaftesten $\alpha = \frac{n}{2}$ gesetzt wird, so dass $F = \frac{1}{{}_\alpha V} - 1$.

Für die globale Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer t (d. h. gleichen Zugangsjahres) hat man die Formel

$$\sum S\,{}_tV = \frac{t(\sum SG)^2}{\sum SG - t \sum SH}, \tag{III}$$

wobei S die Erlebensfallsumme der Einzelversicherung, $G = \frac{1}{Fn}$ und $H = \frac{F-1}{(Fn)^2}$.

Aus Näherungsformel I folgt die Relation

$$\frac{\frac{t}{n}}{1-\frac{t}{n}} \sim F \frac{{}_tV}{1-{}_tV}. \tag{IV}$$

Bekanntlich ist mancherorts üblich, die prämienfrei reduzierte Summe der gemischten Versicherung einfach mit dem Quotienten t/n, d. h. dem Verhältnis der abgelaufenen zur ganzen Dauer, zu bestimmen. Ersetzen wir in voriger Relation t/n durch ${}_tW_{\overline{xn}|} = \frac{{}_tV_{\overline{xn}|}}{A_{x+t,\overline{n-t}|}}$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{{}_tW_{\overline{xn}|}}{1-{}_tW_{\overline{xn}|}} = F' \frac{{}_tV_{\overline{xn}|}}{1-{}_tV_{\overline{xn}|}}, \tag{V}$$

worin, wie leicht auszurechnen, $F' = \frac{1}{A_{\overline{xn}|}}$, also eine von t unabhängige und damit während des ganzen Versicherungsablaufes konstante Grösse. Für gegenwärtig geltende Grundlagen (moderne Tafel, Zinsfuss ca. 3 %) gilt für gemischte Versicherung, dass $(F'-1) \sim 2(F-1)$.

Sterbetafel S. M. 21/30 zu 3 %						
	$n = 10$		$n = 20$		$n = 30$	
x	$F-1$	$F'-1$	$F-1$	$F'-1$	$F-1$	$F'-1$
20	0,181	0,336	0,392	0,759	0,614	1,257
30	0,183	0,335	0,384	0,744	0,559	1,180
40	0,195	0,329	0,396	0,694	0,509	1,006

Sterbetafel S.M. 39/44 zu 2½ %						
	$n = 10$		$n = 20$		$n = 30$	
x	$F-1$	$F'-1$	$F-1$	$F'-1$	$F-1$	$F'-1$
20	0,148	0,275	0,319	0,612	0,497	1,007
30	0,148	0,275	0,307	0,606	0,446	0,969
40	0,155	0,272	0,312	0,576	0,393	0,854

In vorstehender Zusammenstellung ist

$$F = \frac{1}{{}_{n/2}V_{x\overline{n}|}} - 1\,, \qquad F' = \frac{1}{A_{x\overline{n}|}}\,.$$

Wir haben den hier namhaft gemachten Zusammenhang nicht weiter verfolgt, halten es aber für möglich, dass die Grösse F' für die Festsetzung der prämienfreien Reduktion in der Praxis nützlich werden könnte.

Bei der Einführung der Konstanten F sind wir von der Tatsache ausgegangen, dass bei der gleichseitigen Hyperbel genannter Art das Doppelverhältnis von vier Abszissenpunkten gleich ist dem Doppelverhältnis der vier zugehörigen Ordinatenpunkte. Die Konstante F lässt sich jedoch auch in einfacher Weise einführen, ohne vom Begriff des Doppelverhältnisses Gebrauch zu machen. Soll ein Ast der gleichseitigen Hyperbel zur Interpolation der Reservekurve dienen, so lautet die allgemeine Gestalt ihrer Gleichung

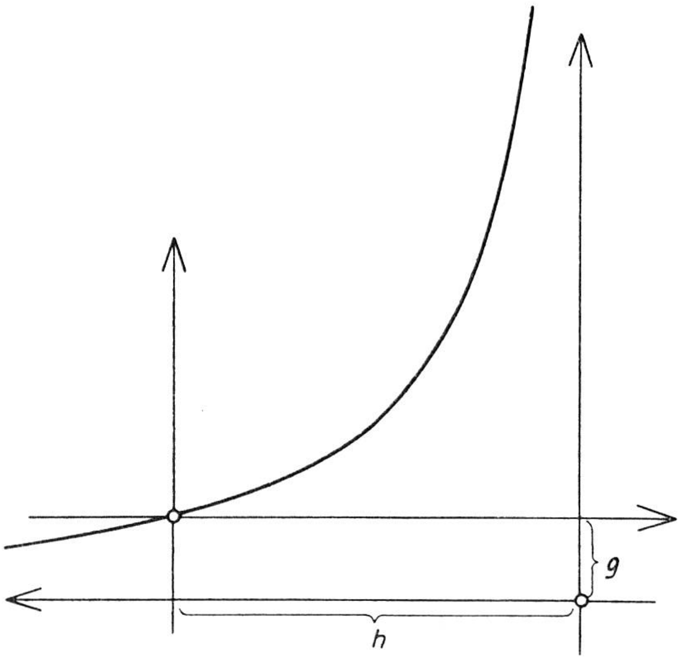
$$({}_tV - g)\,(t + h) = -k^2,$$

oder

$$ {}_tV = g - \frac{k^2}{h+t}\,, \tag{VI}$$

wobei g, h, k Konstanten > 0.

Die Konstanten lassen sich bestimmen, wenn wir für drei Werte von t die entsprechenden Reservewerte ${}_tV$ vor-



schreiben. Nehmen wir vorerst den einfachsten Fall, dass sich die Interpolation über die ganze Versicherungsdauer erstreckt, mit ${}_0V = 0$ und ${}_nV = 1$. Dann folgt vorerst, wenn in VI $t = 0$ und ${}_tV = 0$ gesetzt wird: $gh = k^2$. Setzen wir sodann $t = n$ und ${}_nV = 1$, dann folgt aus VI unter Benutzung des soeben festgestellten Wertes für k^2:

$$(1 - g)(n + h) = -gh \quad \text{resp.} \quad g = \frac{n+h}{n}.$$

Somit können wir Gleichung VI schreiben

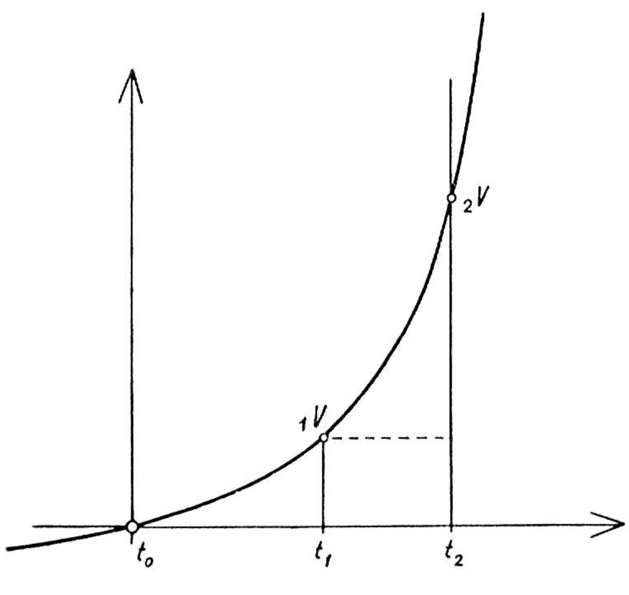
$${}_tV = \frac{n+h}{n} - \frac{gh}{t+h} = \frac{n+h}{n} - \frac{(n+h)h}{n(t+h)} = \frac{(n+h)t}{(t+h)n} =$$

$$= \frac{1}{\frac{hn}{(n+h)t} + \frac{n}{(n+h)}} = \frac{1}{\frac{h}{n+h}\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1} = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \quad \text{(VII)}$$

wenn $\frac{h}{n+h} = F$ gesetzt wird. Für die Konstante F folgt daraus

$$F = \frac{(1 - {}_tV)t}{{}_tV(n - t)},$$

und sie kann bestimmt werden, wenn wir ausser den beiden Reservepositionen ${}_0V$ und ${}_nV$ noch eine dritte Position ${}_aV$ als bekannt voraussetzen. Das führt unmittelbar zu Formel II.



Gehen wir nun zum allgemeinen Fall über, dass die Reservekurve innerhalb der Interpolationsgrenzen t_1 und t_2 erfasst werden soll (wobei nicht zu übersehen ist, dass die abgelaufene Zeit immer vom Beginn des Interpolationsintervalles aus zählt), so tritt an Stelle von Gleichung VI die folgende

$$({}_tV - g)(t - t_1 + h) = -k^2, \text{ resp.}$$

$${}_tV = g - \frac{k^2}{t - t_1 + h}. \quad \text{(VIII)}$$

Aus ${}_tV = {}_1V$ für $t = t_1$ folgt $\qquad g = {}_1V + \frac{k^2}{h}$,

und aus ${}_tV = {}_2V$ für $t = t_2$ folgt $\quad {}_2V = {}_1V + \frac{k^2}{h} - \frac{k^2}{t_2 - t_1 + h}$,

also $$k^2 = ({}_2V - {}_1V)\frac{h(h + t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Diese Werte für g und k^2 in VIII eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
{}_tV &= {}_1V + ({}_2V - {}_1V)\frac{h + t_2 - t_1}{t_2 - t_1} - ({}_2V - {}_1V)\frac{h(h + t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t - t_1 + h)} = \\
&= {}_1V + ({}_2V - {}_1V)\frac{(h + t_2 - t_1)(t - t_1)}{(t_2 - t_1)(t - t_1 + h)} = \\
&= {}_1V + ({}_2V - {}_1V)\frac{t - t_1}{\frac{h}{h + t_2 - t_1}\{(t_2 - t_1) - (t - t_1)\} + (t - t_1)} = \\
&= {}_1V + ({}_2V - {}_1V)\frac{1}{F\left(\frac{t_2 - t_1}{t - t_1} - 1\right) + 1}, \qquad \text{(IX)}
\end{aligned}$$

wenn $\frac{h}{h + t_2 - t_1} = F$ gesetzt wird. Für die Konstante F folgt daraus

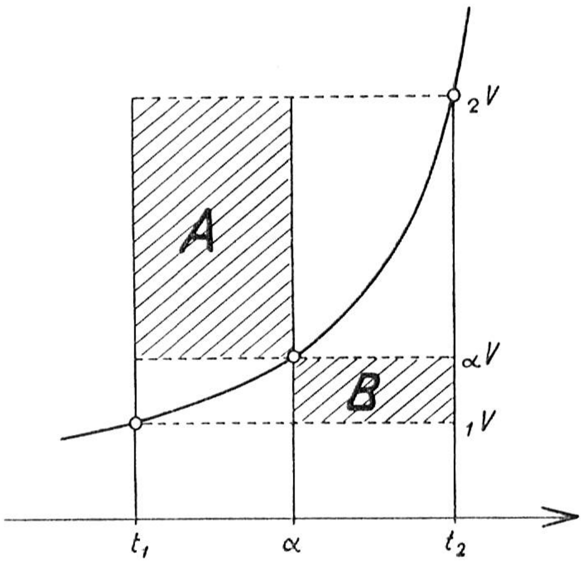
$$F = \frac{({}_2V - {}_tV)(t - t_1)}{({}_tV - {}_1V)(t_2 - t)}, \qquad \text{(X)}$$

und sie kann bestimmt werden, wenn wir ausser den beiden Reservepositionen ${}_1V$ und ${}_2V$ noch eine dritte Position ${}_\alpha V$ mit $t_1 < \alpha < t_2$ kennen $\left(\text{am besten } \alpha = \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)\right)$, womit

$$F = \frac{({}_2V - {}_\alpha V)(\alpha - t_1)}{({}_\alpha V - {}_1V)(t_2 - \alpha)}. \qquad \text{(XI)}$$

Der Zusammenhang von Formel IX mit Formel VII ist offensichtlich: an Stelle der vollen Summe 1 von VII tritt in IX die reduzierte Summe $({}_2V - {}_1V)$, und die zu Beginn des Interpolationsintervalles bereits vorhandene Reserve ${}_1V$ kommt als additives Glied hinzu.

Für die Berechnung von F liefert XI eine einfache Gedächtnisregel:



Sei gegeben eine Versicherung mit Erlebensfallsumme S, und die interpolatorische Reserveberechnung soll sich auf das Intervall t_1 bis t_2 beziehen, wobei $t_1 > t_0$ und $t_2 < n$ sein kann. Für t_1 betrage der Reservesatz ${}_1V$ und für t_2 sei er ${}_2V$. Kennt man nun noch eine dritte Reserveposition ${}_\alpha V$ mit $t_1 < \alpha < t_2$ (wobei aus bekannten Gründen α möglichst in der Mitte zwischen t_1 und t_2 gelegen sein sollte), so gilt für die Bestimmung von F die einfache Regel

$$F = \frac{A}{B}, \tag{XII}$$

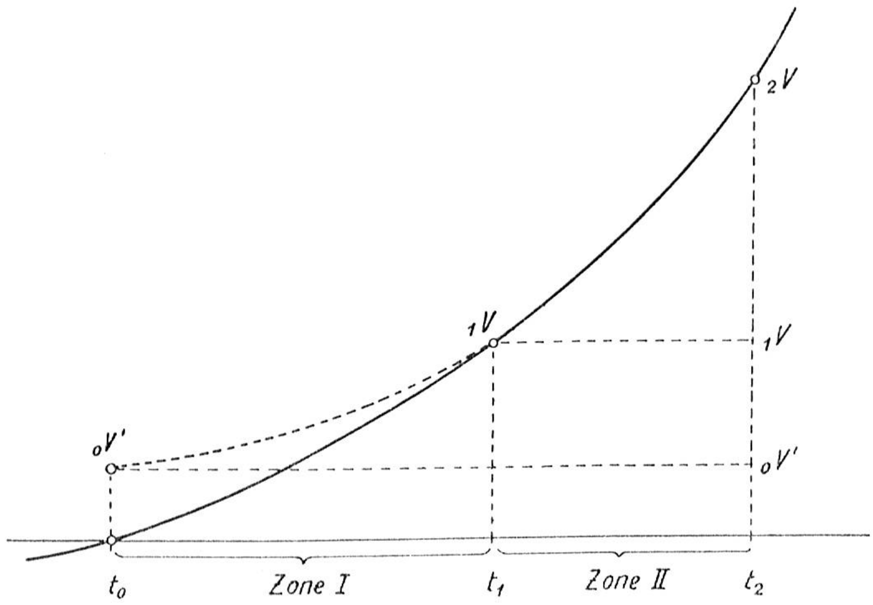
worin A die Rechteckfläche $({}_2V - {}_\alpha V)(\alpha - t_1)$
und B die Rechteckfläche $({}_\alpha V - {}_1V)(t_2 - \alpha)$ bedeuten.

Als Reserven für $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ haben wir dann offenbar:

$$S\,{}_tV = S\,{}_1V + \frac{S({}_2V - {}_1V)}{F\left(\dfrac{t_2 - t_1}{t - t_1} - 1\right) + 1}.$$

Wie wir bereits früher ausführten, werden die Interpolationsergebnisse bei langen Versicherungsdauern, insbesondere aber bei Überschreiten des Endalters von 65 Jahren unbefriedigender. Dieser Übelstand kann durch Unterteilung der Versicherungsdauer n in zwei oder mehr Interpolationsintervalle (nennen wir sie kurz Zonen) überbrückt werden. Für jede einzelne Zone kann die Ermittelung der zugehörigen Konstanten F nach der A/B-Regel (XII) erfolgen. In ihrer eigenen Praxis verwenden die Verfasser das im Anhang zu dieser Arbeit abgedruckte Schema für Zonenaufteilung. Bei einer gemischten Versicherung z. B. mit Eintrittsalter 45 und Endalter 79 geht die erste Zone von 45 bis 59, die zweite Zone von 59 bis 73, und die dritte Zone von 73 bis 79 Jahre erreichten Alters. Wie ersichtlich ist die Zoneneinteilung so gewählt, dass die zweiten und höheren Zonen eine gerade Anzahl von Jahren betragen, was die Bestimmung von F nach der A/B-Regel mit dem Ansatz $\alpha = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ sehr vereinfacht.

Da, wie bereits mehrfach betont, die abgelaufene Zeit stets vom Beginn des Interpolationsintervalles aus zählt, geht bei der Aufteilung der Versicherungsdauer in Zonen ein Hauptvorteil der F-Methode — dass nämlich die Versicherungen gleichen Zugangsjahres als Gruppe beisammen bleiben — zunächst verloren. Es ist dies aber leicht zu beheben: Die für die neue Zone gültige Interpolationskurve wird extrapolatorisch rückwärts bis zum Versicherungsbeginn verlängert, und die Versicherung so behandelt, wie wenn ihr Reserveverlauf ab Beginn nach dieser neuen Interpolationshyperbel bestimmt worden wäre. (Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Ausführungen über die Behandlung der Versicherungen mit abgekürzter Prämienzahlung und der prämienfreien Reduktion Bd. 51, 1, Seiten 44–46).



Das praktische Prozedere ist denkbar einfach. Für die neue Zone (z. B. Zone II in Figur) wird vorerst nach der A/B-Regel die Konstante $F_{(1,2)}$ bestimmt. (Indizes bei der Konstanten F sollen bedeuten, dass sie sich auf eine Zone bezieht, die durch t-Werte mit gleichen Indizes begrenzt ist.) Soll nun an Stelle der Zone (t_1, t_2) unter Beibehaltung des Hyperbelzuges das Intervall (t_0, t_2) treten, so gilt die einfache Beziehung

$$\frac{F_{(0,2)} - 1}{t_2 - t_0} = \frac{F_{(1,2)} - 1}{t_2 - t_1},$$

oder (XIII)

$$F_{(0,2)} = (F_{(1,2)} - 1) \frac{t_2 - t_0}{t_2 - t_1} + 1 .$$

Anderseits gilt nach der A/B-Regel, bezogen auf das Intervall (t_0, t_2)

$$F_{(0,2)} = \frac{({}_2V - {}_1V)(t_1 - t_0)}{({}_1V - {}_0V')(t_2 - t_1)},$$

woraus sich das zugehörige ${}_0V'$ (das eventuell negativ ausfallen kann) errechnet als

$${}_0V' = {}_1V - \frac{(t_1 - t_0)({}_2V - {}_1V)}{(t_2 - t_1)\, F_{(0,2)}} . \qquad \text{(XIV)}$$

Von t_0 aus gezählt (also ursprüngliche Gruppe der Versicherung) gilt dann

$${}_tV = {}_0V' + \frac{({}_2V - {}_0V')}{F_{(0,2)} \left(\frac{t_2 - t_0}{t - t_0} - 1 \right) + 1} .$$

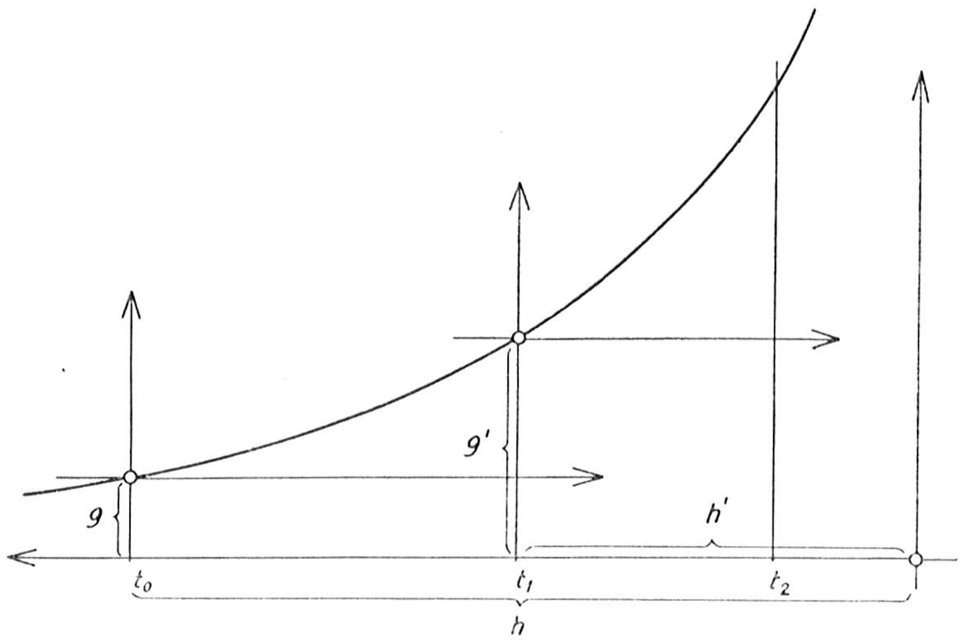
Was den Beweis der Beziehung XIII anbelangt, greifen wir auf Formeln VI und VII zurück. In der Hyperbelgleichung $({}_tV - g)(t + h) = -k^2$ bedeutet h die Verschiebung in der negativen t-Richtung, bezogen auf das Koordinatensystem der einfachen Hyperbelgleichung ${}_tV\, t = -k^2$.

Nach Gesagtem ist $F_{(0,2)} = \dfrac{h}{h + t_2 - t_0}, \quad \dfrac{F_{(0,2)} - 1}{t_2 - t_0} = \dfrac{1}{h + t_2 - t_0},$

und offenbar analog $F_{(1,2)} = \dfrac{h'}{h' + t_2 - t_1}, \quad \dfrac{F_{(1,2)} - 1}{t_2 - t_1} = \dfrac{1}{h' + t_2 - t_1}.$

Nun ist aber $h' - h = t_1 - t_0$, d. h. $h - t_0 = h' - t_1$,

somit $h + t_2 - t_0 = h' + t_2 - t_1$, womit Relation XIII bewiesen ist.



Ein numerisches Beispiel möge die vorangehenden Ausführungen erläutern: Gegeben sei eine gemischte Versicherung mit Eintrittsalter 35 und Dauer 35 Jahre. Nach der Tabelle im Anhang hat bei einem Endalter von 70 und Eintrittsalter unter 39 Jahren eine Zonenaufteilung beim Alter 50 zu erfolgen. Die erste Zone geht also von 35 bis 50, die zweite von 50 bis 70 Jahren. Wir rechnen nach den Grundlagen S. M. 39/44 zu $2\frac{1}{2}\%$.

Für die erste Zone berechnet sich F nach der A/B-Regel zu

$$F = \frac{({}_{15}V - {}_{8}V)\,8}{{}_{8}V(15 - 8)} = \frac{(0{,}34526 - 0{,}17401)}{0{,}17401}\,1{,}142857 = 1{,}1247$$

und demzufolge die Reserve

$${}_{t}V = \frac{0{,}34526}{1{,}1247\left(\dfrac{15}{t} - 1\right) + 1}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 15.$$

Für die zweite Zone berechnen wir die Konstante, die wir hier mit F' bezeichnen wollen, ebenfalls nach der A/B-Regel zu

$$F' = \frac{(1 - {}_{25}V)}{({}_{25}V - {}_{15}V)} = \frac{(1 - 0{,}62544)}{(0{,}62544 - 0{,}34526)} = 1{,}3369$$

und daraus das für das rückwärts bis $t = 0$ verlängerte Intervall gültige F nach Formel XIII:

$$F = 0{,}3369 \frac{35}{20} + 1 = 1{,}5895 .$$

Hieraus berechnen wir ${}_0V'$ nach Formel XIV, nämlich

$${}_0V' = 0{,}34526 - \frac{15}{20} \frac{(1 - 0{,}34526)}{1{,}5895} = 0{,}03632 ,$$

also ergibt sich der Reserveverlauf der zweiten Zone aus

$${}_tV = 0{,}03632 + \frac{1 - 0{,}03632}{1{,}5895\left(\frac{35}{t} - 1\right) + 1}, \quad 15 \leqslant t \leqslant 35 .$$

Ohne Zoneneinteilung hätten wir für F nach der A/B-Regel erhalten

$$F = \left(\frac{1}{{}_{18}V} - 1\right) \frac{18}{17} = 1{,}4357 ,$$

und als Reserveverlauf für die ganze Dauer von 35 Jahren:

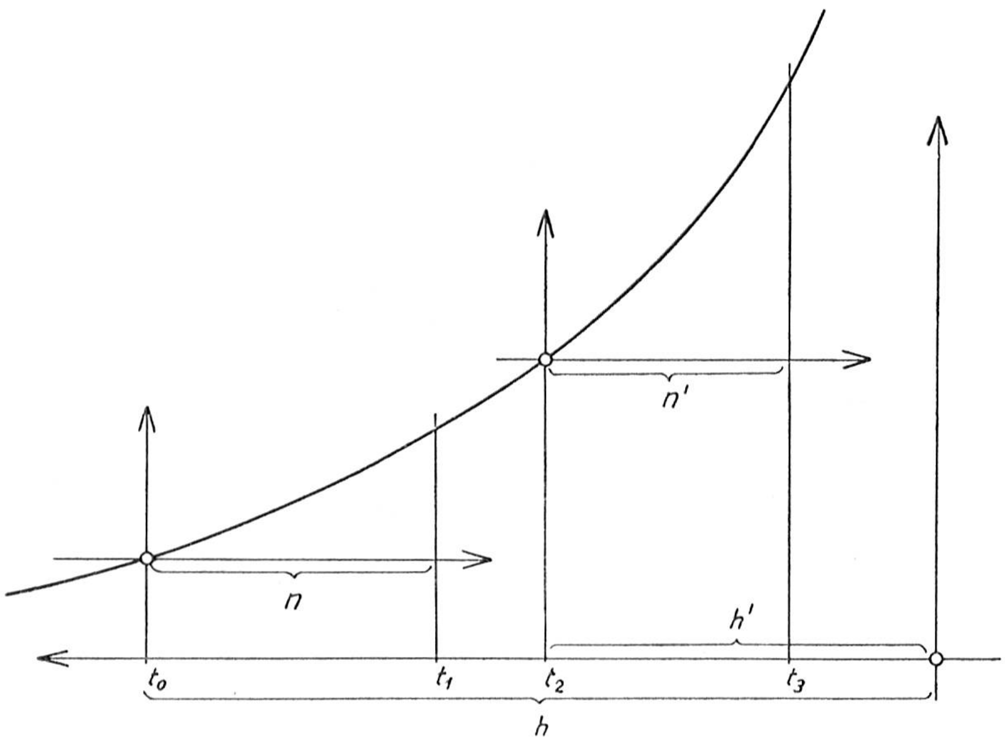
$${}_tV = \frac{1}{1{,}4357\left(\frac{35}{t} - 1\right) + 1} .$$

Natürlich wäre das letztere Vorgehen einfacher; die folgende Zusammenstellung mit der Auswertung vorstehender Formeln führt aber deutlich vor Augen, welch grosse Verbesserung in der Approximation bei Versicherungen langer Dauer resp. hohen Endalters mittels der Zoneneinteilung erreicht werden kann.

t	$_tV$ genau ‰	$_tV$ approximativ über ganze Dauer ‰	Differenz ‰	$_tV$ approximativ mit zwei Zonen ‰	Differenz ‰	Differenz in % der genauen Reserve
1	20,24	20,07	—0,17	20,62	0,38	1,88
3	62,12	61,30	—0,82	62,79	0,67	1,08
5	105,76	104,01	—1,75	106,25	0,49	0,46
7	150,92	148,31	—2,61	151,07	0,15	0,10
9	197,43	194,27	—3,16	197,31	—0,12	—0,06
11	245,19	241,99	—3,20	245,04	—0,15	—0,06
13	294,44	291,58	—2,86	294,33	—0,11	—0,04
15	345,26	343,14	—2,12	345,26	—	—
17	397,65	396,80	—0,85	395,50	—2,15	—0,54
19	451,71	452,69	0,98	448,41	—3,30	—0,73
21	507,55	510,95	3,40	504,20	—3,35	—0,66
23	565,31	571,74	6,43	563,12	—2,19	—0,39
25	625,44	635,21	9,77	625,44	—	—
27	688,54	701,56	13,02	691,46	2,92	0,42
29	755,72	770,99	15,27	761,51	5,79	0,77
31	828,38	843,70	15,32	835,99	7,61	0,92
33	908,64	919,95	11,31	915,32	6,68	0,74
35	1000,—	1000,—	—	1000,—	—	—

Es ist zuzugeben, dass die hyperbolische Interpolation bei Versicherungen mit Endaltern über 65 Jahren auch bei Zoneneinteilung nicht so geringfügige Abweichungen vom genauen Reserveverlauf aufweist, wie bei Versicherungen mit niedrigerem Endalter. Nun ist aber daran zu erinnern, dass die F-Methode nicht zur Berechnung von Einzelreserven, sondern zur globalen Deckungskapitalermittlung dienen soll. In diesem Zusammenhange ist die Feststellung wichtig, dass der pro Intervall durch drei Reservepositionen fixierte Reserveverlauf im allgemeinen vor und nach dem mittleren Fixpunkt entgegengesetzte Abweichungen gegenüber der genauen Reserve aufweist. Infolgedessen ergibt sich schon innerhalb der einzelnen t-Gruppe durch die Versicherungen mit verschiedener Dauer bzw. Zonenlänge eine gewisse Kompensation der Abweichungen, und in noch weit höherem Masse ist dies der Fall in dem alle t-Gruppen umfassenden Gesamtportefeuille.

Formel XIII stellt einen Spezialfall dar einer allgemeineren Beziehung zwischen den Konstanten verschiedener Intervalle bei fest gegebener Interpolationshyperbel. Es sollen zwei Intervalle, (t_0, t_1) und (t_2, t_3), vorliegen (siehe Figur).



Es gilt:

$$n = t_1 - t_0,\quad n' = t_3 - t_2,\quad n' - n = t_3 - t_2 - t_1 + t_0,\quad h' - h = t_2 - t_0.$$

$$F_{(0,1)} = \frac{h}{n+h},\quad F_{(0,1)} - 1 = \frac{-n}{n+h},\quad \frac{F_{(0,1)} - 1}{-n} = \frac{1}{n+h},$$

$$F_{(2,3)} = \frac{h'}{n'+h'},\quad F_{(2,3)} - 1 = \frac{-n'}{n'+h'},\quad \frac{F_{(2,3)} - 1}{-n'} = \frac{1}{n'+h'},$$

$$\frac{n'}{F_{(2,3)} - 1} - \frac{n}{F_{(0,1)} - 1} = n + n' + h - h',$$

woraus

$$F_{(2,3)} - 1 = \frac{n'}{\dfrac{n}{F_{(0,1)} - 1} + n - n' + h - h'} = \frac{(F_{(0,1)} - 1)(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_0) - (F_{(0,1)} - 1)(t_3 - t_1)},$$

$$F_{(2,3)} = \frac{F_{(0,1)}(t_2 - t_1) + (t_2 - t_0)}{F_{(0,1)}(t_1 - t_3) + (t_3 - t_0)}. \qquad \text{(XV)}$$

Nehmen wir nun den speziellen Fall, dass die beiden Intervalle gleichen Anfangspunkt haben, also $t_2 = t_0$, so folgt

$$F_{(0,3)} - 1 = \frac{(F_{(0,1)} - 1)(t_3 - t_0)}{(t_1 - t_0) - (F_{(0,1)} - 1)(t_3 - t_1)} = \frac{(F_{(0,1)} - 1)\, n'}{n + (F_{(0,1)} - 1)(n - n')}.$$

$$F_{(0,3)} = \frac{1}{1 - \dfrac{F_{(0,1)} - 1}{F_{(0,1)}\, n}\, n'}. \qquad \text{(XVI)}$$

Da in diesem Sonderfalle t für beide Intervalle vom gleichen Anfangspunkt t_0 aus gezählt wird, gilt hier offenbar

$$_{n'}V = \frac{1}{F_{(0,1)}\left(\dfrac{n}{n'} - 1\right) + 1} = \frac{n'}{n + F_{(0,1)} - 1)(n - n')} =$$

$$= \frac{1}{(F_{(0,1)} - 1)}\, \frac{(F_{(0,1)} - 1)\, n'}{\{n + (F_{(0,1)} - 1)(n - n')\}} = \frac{F_{(0,3)} - 1}{F_{(0,1)} - 1},$$

und demzufolge $\qquad F_{(0,3)} = {}_{n'}V (F_{(0,1)} - 1) + 1\,.$

Setzen wir nun als zweiten Spezialfall $t_1 = t_3$, d. h. die beiden Intervalle sollen verschiedene Anfangspunkte, aber gleichen Endpunkt haben, dann folgt sofort

$$F_{(2,3)} - 1 = \frac{(F_{(0,3)} - 1)(t_3 - t_2)}{(t_3 - t_0)} = (F_{(0,3)} - 1)\frac{n'}{n}.$$

Das ist die bereits bekannte Relation XIII (wenn nur dort Index 1 durch 2, und Index 2 durch 3 ersetzt wird). Für die Praxis ist insbesondere dieser zweite Sonderfall von grosser Wichtigkeit.

Aus den aufgezeigten Beziehungen zwischen den Konstanten F verschiedener Intervalle ergeben sich Folgerungen, die sowohl in theoretischer wie praktischer Hinsicht von grosser Bedeutung sind: Wenn die Interpolationshyperbel fest vorliegt, kann das Interpolationsintervall nach Belieben verkürzt oder verlängert werden, insbesondere kann der Anfangspunkt (von welchem aus t zählt) frei gewählt werden. Es kann also eine Versicherung in jede beliebige t-Gruppe einklassiert werden, ja theoretisch ist es möglich, durch künstliche Vor- und Nachverschiebung alle Versicherungen eines Portefeuilles in die gleiche t-Gruppe einzufügen, so dass also eine Gruppeneinteilung überhaupt entfällt. Allerdings wird man diese theoretische Möglichkeit nicht praktizieren, denn die der F-Methode entsprechende Einteilung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer entspricht der natürlichen Bestandesentwicklung eines Portefeuilles. Trotzdem ist die genannte Verschiebungsmöglichkeit von grosser Bedeutung, einmal in bezug auf die bereits besprochene Zoneneinteilung des Reserveverlaufs, und sodann bei der Behandlung der sogenannten rückdatierten Versicherungen.

Unter rückdatierten Versicherungen verstehen wir solche, deren Beginn früher liegt als ihr Zugangsjahr (z. B. zufolge Prämien- oder Reservenachzahlung u. ä); um solche Versicherungen in der natürlichen Folge ihrer Policennummer einordnen zu können, müssen sie in die Gruppe ihres Zugangsjahres, und nicht in jene des Versicherungsbeginnes, hineingepasst werden. Nach den vorgängigen Ausführungen ist bei einer Rückdatierung um k Jahre wie folgt vorzugehen: Ist F die Konstante des Normalfalles (Beginn im Zugangsjahr, Versicherungsdauer n), so ist im Moment des Zuganges pro Einheit der Erlebensfallsumme also die Reserve

$$ {}_0V' = \frac{1}{F\left(\frac{n}{k} - 1\right) + 1} $$

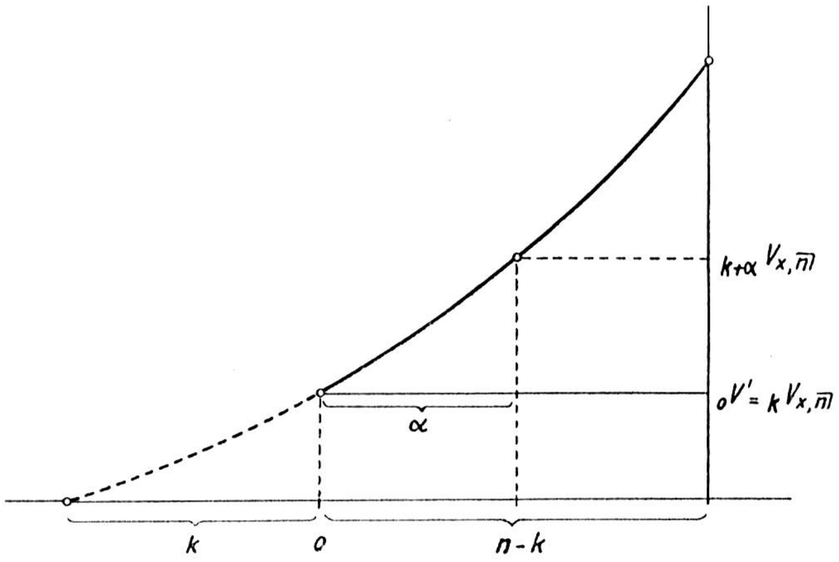
vorhanden. Man bestimmt nun nach Relation XIII die auf der Dauer $n - k$ basierende Konstante

$$ F' = (F - 1)\,\frac{n - k}{n} + 1\,, $$

und die Reserveformel lautet dann, wenn t vom Moment des Zuganges aus gezählt wird,

$$ {}_tV = {}_0V' + \frac{(1 - {}_0V')}{F'\left(\frac{n - k}{t} - 1\right) + 1}\,. \qquad \text{(XVII)} $$

Bei gemischten Versicherungen gestaltet sich die Sachlage besonders einfach.



Es ist hier offenbar

$$F' = \frac{(1 - {}_{k+a}V_{x\overline{n}|})\,\alpha}{({}_{k+a}V_{x\overline{n}|} - {}_kV_{x\overline{n}|})\,(n-k-\alpha)} = \frac{\mathrm{a}_{x+k+a,\,\overline{n-k-a}|}}{\mathrm{a}_{x+k,\,\overline{n-k}|} - \mathrm{a}_{x+k+a,\,\overline{n-k-a}|}} = \frac{(1 - {}_aV_{x+k,\,\overline{n-k}|})\,\alpha}{{}_aV_{x+k,\,\overline{n-k}|}\,(n-k-\alpha)}.$$

D. h. die Konstante ist hier gleich jener für eine gemischte Versicherung mit gegenüber der Originalversicherung um k höherem Eintrittsalter und um k verkürzter Dauer. Für die Reserveberechnung hat sich diese Konstante natürlich auf die um ${}_0V' = {}_kV_{x\overline{n}|}$ reduzierte Summeneinheit zu beziehen, wie in Formel XVII ersichtlich.

In ganz analoger Weise wie Rückdatierungen können auch Nachdatierungen behandelt werden, was z. B. praktisch in Frage kommen kann, wenn eine Risikoversicherung besteht, die über das Jahresende hinausreicht. Wir haben also folgende Zusammenstellung:

Normalfall:

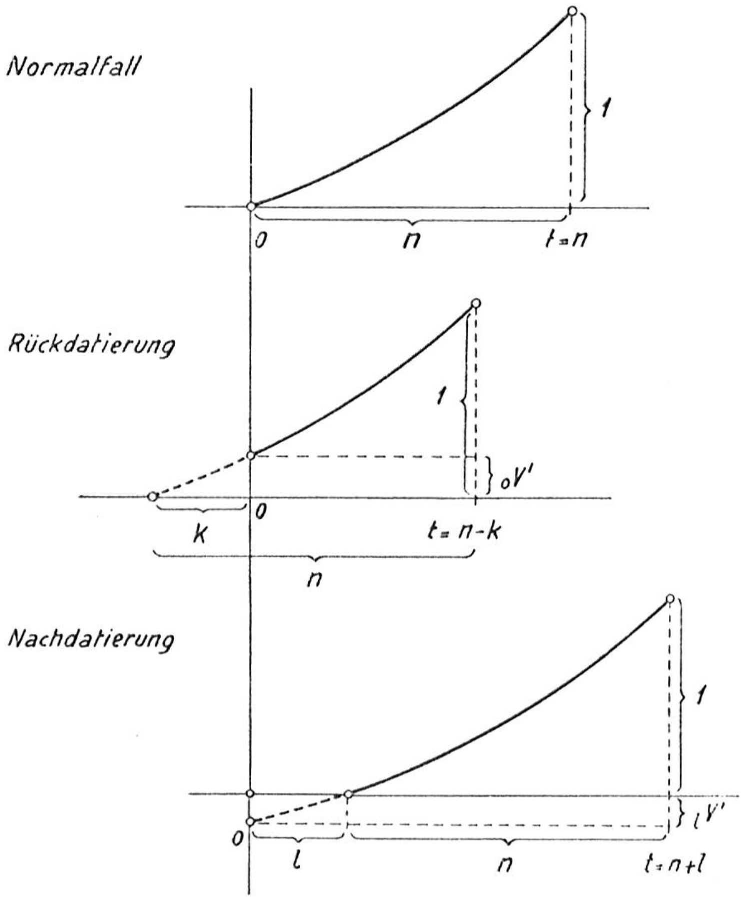
$${}_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}, \quad F = \frac{(1 - {}_aV)\,\alpha}{{}_aV\,(n-\alpha)}, \qquad 0 < \alpha < n.$$

Rückdatierung (um die Zeit k):

$${}_tV = {}_0V' + \frac{(1 - {}_0V')}{F_{(n-k)}\left(\frac{n-k}{t} - 1\right) + 1}, \quad F_{(n-k)} = (F-1)\frac{n-k}{n} + 1.$$

Nachdatierung (um die Zeit l):

$$
{}_lV = \frac{(1 + {}_lV')}{F_{(n+l)}\left(\dfrac{n+l}{t} - 1\right) + 1} - {}_lV', \quad F_{(n+l)} = (F - 1)\frac{n+l}{n} + 1 .
$$



Vielleicht ist es ganz nützlich, ein numerisches Beispiel zur Rückdatierung zu geben, wobei wir auf die zur Illustration der Zonenaufteilung durchgeführte Rechnung zurückgreifen. Angenommen, die behandelte Versicherung (gemischt, $x = 35$, $n = 35$) sei um 5 Jahre rückdatiert, also $k = 5$. Die erste Zone umfasst nunmehr nur noch 10 Jahre, wobei ${}_0V'$ gleich ist der Reserve ${}_5V$ der nicht rückdatierten Versicherung, mithin $106{,}25\,^0/_{00}$ beträgt. Die Konstante F für die verkürzte erste Zone berechnet sich aus jener der unverkürzten Zone (1,1247) nach Formel XIII zu $F = 0{,}1247\,\dfrac{10}{15} + 1 = 1{,}0831$, und

es ist
$$ {}_tV = 0{,}10625 + \frac{0{,}34526 - 0{,}10625}{1{,}0831\left(\frac{10}{t} - 1\right) + 1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10, $$

also z. B.
$$ {}_2V = 0{,}10625 + \frac{0{,}23901}{1{,}0831 \cdot 4 + 1} = 151{,}07\ ^0/_{00}, $$

d. h. gleich der 7. Reserve der gleichen Versicherung ohne Rückdatierung. Für die zweite Zone hatten wir ein ursprüngliches $F' = 1{,}3369$, dessen Basisintervall von 20 Jahren nach Formel XIII rückwärts um 10 Jahre (statt um 15 Jahre, wie im ursprünglichen Beispiel) zu verlängern ist, also
$$ F = 0{,}3369 \frac{30}{20} + 1 = 1{,}5053. $$

Daraus berechnen wir nach Formel XIV:
$$ {}_0V' = 0{,}34526 - \frac{10}{20}\,\frac{(1 - 0{,}34526)}{1{,}5053} = 0{,}12778. $$

Mithin gilt
$$ {}_tV = 0{,}12778 + \frac{1 - 0{,}12778}{1{,}5053\left(\frac{30}{t} - 1\right) + 1}, \quad 10 \leqslant t \leqslant 30, $$

z. B.
$$ {}_{18}V = 0{,}12778 + \frac{0{,}87222}{1{,}5053 \cdot 0{,}66667 + 1} = 563{,}12\ ^0/_{00} $$

entsprechend der 23. Reserve der nicht rückdatierten Versicherung.

Am Schluss der letzten Publikation zur *F-Methode* in Bd. 51, 1 haben wir darauf hingewiesen, dass die Möglichkeit besteht, durch Zusammensetzung einfacher hyperbolischer Reservekurven auch Versicherungen erfassen zu können mit Reserveverlauf, der nicht vom Typus der gemischten Versicherung ist.

Sei $ {}_tV_1 = \dfrac{1}{F_1\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}$ und $ {}_tV_2 = \dfrac{1}{F_2\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1}$, so erhalten wir z. B. aus

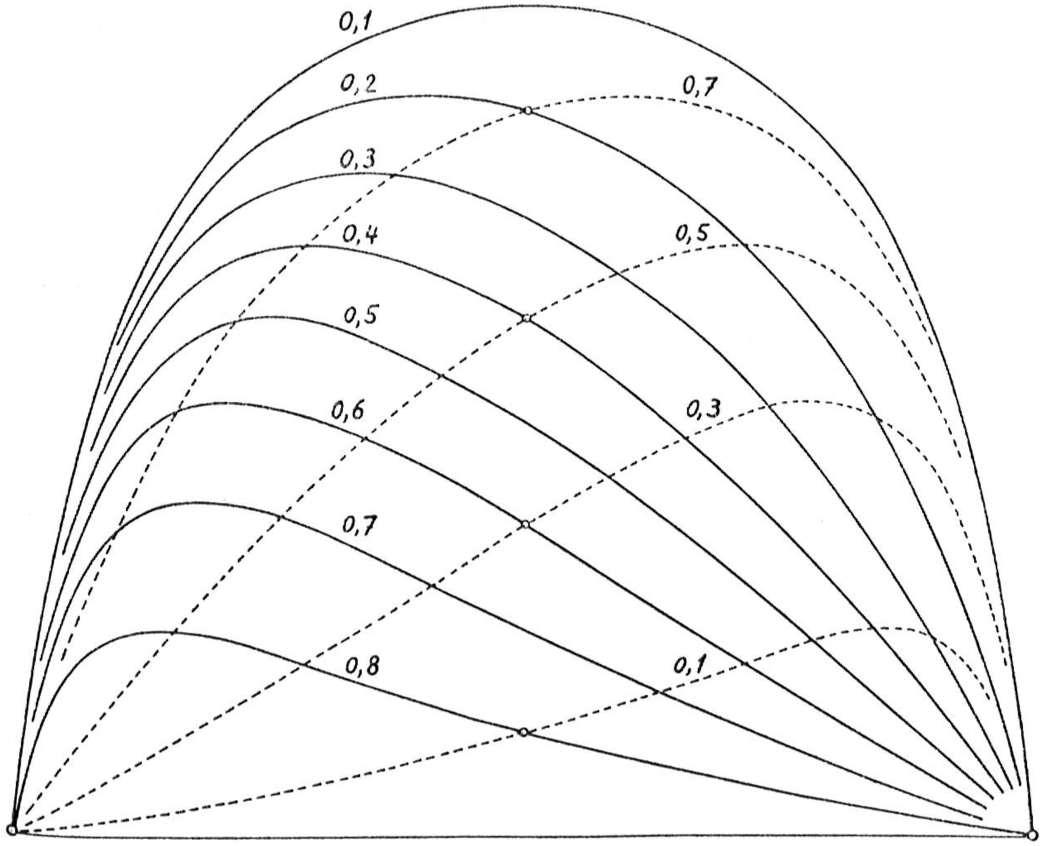
$$ {}_tV' = (k+l)\,{}_tV_1 - k_t\,V_2 \qquad \text{(XVIII)} $$

durch Variation der Konstanten k und l einerseits und der Konstanten F_1 und F_2 anderseits eine Vielfalt von Kurven, über welche sich eine Übersicht nur gewinnen lässt, wenn die Variationen systematisch vorgenommen werden. Wir haben genannten Ortes ein Beispiel gegeben für den Fall $n = 20$, $l = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1{,}5$ und k allein variiert. Es ist klar, dass der Ansatz $l = 1$ in XVIII zu Kurven führt, die alle durch die Punkte $(0,0)$ und $(n,1)$ gehen, wogegen $l = 0$ Kurven mit den Fixpunkten $(0,0)$ und $n,0)$ liefert. Statt sich bei der Systematik der Variationsmöglichkeiten von XVIII der Konstanten F_1 und F_2 direkt zu bedienen, kann man sich auf ${}_{n/2}V_1$ und ${}_{n/2}V_2$ stützen, indem ja bei hyperbolischer Reservekurve die Beziehung gilt ${}_{n/2}V = \dfrac{1}{F+1}$. Auf diese Weise kann man bei den Variationsmöglichkeiten in einfachster Weise die Funktionswerte für $t = 0$, $t = \frac{n}{2}$ und $t = n$ festlegen.

Setzen wir, um ein Beispiel zu geben, $n = 10$, so haben wir für den Reserveverlauf $V = \dfrac{1}{F\left(\dfrac{n}{t} - 1\right) + 1}$, bei welchem wir im Ansatz für ${}_{n/2}V$ in Differenzen von $100\,^0/_{00}$ fortschreiten (was beliebig enger gestaltet werden kann), die folgende Tabelle:

t	${}_{n/2}V=0{,}9$ $F=\frac{1}{9}$	0,8 $\frac{1}{4}$	0,7 $\frac{3}{7}$	0,6 $\frac{2}{3}$	0,5 1	0,4 $1\frac{1}{2}$	0,3 $2\frac{1}{3}$	0,2 4	0,1 9
	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$
1	500,—	307,69	205,88	142,86	100,—	68,97	45,45	27,03	12,20
2	692,31	500,—	368,42	272,73	200,—	142,86	96,77	58,82	27,03
3	794,12	631,58	500,—	391,30	300,—	222,22	155,17	96,77	45,45
4	857,14	727,27	608,69	500,—	400,—	307,69	222,22	142,86	68,96
5	900,—	800,—	700,—	600,—	500,—	400,—	300,—	200,—	100,—
6	931,03	857,14	777,78	692,31	600,—	500,—	391,30	272,73	142,86
7	954,55	903,23	844,88	777,78	700,—	608,70	500,—	368,42	205,88
8	972,97	941,18	903,22	857,14	800,—	727,28	631,58	500,—	307,69
9	987,80	972,97	954,54	931,03	900,—	857,15	794,12	692,31	500,—
10	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—	1000,—

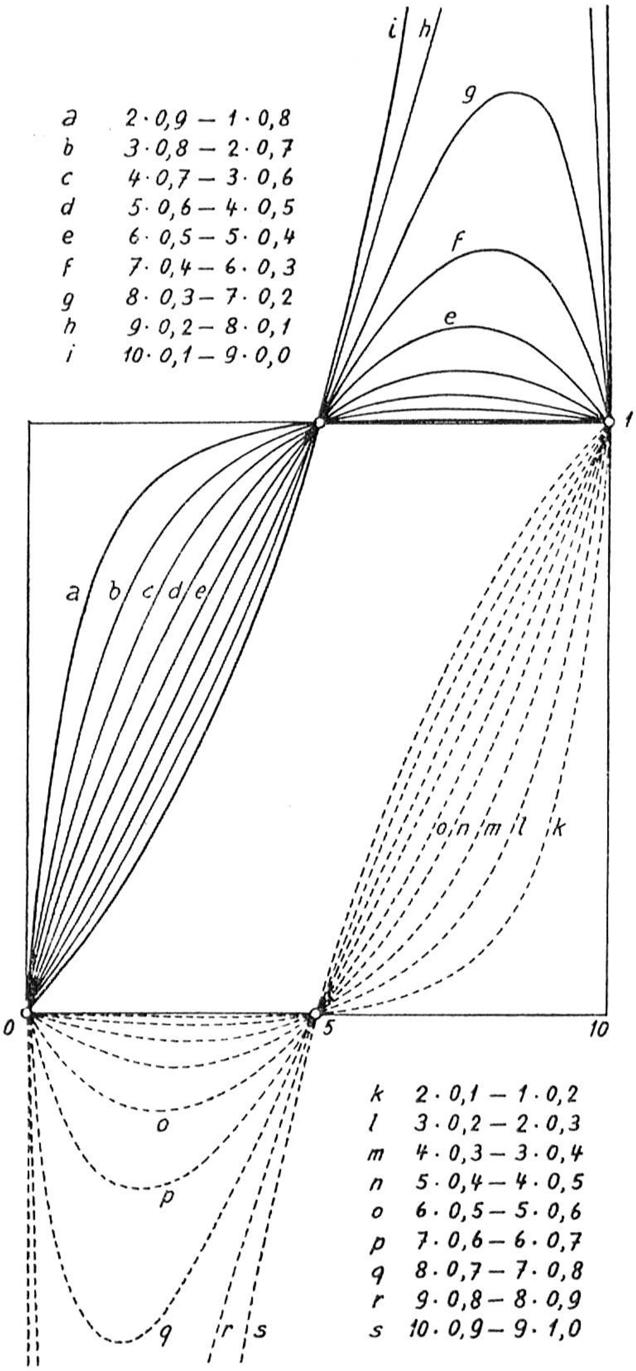
Sei nun beispielsweise $l = 0$, $k = 1$, ${}_{n/2}V_1 = 900\,^0/_{00}$ und ${}_{n/2}V_2$ soll variieren, so ergeben sich gemäss XVIII Kurven, von welchen in nachstehender Figur einige ausgezogen sind (die Anschriften geben den Wert von ${}_{n/2}V_2$). Setzt man $l = 0$, $k = 1$, ${}_{n/2}V_2 = 100\,^0/_{00}$ und variiert ${}_{n/2}V_1$, so ergibt dies Kurven, wofür in der Figur einige Beispiele gestrichelt eingezeichnet sind (die Anschriften geben den Wert von ${}_{n/2}V_1$). Derartige Kurventypen liessen sich zweifellos auch zur Wiedergabe von Verteilungen in der mathematischen Statistik verwenden. Es würde sich dabei allerdings um rein deskriptive Erfassung einer Verteilung handeln ohne spekulative Bezugnahme auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung (wie etwa bei den Pearsonkurven mit Ausnahme des ersten und siebenten Typus).



Um ein weiteres Beispiel zu geben, setzen wir $l = 1$ und geben die Bedingung vor

$$(k + 1)\,{}_{n/2}V_1 - k\,{}_{n/2}V_2 = s\,. \tag{XIX}$$

Auf diese Weise müssen wir nach XVIII Kurven erhalten, die alle durch die drei Punkte $(0,0)$ $(\frac{n}{2}, s)$ und $(n, 1)$ gehen. Für den speziellen



Fall $s = 1$ sind in nebenstehender Figur einige Kurven ausgezogen, wobei sich die Anschrift auf XIX bezieht. Setzen wir dagegen $s = 0$, so resultieren Kurven mit den Fixpunkten $(0,0)$, $(\frac{n}{2},0)$, $(n,1)$, wofür in der Figur ebenfalls einige Beispiele eingezeichnet sind.

Formel XVIII ist natürlich nicht die einzige Möglichkeit von Kurvenzusammensetzung, z. B. liefert

$$_tV' = \frac{t}{n} + k({}_tV_1 - {}_tV_2)$$

interessante Kurvenzüge von $(0,0)$ nach $(n,1)$, und die Beispiele liessen sich beliebig vermehren.

Für die Interpolationsformel der Einzelreserve gilt

$$_tV = \frac{1}{F\left(\frac{n}{t} - 1\right) + 1} = \frac{tG^2}{G - tH},$$

$$\text{wenn} \quad G = \frac{1}{Fn} \quad \text{und} \quad H = \frac{F-1}{(Fn)^2} = G\left(\frac{1}{n} - G\right),$$

und der Übergang von den Einzelreserven zur globalen Reserveberechnung erfolgt mittels der Approximation

$$\sum_i \frac{tG_i^2}{G_i - tH_i} \sim \frac{t(\sum G_i)^2}{\sum G_i - t\sum H_i}. \tag{XX}$$

Über die Güte dieser Approximation lässt sich generell kaum etwas aussagen. Setzen wir $t\frac{H_i}{G_i} = \varepsilon_i$, also $tH_i = G_i\,\varepsilon_i$, so folgt bezüglich der linken Seite von XX

$$\sum \frac{tG_i^2}{G_i - tH_i} = \sum \frac{tG_i}{1-\varepsilon_i} =$$
$$= t(\sum G_i + \sum G_i \varepsilon_i + \sum G_i \varepsilon_i^2 + \sum G_i \varepsilon_i^3 + \ldots),$$

und für die rechte Seite ergibt sich

$$\frac{t(\sum G_i)^2}{\sum G_i - t\sum H_i} = t\sum G_i\left(1 - \frac{\sum G_i\,\varepsilon_i}{\sum G_i}\right)^{-1} =$$
$$= t\left(\sum G_i + \sum G_i \varepsilon_i + \frac{(\sum G_i\,\varepsilon_i)^2}{\sum G_i} + \frac{(\sum G_i\,\varepsilon_i)^3}{(\sum G_i)^2} + \ldots\right).$$

Die beiden Reihen unterscheiden sich erst vom dritten Glied an, und die Annahme scheint darum berechtigt, dass XX eine gute Approximation darstellt. In dieser allgemeinen Form wäre der Schluss jedoch voreilig. Vor allem ist klar, dass für $G_i = G =$ konstant, und $H_i = H =$ konstant, die Approximation XX zur Identität wird, denn man hat dann, wenn N die Zahl der Versicherungen ist,

$$N\frac{tG^2}{G - tH} = \frac{tN^2G^2}{NG - tNH}.$$

Im übrigen aber ist es leicht, für G_i und H_i Werte zu finden, welche eine schlechte Approximation ergeben. Die Frage ist darum dahingehend zu präzisieren, wie sich die Approximation stellt, wenn für G_i und H_i Werte im Rahmen der praktischen Versicherungsrechnung eingesetzt werden. Auf Basis der Grundlagen S. M. 39/44 zu 2½% z. B. ergeben sich für gemischte Versicherung

bei $x = 10,\ n = 10 : G = 87{,}97\ ^0/_{00},\ H = 1{,}0583\ ^0/_{00}$,

bei $x = 10,\ n = 55 : G = \ \ 9{,}82\ ^0/_{00},\ H = 0{,}0821\ ^0/_{00}$.

Wenn wir daher die beiden Wertepaare

$$G_1 = 90\ {}^0/_{00},\quad H_1 = 0{,}9\ {}^0/_{00},\qquad \text{bei } n = 10,$$
$$G_2 = 10\ {}^0/_{00},\quad H_2 = 0{,}0818\ {}^0/_{00},\ \text{bei } n = 55,$$

in Betracht ziehen, so haben wir für gemischte Versicherung bei unserer Zoneneinteilung die praktisch möglichen Extrema. Nun ist z. B. für $t = 8$

$$\frac{8G_1^2}{G_1 - 8H_1} + \frac{8G_2^2}{G_2 - 8H_2} = 868{,}21\ {}^0/_{00},$$

$$\frac{8(G_1 + G_2)^2}{(G_1 + G_2) - 8(H_1 + H_2)} = 868{,}19\ {}^0/_{00},$$

also eine an Präzision grenzende Übereinstimmung.

Man kann auch auf anderem Wege versuchen, die Grenzen für die Approximation XX abzustecken. Wenn wir auf der rechten Seite der Approximation $\sum G_i = \overline{G}$ und $\sum H_i = \overline{H}$ setzen, so haben wir

$$\sum \frac{tG_i^2}{G_i - tH_i} \sim \frac{t\overline{G}^2}{\overline{G} - t\overline{H}},$$

d. h. eine Summe von Hyperbeln wird hier durch eine Hyperbel approximiert. Ausgehend von der Hyperbelgleichung $({}_tV - g)(t + h) = -k^2$ fanden wir, dass unter der Bedingung ${}_0V = 0$ und ${}_nV = 1$, $g = \dfrac{n+h}{n}$ sein muss. Man verifiziert leicht $\left(\text{weil } \dfrac{h}{n+h} = F\right)$, dass $-g = \dfrac{G^2}{H}$, $-h = \dfrac{G}{H}$ und $k^2 = \dfrac{G^3}{H^2}$, so dass wir die Hyperbelgleichung auch schreiben können

$$\left({}_tV + \frac{G^2}{H}\right)\left(t - \frac{G}{H}\right) = -\frac{G^3}{H^2}. \tag{XXI}$$

Haben wir nun zwei Hyperbeln, gekennzeichnet durch G_1, H_1 und G_2, H_2, so folgt durch Addition der beiden bezüglichen Gleichungen

$$({}_tV_1 + {}_tV_2)\,t + \left(\frac{G_1^2}{H_1} + \frac{G_2^2}{H_2}\right)t - {}_tV_1\frac{G_1}{H_1} - {}_tV_2\frac{G_2}{H_2} = 0. \tag{XXII}$$

Aus der rechten Seite von XX dagegen folgt

$$ {}_tV_1 + {}_tV_2 = \frac{t(G_1 + G_2)^2}{(G_1 + G_2) - t(H_1 + H_2)}, $$

oder

$$ ({}_tV_1 + {}_tV_2)\,t + \frac{(G_1 + G_2)^2}{H_1 + H_2}\,t - {}_tV_1 \frac{G_1 + G_2}{H_1 + H_2} - {}_tV_2 \frac{G_1 + G_2}{H_1 + H_2} = 0\,. $$

Nun sieht man, dass letztere Gleichung mit XXII identisch wird, wenn

$$ \frac{G_1}{H_1} = \frac{G_2}{H_2} = \frac{G_1 + G_2}{H_1 + H_2}. $$

In Fortsetzung des Gedankenganges (Schluss von n auf $n+1$) ergibt sich, dass die Voraussetzung für gute Resultate der Approximation XX in der Bedingung liegt

$$ \frac{G_i}{H_i} \sim \frac{\sum G_i}{\sum H_i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots N. \qquad \text{(XXIII)} $$

Das heisst: die Streuung der Quotienten $\frac{G_i}{H_i}$ um den Mittelwert $\frac{\sum G_i}{\sum H_i}$ ist massgeblich, wobei die empirische Feststellung ergeben hat, dass eine Variationsbreite von $\pm 30\%$ noch sehr gute Resultate gewährleistet. Es dürfte sehr interessant sein, gerade diese Frage des Verlaufs der Fehler der Approximation in Abhängigkeit von Grösse und Verteilung der Quotienten $\frac{G_i}{H_i}$ noch genauer zu untersuchen.

Die Bedingung XXIII wäre auch direkt aus XX zu folgern. Denn es ist klar, dass XX nicht nur zur Identität wird, wenn $G_i = G =$ konstant und $H_i = H =$ konstant, sondern es genügt, dass $\frac{G_i}{H_i} =$ konstant. In diesem Falle ist $G_i = Gk_i$, $H_i = Hk_i$, also

$$ \frac{G_i}{H_i} = \frac{G}{H} = \text{konstant und } \frac{\sum G_i}{\sum H_i} = \frac{G \sum k_i}{H \sum k_i} = \frac{G}{H} = \text{konstant.} $$

Um den Einfluss der Variation von G_i und H_i auf die Güte von XX zu studieren, genügt es also, für G_i einen festen Wert anzusetzen und H_i allein zu variieren, d. h. den Einfluss der Änderung von H_i in $\frac{G}{H_i}$

zu betrachten. Auf Basis der Grundlagen S. M. 39/44 à $2\frac{1}{2}$ % haben wir z. B. für gemischte Versicherung

$$x = 35, \quad n = 15 : G = 54{,}33\ ^0/_{00}, \quad H = 0{,}6704\ ^0/_{00}, \quad \frac{G}{H} = 81{,}04,$$

$$x = 35, \quad n = 20 : G = 38{,}34\ ^0/_{00}, \quad H = 0{,}4471\ ^0/_{00}, \quad \frac{G}{H} = 85{,}75,$$

$$x = 35, \quad n = 25 : G = 29{,}08\ ^0/_{00}, \quad H = 0{,}3175\ ^0/_{00}, \quad \frac{G}{H} = 91{,}59.$$

Der mittlere Wert von $\frac{G_i}{H_i}$ in einem Portefeuille dürfte also in der Nähe von 85 liegen. Einem $H = 0{,}5\ ^0/_{00}$ entspricht dann ein $G = 42{,}5\ ^0/_{00}$. Setzen wir letzteren Wert als fest an, so können wir eine Tabelle folgender Art anlegen:

$G = 42{,}5\ ^0/_{00}$			${}_tV_i = tG_i^2/(G_i - tH_i)$	
i	G/H_i	H_i	$t = 10$	$t = 15$
		$^0/_{00}$	$^0/_{00}$	$^0/_{00}$
1	60	0,7083	510,—	850,—
2	65	0,6588	502,97	830,64
3	70	0,6072	495,80	811,36
4	75	0,5667	490,39	796,89
5	80	0,5313	485,72	784,63
6	85	0,5	481,67	774,11
7	90	0,4722	478,12	764,99
8	95	0,4473	474,99	757,01
9	100	0,425	472,22	750,—
10	105	0,4048	469,74	743,76
11	110	0,3863	467,49	738,14

Nunmehr kann man die Güte der Approximation

$$\sum f(i)\ {}_tV_i \sim \frac{t\left(G \sum f(i)\right)^2}{G \sum f(i) - t \sum f(i)\, H_i}$$

untersuchen, indem man für $f(i)$ verschiedene Verteilungen einsetzt.

Im folgenden sind nachgenannte Verteilungen in Betracht gezogen:

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum f(i)$
$f(i)$	a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11
	b	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	6
	c	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	6
	d	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36
	e	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	66
	f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	66
	g	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	41

Die numerischen Resultate sind die folgenden, wobei

$$A = \sum f(i)\, {}_tV_i, \quad B = \frac{t\left(G \sum f(i)\right)^2}{G \sum f(i) - t \sum f(i)\, H_i}.$$

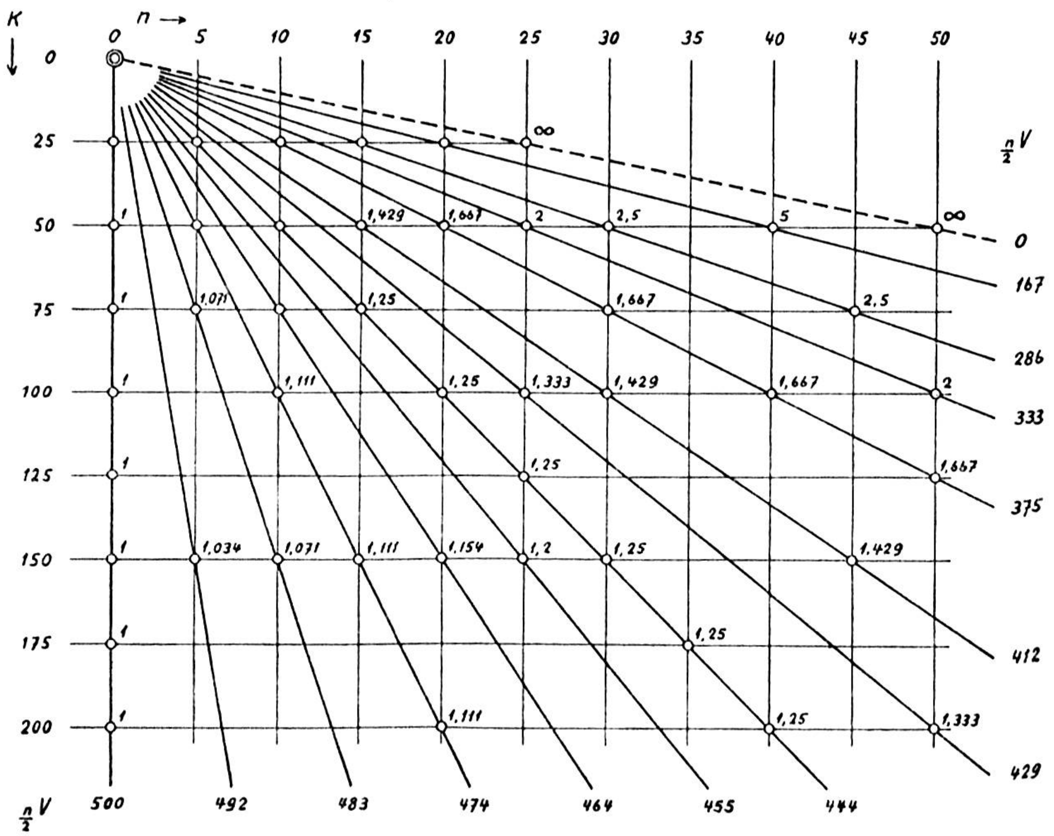
$f(i)$	$t = 10$			$t = 15$		
	A	B	A/B	A	B	A/B
a	5329,11	5325,17	1,0007	8601,53	8584,71	1,0020
b	2966,55	2965,18	1,0005	4847,63	4842,60	1,0010
c	2844,23	2843,94	1,0001	4528,01	4526,82	1,0003
d	17397,71	17390,48	1,0004	28032,38	27998,48	1,0012
e	32429,27	32407,76	1,0007	52799,48	52705,75	1,0018
f	31520,05	31507,00	1,0004	50418,88	50364,03	1,0011
g	19906,06	19885,87	1,0010	32181,33	32095,15	1,0027

Die Sachlage lässt sich jetzt ganz gut überblicken. Wie bereits erwähnt, ist die Güte der Approximation XX davon abhängig, inwieweit die Bedingung XXIII erfüllt ist. Nennen wir den Quotienten $\frac{G_i}{H_i} = K_i$, und es sei $F(K)$ die Verteilung von K_i. Es ist dann die Approximation um so besser

1. bei gegebener Variationsbreite, je stärker sich die Verteilung um ein bestimmtes K_i zusammendrängt und je grösser dieses K_i ist,
2. bei gegebener Gestalt der Verteilung, je kleiner die Variationsbreite ist,
3. bei gegebenener Gestalt und Variationsbreite der Verteilung, je weiter das kleinste K_i von 0 entfernt ist.

Die nachstehende graphische Tabelle, welche F_i in Funktion von K_i und n_i darstellt $\left(\text{es ist } F_i = \dfrac{K_i}{K_i - n_i}\right)$, gibt eine gute Handhabe zur Beurteilung der Frage. Auf gleicher Zeile liegen alle Versicherungen mit K_i = konstant (d. h. wenn alle Versicherungen eines Portefeuilles sich auf eine Zeile konzentrieren würden, entstände in Anwendung von XX kein Fehler). In gleicher Kolonne stehen die Versicherungen gleicher Dauer. Auf gleichem Strahl von 0 aus liegen die Versicherungen mit F_i = konstant, also mit gleichem Reservesatz für $t = \frac{n}{2}$. Die Versicherungen eines Portefeuilles liegen demnach in einem horizontalen Streifen der Tabelle, dessen Projektion auf eine Vertikale die Verteilung $F(K)$ ergibt.

Für K_i = konstant variiert F_i innerhalb praktisch vorkommender Versicherungsdauern um so weniger, je grösser K_i ist. Daraus folgt ohne weiteres, dass bei gegebener Anzahl und Verteilung der K_i-Werte eine Verschiebung einzelner derselben von 0 weg auf das Resultat von XX von weit geringerem Einfluss ist als eine Verschiebung in Richtung gegen 0, insbesondere wenn dadurch die eine Grenze des Variationsstreifens in die Nähe des die Approximation gefährdenden Strahles $F_i = \infty$, (d. h. ${}_{n/2}V_i = 0$) kommt.



Anhang

Zoneneinteilung der Versicherungsdauer (n) bzw. Prämienzahlungsdauer (m) bei Endalter über 65 Jahre

Endalter $x + n$ oder $x + m$	Bis inkl. Eintrittsalter	Unterteilung beim Alter	Eintrittsalter von bis	Unterteilung beim Alter	Eintrittsalter von bis	Unterteilung beim Alter
66	35	46				
67	36	47				
68	37	48				
69	38	49				
70	39	50				
71	40	51				
72	41	52				
73	42	53				
74	43	54				
75	44	55				
76	25	36 56 70	26–45	56 70	46–59	70
77	26	37 57 71	27–46	57 71	47–60	71
78	27	38 58 72	28–47	58 72	48–61	72
79	28	39 59 73	29–48	59 73	49–62	73
80	29	40 60 74	30–49	60 74	50–63	74
81	30	41 61 75	31–50	61 75	51–64	75
82	31	42 62 76	32–51	62 76	52–65	76
83	32	43 63 77	33–52	63 77	53–66	77
84	33	44 64 78	34–53	64 78	54–67	78
85	34	45 65 79	35–54	65 79	55–68	79