

Über ein versicherungsmathematisches Problem mit zwei charakteristischen Dauern

Autor(en): **Nagler, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **50 (1950)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966870>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über ein versicherungsmathematisches Problem mit zwei charakteristischen Dauern

Von *H. Nagler*, London

In dieser Arbeit setzen wir die Untersuchung von Problemen mit charakteristischer Dauer fort, die wir an anderem Orte ¹⁾ begonnen haben. Die charakteristische Dauer (auf Englisch «critical duration») wurde dort als derjenige Zeitabschnitt definiert, nach dessen Ablauf sich der Todesfallanspruch einer Versicherung aus einer anderen Regel als zuvor ergibt und der selbst von der Prämie abhängig ist. Hier soll ein gewisses Problem, in dem zwei charakteristische Dauern vorkommen, eingehend behandelt werden.

1. Das Problem

Es sei die jährliche Nettoprämie zu berechnen, die ein Versicherter des Alters x während t Jahren für die folgenden Ansprüche zahlen muss:

- a) Im Todesfalle vor Erreichung des Alters $x + t = y$ entweder 1 oder die Rückerstattung sämtlicher bereits gezahlter Prämien, falls deren Summe 1 übersteigt.
- b) Im Überlebensfalle des Alters y , eine jährlich im voraus zahlbare Rente im Betrage k ;
- c) Im Todesfalle nach Erreichung des Alters y den etwaigen Überschuss der gesamten Prämienzahlung über die geleisteten Rentenbeträge.

Der Todesfallanspruch sei in jedem Fall am Ende des Versicherungsjahres zahlbar, in dem der Tod stattfindet.

¹⁾ «On the determination of the critical duration in certain actuarial problems»; Journal of the Institute of Actuaries' Students Society, IX, 3 (1950).

2. Einleitung

Es sei m die Anzahl der Jahre, in denen die Todesfallsumme 1 ist, n die Anzahl Jahre, in denen der unter c) angeführte Versicherungsanspruch zahlbar ist, und P die gesuchte Prämie. Dann ist

$$\begin{aligned} P(N_x - N_y) &= M_x - M_{x+m} + P\{(m+1)C_{x+m} + \dots + tC_{y-1}\} \\ &+ kN_y \\ &+ (Pt - k)C_y + \dots + (Pt - nk)C_{y+n-1} \end{aligned} \quad (1)$$

oder

$$P = \frac{H - M_{x+m} + k(R_{y+n} + nM_{y+n})}{G - mM_{x+m} - R_{x+m} + tM_{y+n}}, \quad (2)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} G &= N_x - N_y + R_y \\ H &= M_x + k(N_y - R_y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gesetzt wird. Die beiden charakteristischen Dauern sind m und n ; beide müssen bestimmt werden, bevor sich P berechnen lässt. Offenbar befriedigen m und n die Ungleichungen

$$mP \leq 1 < (m+1)P, \quad (4)$$

$$nk \leq tP < (n+1)k. \quad (5)$$

Aus (4) folgt zunächst $P > 0$, dann $m+1 > 0$ oder, da m ganzzahlig ist, $m \geq 0$. Ebenso folgt aus (5), dass $n \geq 0$. Dies ist nicht erstaunlich; jedoch zeigt sich später, dass die ebenfalls zu erwartende Beziehung $m \leq t$ durchaus nicht bedingungslos gilt.

Durch Eliminierung von P aus (2) und (4) und nach einiger Umstellung der Glieder folgt

$$\begin{aligned} m\{H + k(R_{y+n} + nM_{y+n})\} + R_{x+m} &\leq G + tM_{y+n} \\ &< (m+1)\{H + k(R_{y+n} + nM_{y+n})\} + R_{x+m+1}; \end{aligned} \quad (6)$$

ähnlich ergibt sich aus (2) und (5)

$$\begin{aligned} n(G - mM_{x+m} - R_{x+m}) - tR_{y+n} &\leq \frac{t}{k}(H - M_{x+m}) \\ &< (n+1)(G - mM_{x+m} - R_{x+m}) - tR_{y+n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Existenz einer eindeutigen Lösung

Man stelle sich nun vor, dass die ganzen Zahlen m und n , welche den obigen Bedingungen genügen, durch stetige Veränderliche u und v ersetzt werden, welche als Koordinaten eines Punktes in einem ebenen Cartesischen Koordinatensystem auftreten. Setzt man in (4) und (5) für P den Ausdruck (2) ein und setzt in den so entstandenen Ungleichungen $m = u$, $n = v$, dann ist es klar, dass die Zahlenpaare (u, v) , die diesen Ungleichungen genügen, durch die Koordinaten aller Punkte gegeben sind, welche in dem durch die vier Kurven

$$\begin{aligned} uP &= 1, & (u+1)P &= 1, \\ vk &= tP, & (v+1)k &= tP \end{aligned}$$

eingeschlossenen Teil der (u, v) Ebene liegen. Die Existenz einer eindeutigen Lösung des Problems folgt dann aus dem zu erbringenden Beweis, dass es unter den Punkten dieses Bereiches genau einen mit ganzzahligen positiven Koordinaten gibt. Da der positive Charakter der Koordinaten eines solchen Punktes bereits erwiesen ist, beschränkt sich die folgende Erörterung auf Punkte mit positiven Koordinaten.

Betrachtet man zunächst die Kurve $uP = 1$, so sieht man, dass man ihre Gleichung erhält, indem man die ersten beiden Seiten der Ungleichung (6) einander gleichsetzt und u statt m , v statt n schreibt. Ihre Gleichung ist

$$u \{H + k(R_{y+v} + vM_{y+v})\} + R_{x+u} = G + tM_{y+v}. \quad (8)$$

Für festes v genügt ihr genau ein Wert von u ; anders gesagt, eine der u -Achse parallele Gerade schneidet die Kurve in genau einem Punkt. Zum Beweis bilde man die erste Differenz der linken Seite von (8) nach u . Sie ist

$$\begin{aligned} H + k(R_{y+v} + vM_{y+v}) - M_{x+u} &\geq M_x + k(R_{y+v} + vM_{y+v}) - M_{x+u} \\ &\geq k(R_{y+v} + vM_{y+v}), \end{aligned}$$

da $u \geq 0$ und $v \geq 0$. Die linke Seite von (8) wächst daher unbeschränkt mit zunehmendem u . Bei $u = 0$ ist aber die linke Seite kleiner als die rechte, denn

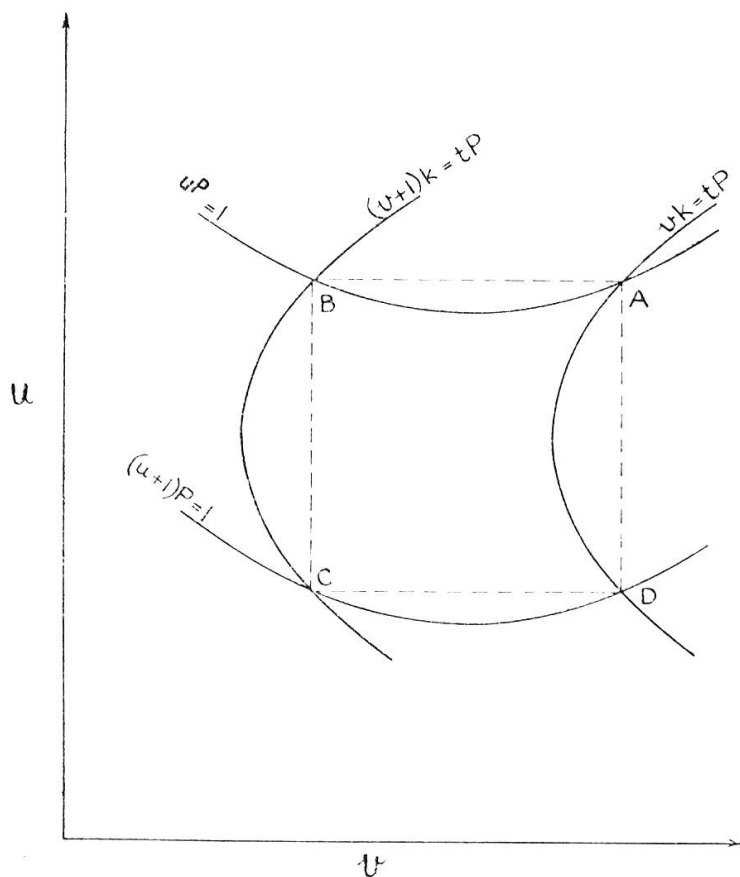
$$G + tM_{y+v} - R_x \geq G - R_x = N_x - R_x - (N_y - R_y) = d(S_x - S_y) > 0.$$

Da die rechte Seite von u unabhängig ist, ist bewiesen, dass Gleichung (8) genau eine positive Lösung u besitzt.

Man betrachte als nächstes die Kurve $(u + 1)P = 1$. Ähnlich wie oben erhält man ihre Gleichung, indem man das zweite und dritte Glied der Ungleichung (6) einander gleich setzt und u statt m , v statt n schreibt. Auf diese Weise erhält man aber eine Gleichung, die sich von (8) lediglich dadurch unterscheidet, dass sie $u + 1$ hat, wo bei (8) u steht. Dies bedeutet, dass eine der u -Achse parallele Gerade, welche die Kurve $uP = 1$ im Punkte (u, v) schneidet, die Kurve $(u + 1)P = 1$ im Punkte $(u - 1, v)$ schneidet; somit zeigt sich, dass die beiden Kurven mit dem Abstand 1 zueinander parallel verlaufen, wobei der Abstand parallel der u -Achse zu messen ist; die Kurve $uP = 1$ liegt oberhalb der anderen.

Ebenso lässt sich beweisen, dass eine der v -Achse parallele Gerade die Kurve $vk = tP$ genau einmal schneidet und dass dieselbe Gerade dann die Kurve $(v + 1)k = tP$ im Abstand 1, parallel der v -Achse und in negativer Richtung gemessen, schneidet.

Die vier Kurven bilden also ein Kurvenviereck, welches in beigegebener Figur schematisch dargestellt ist; seine vier Eckpunkte, A, B, C, D bilden zugleich die Eckpunkte eines Quadrats, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind. Bezeichnet man die Koordinaten



des Schnittpunktes A der Kurven $uP = 1$ und $vk = tP$ mit (m_1, n_1) , so sind die Koordinaten der Punkte B, C, D durch

$$\begin{aligned} & (m_1, n_1 - 1), \\ & (m_1 - 1, n_1 - 1), \\ & (m_1 - 1, n_1) \end{aligned}$$

gegeben.

Es wird zunächst gezeigt, dass genau ein solcher Schnittpunkt (m_1, n_1) der Kurven $uP = 1$ und $vk = tP$ existiert. Für diesen Punkt gilt die Beziehung $v = t/ku$, die aus der Eliminierung von P

aus den beiden Kurvengleichungen folgt; setzt man diesen Ausdruck für v in die Gleichung $uP = 1$ ein, so ergibt sich die Gleichung

$$u(kR_{y+t/ku} + H) + R_{x+u} = G. \quad (9)$$

Ähnlich wie zuvor schliesst man, dass bei $u = 0$ die linke Seite kleiner als die rechte ist; dass die linke Seite bei wachsendem u unbeschränkt wächst, da nämlich ihre erste Differenz nach u

$$\begin{aligned} kR_{y+t/k(u+1)} - kuR_{y+t/ku} + H - M_{x+u} &\geq H - M_{x+u} \\ &\geq H - M_x = k(N_y - R_y) = kdS_y \end{aligned}$$

ist; dass die rechte Seite von u unabhängig ist und dass demzufolge genau eine positive Wurzel der Gleichung (9) besteht. Bezeichnet man diese mit $u = m_1$, so ist $n_1 = t/km_1$.

Die von den vier Kurven $uP = 1$, $(u+1)P = 1$, $vk = tP$, $vk = (t+1)P$ eingeschlossene Fläche ist also in der Tat ein Kurvenviereck mit paarweise parallelen und je im Abstand 1 voneinander verlaufenden Seiten.

Der Beweis, dass in einem solchen Viereck genau ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten liegt, könnte ohne weiteres durch eine der Theorie der Gitter entlehnte Betrachtungsweise erbracht werden; hier aber wird ein elementarerer Weg beschritten, der zugleich ein später zu verwendendes Ergebnis liefert.

Es bedarf keines Beweises, dass das Quadrat $ABCD A$ genau einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthält. Ist dieser (m_0, n_0) , so sind offenbar m_0 und n_0 die grössten in m_1 und n_1 enthaltenen ganzen Zahlen. Ebenso leicht ist ersichtlich, dass das Kurvenviereck $ABCD A$ nicht mehr als einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthalten kann; denn, wie bereits bewiesen, haben seine paarweise parallelen Seiten voneinander den längs der Richtung der Koordinatenachsen gemessenen Abstand 1.

Nun liegt (m_0, n_0) entweder im Kurvenviereck $ABCD A$, in welchem Fall $m = m_0$, $n = n_0$, oder aber in einer der vier segmentförmigen Flächen, die wie etwa ABA in der Figur ausserhalb dieses Vierecks liegen. Es liege etwa (m_0, n_0) in dem Segment ABA . Dieses sowie das ihm kongruente Segment DCD liegen aber sämtlich zwischen den beiden Geraden AD und BC ; denn anderenfalls schnitte eine dieser beiden Geraden die Kurve $uP = 1$ in mehr als einem

Punkte, was dem oben bewiesenen widerspricht. Es gilt also $n = n_0$, $m = m_0 - r$, wo r ganzzahlig ist; denn da die Kurven AB und CD im Abstand 1 voneinander verlaufen, können nicht alle Punkte $(m_0 - r, n_0)$ ausserhalb des Kurvenvierecks $ABCD A$ fallen.

Läge (m_0, n_0) innerhalb des Segmentes ADA , so würde eine ähnliche Betrachtungsweise zu einem ähnlichen Resultat führen. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass es innerhalb des Kurvenvierecks $ABCD A$ immer genau einen Punkt (m, n) mit ganzzahligen Koordinaten gibt und dass sich dieser in höchstens einer Koordinate vom Punkte (m_0, n_0) unterscheidet. m_0 und n_0 sind die in m_1 und n_1 enthaltenen ganzen Zahlen, welche sich aus Gleichung (9) und $m_1 n_1 = kt$ berechnen. Damit ist also nicht nur der Beweis des Bestehens einer eindeutigen Lösung erbracht, sondern auch eine Handhabe zu ihrer Berechnung gegeben, die unten weiter erläutert werden soll.

4. Eine Bedingung für k

Die oben angegebene Lösung ist nur dann von praktischer Bedeutung, wenn die Änderung des Versicherungsanspruchs $a)$ nicht nach Ablauf der ersten t Versicherungsjahre stattfindet. Es muss also eine Bedingung gesucht werden, die $m \leq t$ sicherstellt. Es wird zuerst gezeigt, dass

$$m \leq m_1. \quad (10)$$

Im vorhergehenden Abschnitt wurde bewiesen, dass entweder $m = m_0$, oder falls $m \neq m_0$, dann $n = n_0$. Ist $m = m_0$, so folgt (10) daraus, dass $m_0 \leq m_1$ ist. Ist hingegen $n = n_0$, so folgt aus $n_0 \leq n_1 = t/km_1$, dass $n_0 \leq t/km_1$ oder $t/kn_0 \leq m_1$. Andererseits folgt aus (4) und (5) unter Berücksichtigung des positiven Charakters der Zahlen m und n , dass

$$mn \leq \frac{t}{k} < (m + 1)(n + 1) \quad (11)$$

und daher $m \leq t/kn_0$. Also ist in jedem Falle $m \leq m_1$.

Daraus folgt, dass, wenn nur $m_1 < t + 1$, dann $m \leq t$, da m ganzzahlig ist. Da aber, wie bereits bewiesen, die linke Seite von (9) mit u ständig wächst, ist also nur zu verlangen, dass sie bei $u = t + 1$ grösser als die rechte Seite sei. Die Bedingung hierfür lässt sich schreiben

$$(t + 1)(kR_{y+t/(t+1)k} + H) + R_{y+1} > G. \quad (12)$$

Das praktische Beispiel, welches im 6. Abschnitt folgt, erhellt die Tatsache, die sich durch Anwendung bereits benutzter Gedankengänge unschwer beweisen lässt, dass diese Bedingung von allen Werten von k erfüllt wird, die nur ein gewisses Mindestmass überschreiten.

5. Berechnung der Lösung

Der Wert von (m_0, n_0) sei bekannt; dann ist mindestens eine der Gleichungen $m = m_0, n = n_0$ erfüllt. Die praktische Lösung besteht dann daraus, zu prüfen, welche dieser Hypothesen wahr ist. Die Hypothese $m = m_0$ ist beispielsweise wahr, wenn eine positive ganze Zahl n existiert, so dass mit diesen Werten (6) und (7) erfüllt sind. Statt (6) kann man auch die einfachere Ungleichung (11) nehmen. Die Prüfung der Hypothese $m = m_0$ geschieht praktisch so, dass man den grössten Wert von n findet, welcher der Ungleichung

$$n \frac{G - m M_{x+m} - R_{x+m}}{t} - \frac{H - M_{x+m}}{k} \leq R_{y+n} \quad (13)$$

für festes $m = m_0$ genügt. Diese Ungleichung ist lediglich (7) in anderer Form, um die praktische Lösung mit Hilfe einer Rechenmaschine möglichst einfach zu gestalten²⁾. Genügt nun der so gefundene Wert von n auch der Ungleichung (11) bei festem $m = m_0$, so ist die Hypothese $m = m_0$ bewiesen, und n hat jenen genannten Wert. Dann lässt sich P unmittelbar in der Form

$$P = \left(\frac{k}{t} \right) \frac{\frac{H - M_{x+m}}{k} + R_{y+n} + n M_{y+n}}{\frac{G - m M_{x+m} - R_{x+m}}{t} + M_{y+n}}$$

errechnen, in der die in (13) vorkommenden Zahlenwerte in bestehender Form verwendet werden.

Ist hingegen (11) nicht erfüllt, so muss $n = n_0$ notwendigerweise gelten; und m kann dann ähnlich wie oben n errechnet werden. Man findet auch hier, dass die dazu verwendete Ungleichung die Zahlenwerte zur unmittelbaren Einsetzung in die Formel für P liefert.

²⁾ Siehe des Verfassers eingangs genannte Arbeit unter Fussnote 1.

6. Zahlenbeispiel

Mit den Rechnungsgrundlagen H^M 3% und $x = 40$, $y = 60$ soll

- I. bestimmt werden, welche Werte von k zulässig sind,
- II. P berechnet werden, unter der Annahme, dass $k = 0,2$.

I. In der Bedingung (11) für k werden für G und H die Ausdrücke aus (3) eingesetzt, und es werde ferner

$$\frac{t}{(t+1)k} = l$$

gesetzt. Nach einigen Umstellungen folgt daraus

$$\frac{N_x - m(t+1)M_x - N_y + M_y}{t} l - (N_y - R_y) < R_{y+l},$$

oder $5191,6l - 28057 < R_{60+l}.$

Die linke Seite dieser Ungleichung wächst beständig bei wachsendem l , während gleichzeitig die rechte Seite abnimmt; daher wird die Ungleichung von allen Werten von l befriedigt, die kleiner als die Wurzel der Gleichung $5191,6l - 28057 = R_{60+l}$

sind. Zur Bestimmung dieser Wurzel konstruiere man folgende Tabelle:

l	R_{60+l}	$5191,6l - 28057$	$R_{60+l} - 5191,6l + 28057$	1	1^2	1^3
9	34197	18667	15530			
10	30169	23859	6310	- 9220		
11	26442	29051	1850,5	- 8919	301	
			- 2609		300	- 2
12	23031	34242	- 11229	- 8620	299	

Setzt man für die Wurzel $l = 10,5 + z$

so ergibt sich aus der Newton-Besselschen Interpolationsformel angenähert

$$1850,5 - 8919z + 300 \frac{z^2 - \frac{1}{4}}{2} = 0,$$

und somit $z = -0,203.$

Also ist $l < 10,500 - 0,203 = 10,297$ und damit

$$k > \frac{20}{21 \cdot 10,297} = 0,092.$$

Daher sind sicher alle Werte von k zulässig, für welche

$$k \geq 0,093 \quad \text{ist.}$$

II. Bei $k = 0,2$, welches laut obigem zulässig ist, wird $G = 430404$ und $H = 17480,8$. Gleichung (9) wird

$$u(0,2 R_{60+100/u} + 17480,8) + R_{40+u} = 430404.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist bei $u = 11$ gleich 423563 und bei $u = 12$ gleich 446891. Hier genügt einfache lineare umgekehrte Interpolation; es ergibt sich $m_1 = 11,3$, daher $n_1 = 100/11,3 = 8,8$, und somit

$$m_0 = 11, \quad n_0 = 8.$$

In diesem Falle zeigt sich ohne weiteres, dass $m = 11$ sein muss; anderenfalls wäre nämlich $n = 8$ und, laut (10), $m \leq 10$. Aber bei $n = 8$ und $m \leq 10$ ist $(m+1)(n+1) \leq 99 < t/k = 100$, im Widerspruch mit (11). Also ist $m = 11$ erwiesen.

Ungleichung (13) wird hier

$$8638n - 41624 \leq R_{60+n};$$

der grösste ihr genügende Wert ist $n = 8$. Also ist

$$m = 11, \quad n = 8,$$

und daher

$$P = 0,08852.$$

7. Bruttoprämien

Die vorhergehenden Untersuchungen wären lediglich von theoretischem Interesse, liessen sie sich nicht auf die Praxis ausdehnen, in der die Nettoprämie einen Zuschlag erfährt. Es sei P' die Bruttoprämie und $P' - P$ der Zuschlag, um Abschlusskosten e und einen Teil rP' jeder Bruttoprämienzahlung zu decken. Dann ist

$$(P' - P) a_{x|\bar{t}} = e + rP' a_{x|\bar{t}}$$

oder

$$P(N_x - N_y) = (1 - r) P' (N_x - N_y) - eD_x.$$

Dieser Ausdruck ersetzt die linke Seite der Gleichung (1), während in der rechten P durchgehend durch P' zu ersetzen ist. Es folgt, dass

$$P' = \frac{H' - M_{x+m} + k(R_{y+n} + nM_{y+n})}{G' - mM_{x+m} - R_{x+m} + tM_{y+n}}, \quad (14)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} G' &= G - r(N_x - N_y) \\ H' &= H + eD_x \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

gesetzt wird. Es ist zu bemerken, dass

$$G' \leq G; \quad H' \geq H \quad (16)$$

ist. Der Beweis des Bestehens einer eindeutigen Lösung sowie ihre Berechnung erfolgen dann wie zuvor, vorausgesetzt, dass r so gewählt wird, dass $m_1 \geq 0$ gilt. Die Bedingung dafür ist $G' - R_x \geq 0$ oder

$$1 - r \geq \frac{R_x - R_y}{N_x - N_y}. \quad (17)$$

Für den Fall des oben besprochenen Zahlenbeispiels ergibt diese Bedingung $r \leq 0,452$, was in der Praxis wohl stets erfüllt sein dürfte.

In Anbetracht der Ungleichungen (16) lässt sich aus (12) leicht ersehen, dass das Auftreten eines Prämienzuschlags die Herabsetzung des mindestzulässigen Wertes von k zur Folge hat.

Anmerkung: Der Verfasser schuldet Dr. S. Vadja grossen Dank für seine Unterstützung bei der deutschen Version dieses Artikels.