Über ein Schätzungsverfahren für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals

Autor(en): **Ruch, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **50 (1950)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966867

Über ein Schätzungsverfahren für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals

Von *H. Ruch*, Basel

I. Einleitung

Das Deckungskapital spielt in der Bilanz einer Lebensversicherungsgesellschaft bekanntlich eine wichtige Rolle. Aus diesem Grunde wurden denn auch frühzeitig Verfahren zur Berechnung des Bilanzdeckungskapitals eingeführt, die ein möglichst rationelles Arbeiten bei möglichst grosser Genauigkeit erlauben. Es sei nur an die bekannten Methoden von Altenburger und Lidstone sowie an die t-Methode erinnert. In neuerer Zeit wurde das Problem erneut aufgegriffen. Insbesondere war es die t-Methode, die zu verschiedenen Aufsätzen [1]) Anlass gab. In zwei weitern Arbeiten [2]) wurde das Problem von der statistischen Seite her in Angriff genommen. Zu guter Letzt soll die Frage auch noch unter dem Thema I am kommenden XIII. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker in Amsterdam zur Sprache

[1]) Vergleiche zum Beispiel:

H. Jecklin: «Zur Praxis der Reserveberechnung nach der t-Methode», Mitteilungen VSV, Heft 1942/1.

E. Zwinggi: «Bemerkungen zur Reserveberechnung nach der t-Methode», Mitteilungen VSV, Heft 1942/2.

H. Ruch: «Eine Variation der t-Methode», Mitteilungen VSV, Heft 1948/2.

H. Jecklin: «Grundsätzliche Bemerkungen zur t-Methode», Mitteilungen VSV, Heft 1949/2.

P. Leepin: «Über die Anwendung von Mittelwerten zur Reserveberechnung», Mitteilungen VSV, Heft 1949/2.

[2]) E. Zwinggi: «Anwendung neuerer statistischer Verfahren in der Versicherungsmathematik», Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Band 1/1.

L. Ritz: «Über die Schätzung des Gewinns in der privaten Lebensversicherung», Dissertation, Basel 1950.

kommen, freilich auf dem Umweg über eine vorangehende Schätzung der nach Gewinnquellen getrennten finanziellen Ergebnisse. Dieses Thema I des Amsterdamer Kongresses hat dem Verfasser die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben. Die zu lösende Aufgabe kann wie folgt formuliert werden:

Man soll das Bilanzdeckungskapital auf Ende einer Rechnungsperiode aus einer möglichst kleinen Anzahl von bekannten Grössen mit einem möglichst kleinen Arbeitsaufwand möglichst genau berechnen.

Die Untersuchungen beziehen sich ausschliesslich auf Kapitalversicherungen auf den Todesfall (gemischte Versicherungen eingeschlossen). Es werden die folgenden Grössen als bekannt vorausgesetzt:

1. der Rechnungszinsfuss für das Bilanzdeckungskapital;
2. das Bilanzdeckungskapital zu Beginn der Rechnungsperiode;
3. das Bilanzdeckungskapital zu Beginn einiger vorhergehender Rechnungsperioden;
4. Nettoprämieneinnahme während der Rechnungsperiode oder an deren Stelle

4*a*. der Stand der Summe aller Nettoprämien zu Beginn und am Ende der Rechnungsperiode;

5. die Summe aller zufolge von Mutationen (Tod, Ablauf, Rückkauf usw) freiwerdenden oder zu ergänzenden Reserven;
6. die Summe aller Versicherungssummen zu Beginn und am Ende der Rechnungsperiode.

Die der Berechnung des Deckungskapitals zugrunde liegende Sterbetafel braucht nicht bekannt zu sein. Es ist nur notwendig, dass die Rechnungsgrundlagen innerhalb des Zeitabschnitts, aus welchem man die oben genannten Grössen entnimmt, dieselben geblieben sind.

Der weitere Gang der Untersuchung ist nun der folgende: in einem nächsten Abschnitt wird der Formelapparat auf Grund der kontinuierlichen Anschauungsweise aufgebaut. Nachher erfolgt die Entwicklung des Formelapparates für die diskontinuierliche Betrachtungsweise. In beiden Fällen ist das Ziel die Berechnung einer mittleren angenäherten rechnungsmässigen Sterbeintensität oder Sterbenswahrscheinlichkeit. Diese haben den Vorteil, dass sie den Zufallsschwankungen der effektiven Sterblichkeit sowie den Zufallsschwankungen in den Mutationen irgendwelcher Art gegenüber nahezu unempfindlich sind.

Von den aus den Erfahrungen der Vergangenheit berechneten Sterbeintensitäten resp. Sterbenswahrscheinlichkeiten kann daher mit grosser Sicherheit auf die Sterbeintensität resp. Sterbenswahrscheinlichkeit für die Rechnungsperiode geschlossen werden. Das ist von entscheidenster Bedeutung, da diese Sterbeintensität resp. Sterbenswahrscheinlichkeit, wie sich zeigen wird, die einzige Grösse in den Formeln für die näherungsweise Berechnung der Bilanzdeckungskapitalien ist, die nicht auf einfache Art aus den gegebenen Daten der Rechnungsperiode berechnet werden kann.

Ein weiterer Abschnitt ist der numerischen Überprüfung der gewonnenen Resultate an sechs verschiedenen Versicherungsbeständen der PAX, Schweizerische Lebensversicherungs-Gesellschaft, gewidmet.

II. Die kontinuierliche Betrachtungsweise

Es sei μ_x und δ Sterbeintensität und Zinsintensität der für die Reserveberechnung massgebenden Rechnungsgrundlagen. Dann ist bekanntlich der Differentialausdruck für die Deckungskapitalzunahme einer einzelnen Versicherung während der Zeit dt:

$$dV = [(\mu_x + \delta)\, V(t) + P(t) - \mu_x S(t)]\, dt. \tag{1}$$

Darin bedeutet $V(t)$ das Deckungskapital, $S(t)$ die versicherte Summe zur Zeit t und $P(t)\,dt$ die Nettoprämieneinnahme während der Zeit dt. Nun greifen wir aus dem gesamten Versicherungsbestand alle Versicherungen mit gleich grossen $V(t)$, $P(t)$ und $S(t)$, aber auch mit gleich grossen Altern $x = x_0 + t$ heraus und bilden daraus einen Teilbestand (L_x) [1]). Der Teilbestand (L_x) ist einem gewissen effektiven Storno unterworfen. Bezeichnet man mit $\bar{\mu}_x$ die effektive Sterbeintensität und mit $\bar{\alpha}_x$ die effektive Intensität der übrigen Ausscheideursachen, so genügt L_x der Gleichung

$$L_{x+dt} = L_x [1 - (\bar{\mu}_x + \bar{\alpha}_x)\, dt]. \tag{2}$$

Das Deckungskapital aller Versicherungen des Bestandes (L_x) zur Zeit t ist $L_x V(t)$ und die Zunahme dieses Deckungskapitals während der Zeit dt ist:

$$d[L_x V(t)] = L_x [(\mu_x - \bar{\mu}_x - \bar{\alpha}_x + \delta)\, V(t) + P(t) - \mu_x S(t)]\, dt. \tag{3}$$

---

[1]) Bei konsequenter Durchführung der kontinuierlichen Betrachtungsweise müsste man diesen Teilbestand (L_x) als unendlich klein betrachten.

Bezeichnet man das Deckungskapital $L_x V(t)$ mit $\mathfrak{V}^*(t)$, die Versicherungssumme $L_x S(t)$ mit $\mathfrak{S}^*(t)$, die Prämieneinnahme $\int_0^T L_x P(t)\,dt$ während der Rechnungsperiode 0 bis T mit $\mathfrak{P}^*(T)$ und die infolge Storno irgendwelcher Art während der Rechnungsperiode freiwerdende Reserve $\int_0^T (\bar{\mu}_x + \bar{\alpha}_x)\, L_x V(t)\,dt$ mit $\mathfrak{R}^*(T)$ und integriert die Gleichung (3) über die Rechnungsperiode, so erhält man:

$$\mathfrak{V}^*(T) = \mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{P}^*(T) - \mathfrak{R}^*(T) + \delta \int_0^T \mathfrak{V}^*(t)\,dt - \int_0^T \mu_x\,[\mathfrak{S}^*(t) - \mathfrak{V}^*(t)]\,dt. \tag{4}$$

Es sei nun vorausgesetzt, dass $\mathfrak{V}^*(t)$, $\mathfrak{S}^*(t)$ und $[\mathfrak{S}^*(t) - \mathfrak{V}^*(t)]$ innerhalb der Rechnungsperiode den Bedingungen der Mittelwertsätze der Integralrechnung genügen. Es folgt:

$$\int_0^T \mathfrak{V}^*(t)\,dt = \Theta_1\,\mathfrak{V}^*(0) + (T - \Theta_1)\,\mathfrak{V}^*(T), \quad \text{wo } 0 < \Theta_1 < T \text{ ist.}$$

Ebenso ist

$$\int_0^T \mu_x\,[\mathfrak{S}^*(t) - \mathfrak{V}^*(t)]\,dt = \mu_{x+\Theta_2} \int_0^T [\mathfrak{S}^*(t) - \mathfrak{V}^*(t)]\,dt$$

$$= \mu_{x+\Theta_2}\{\Theta_3\,[\mathfrak{S}^*(0) - \mathfrak{V}^*(0)] + (T - \Theta_3)\,[\mathfrak{S}^*(T) - \mathfrak{V}^*(T)]\},$$

wo wiederum $0 < \Theta_2 < T$ und $0 < \Theta_3 < T$ ist.

Der Einfachheit halber und als Annäherung wird

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \frac{T}{2}$$

angenommen. Dann erhält man aus Gleichung (4) mit $\xi = x_0 + \frac{T}{2}$ die neue Gleichung

$$\mathfrak{V}^*(T) = \mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{P}^*(T) - \mathfrak{R}^*(T) + \frac{\delta T}{2}\,[\mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{V}^*(T)]$$

$$- \frac{\mu_\xi T}{2}\,[\mathfrak{S}^*(0) - \mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{S}^*(T) - \mathfrak{V}^*(T)]. \tag{5}$$

Jetzt summieren wir über alle Bestände (L_x). Die Summation soll durch Weglassung des *-Zeichens angedeutet werden. Die zu den verschiedenen Teilbeständen gehörenden Sterbeintensitäten μ_ξ werden durch eine mittlere Sterbeintensität μ ersetzt, so dass

$$\sum \mu_\xi [\mathfrak{S}^*(0) - \mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{S}^*(T) - \mathfrak{V}^*(T)]$$
$$= \mu [\mathfrak{S}(0) - \mathfrak{V}(0) + \mathfrak{S}(T) - \mathfrak{V}(T)] \tag{6}$$

ist.

μ ist einerseits durch die rechnungsmässige Sterbetafel und anderseits durch die Bestandeszusammensetzung bestimmt. Dagegen haben Effektivstorno und insbesondere die effektive Sterblichkeit nur insofern Einfluss auf μ, als sie die Bestandeszusammensetzung ändern. Einen direkten Einfluss übt die effektive Sterblichkeit auf μ nicht aus. μ ist daher gegenüber dem effektiven Storno und insbesondere der effektiven Sterblichkeit nahezu unempfindlich. Aus diesem Grunde sei μ mit «durchschnittliche rechnungsmässige Sterbeintensität» benannt.

Die Summation der Gleichung (5) ergibt damit:

$$\mathfrak{V}(T) = \mathfrak{V}(0) + \mathfrak{P}(T) - \mathfrak{R}(T) + \frac{(\mu+\delta)\,T}{2} [\mathfrak{V}(0) + \mathfrak{V}(T)]$$
$$- \frac{\mu T}{2} [\mathfrak{S}(0) + \mathfrak{S}(T)], \tag{7}$$

oder nach $\mathfrak{V}(T)$ aufgelöst:

$$\left[1 - \frac{(\mu+\delta)T}{2}\right] \mathfrak{V}(T) = \left[1 + \frac{(\mu+\delta)T}{2}\right] \mathfrak{V}(0) + \mathfrak{P}(T) - \mathfrak{R}(T)$$
$$- \frac{\mu T}{2} [\mathfrak{S}(0) + \mathfrak{S}(T)]. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) nach μ aufgelöst, gibt:

$$\mu = \frac{\delta [\mathfrak{V}(0) + \mathfrak{V}(T)] + \frac{2}{T} [\mathfrak{V}(0) - \mathfrak{V}(T) + \mathfrak{P}(T) - \mathfrak{R}(T)]}{\mathfrak{S}(0) - \mathfrak{V}(0) + \mathfrak{S}(T) - \mathfrak{V}(T)}. \tag{9}$$

Die Gleichung (9) dient dazu, für eine Reihe von vorangehenden Rechnungsperioden eine Reihe von μ zu berechnen. Mit Hilfe eines noch zu besprechenden Extrapolationsverfahrens wird sodann aus dieser μ-Reihe das μ für die gerade in Frage stehende Rechnungsperiode berechnet. Schliesslich gestattet die Gleichung (8), nachdem nun μ bekannt ist, die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals $\mathfrak{V}(T)$.

Die mittlere rechnungsmässige Sterbeintensität μ weist, wie gesagt, nur geringfügige Zufallsschwankungen auf, deren Grenzen anhand der numerischen Werte ziemlich gut abgeschätzt werden können. Es sei $\Delta\mu$ der Fehler, der dem extrapolierten μ anhaftet. Dann ist der Fehler im Bilanzdeckungskapital durch

$$\Delta\mathfrak{V} = -\frac{T}{2}\left[\mathfrak{S}(0) - \mathfrak{V}(0) + \mathfrak{S}(T) - \mathfrak{V}(T)\right]\Delta\mu \qquad (10)$$

gegeben.

III. Die diskontinuierliche Betrachtungsweise

Es sei q_x und i Sterbenswahrscheinlichkeit und Zinsfuss der für die Reserveberechnung massgebenden Rechnungsgrundlagen. Ferner sei $V(\pm\frac{1}{2})$ und $V(1\pm\frac{1}{2})$ das Deckungskapital einer Versicherung zur Zeit $t = \pm\frac{1}{2}$ resp. $t = 1\pm\frac{1}{2}$. P sei die zugehörige Nettoprämie und S die Versicherungssumme dieser Versicherung [1]). Es ist dann bekanntlich:

$$V(1\pm\tfrac{1}{2}) = \frac{1+i}{p_{x\pm 1/2}}\left[V(\pm\tfrac{1}{2}) + P\right] - \frac{q_{x\pm 1/2}}{p_{x\pm 1/2}}S. \qquad (11)$$

Die Bilanzdeckungskapitalien einer Versicherung ohne Prämienübertrag zur Zeit $t = 0$ resp. $t = 1$ werden gewöhnlich mit

$$V(0) = \tfrac{1}{2}\left[V(-\tfrac{1}{2}) + V(+\tfrac{1}{2})\right] \text{ resp. } V(1) = \tfrac{1}{2}\left[V(+\tfrac{1}{2}) + V(+\tfrac{3}{2})\right]$$

angegeben. Mit guter Annäherung kann die Gleichung (11) auch für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals zur Zeit $t = 1$ verwendet werden. Setzt man nämlich näherungsweise

$$\frac{V(-\frac{1}{2})}{p_{x-1/2}} + \frac{V(+\frac{1}{2})}{p_{x+1/2}} = 2\,\frac{V(0)}{p_x}, \quad \text{ferner} \quad \frac{1}{p_{x-1/2}} + \frac{1}{p_{x+1/2}} = \frac{2}{p_x}$$

und

$$\frac{q_{x-1/2}}{p_{x-1/2}} + \frac{q_{x+1/2}}{p_{x+1/2}} = 2\,\frac{q_x}{p_x},$$

---

[1]) Der Einfachheit halber sei P und S für ein und dieselbe Versicherung unveränderlich angenommen. Doch beeinträchtigt diese Einschränkung die allgemeine Gültigkeit der folgenden Entwicklung nicht.

so folgt durch Addition der beiden Gleichungen (11)

$$V(1) = \frac{1+i}{p_x}\,[V(0)+P] - \frac{q_x}{p_x}\,S; \tag{12}$$

eliminiert man daraus $V(0)$, so erhält man

$$2p_x V(1) = (1+i)\,[V(-\tfrac{1}{2}) + V(+\tfrac{1}{2}) + 2P] - 2q_x S. \tag{13}$$

Hierauf wird $V(-\frac{1}{2})$ mit Hilfe einer der Gleichungen (11) durch $V(+\frac{1}{2})$ ersetzt. Man erhält so angenähert

$$2p_x V(1) = (2+i-q_x)\,V(+\tfrac{1}{2}) + (1+i)\,P - q_x\,S. \tag{14}$$

Nun greifen wir wieder einen Teilbestand (L_x) heraus. Die Anzahl L_x der Versicherungen dieses Teilbestandes ist einem Storno unterworfen. Die einjährige effektive Ausscheidewahrscheinlichkeit sei $(\bar{q}_x + \bar{a}_x)$, wo $\bar{q}_x$ die einjährige effektive Sterbenswahrscheinlichkeit und $\bar{a}_x$ die einjährige effektive restliche Ausscheidewahrscheinlichkeit bedeutet. Es ist dann:

$$L_{x+1} = L_x(1 - \bar{q}_x - \bar{a}_x). \tag{15}$$

Das Bilanzdeckungskapital des Teilbestandes (L_x) zur Zeit $t=0$ und $t=1$ ist $\mathfrak{B}^*(0) = L_x V(0)$ und $\mathfrak{B}^*(1) = L_{x+1} V(1)$. Daraus erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (12), (14) und (15)

$$\begin{aligned}
p_x \mathfrak{B}^*(1) &= p_x L_x V(1) - p_x(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x V(1) \\
&= L_x\,[(1+i)\,(V(0)+P) - q_x S] - \frac{2+i-q_x}{2}\,(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x V(+\tfrac{1}{2}) \\
&\quad - \frac{1+i}{2}\,(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x P + \frac{q_x}{2}\,(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x S \\
&= (1+i)\,\mathfrak{B}^*(0) + (1+i)\,\frac{L_x + L_{x+1}}{2}\,P - q_x\,\frac{L_x + L_{x+1}}{2}\,S \\
&\quad - \frac{2+i-q_x}{2}\,(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x V(+\tfrac{1}{2}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Der Ausdruck $(\bar{q}_x + \bar{a}_x)\,L_x V(+\frac{1}{2})$ ist nichts anderes als die durch das Storno während der Rechnungsperiode freiwerdende Reserve des

Teilbestandes (L_x), berechnet auf den Zeitpunkt $t = +\frac{1}{2}$. Diese freiwerdende Reserve sei mit $\mathfrak{R}^*$ bezeichnet. Das arithmetische Mittel der Nettoprämie $\frac{L_x + L_{x+1}}{2} P$ sei mit $\mathfrak{P}^*$ und das arithmetische Mittel der Versicherungssumme $\frac{L_x + L_{x+1}}{2} S$ sei mit $\mathfrak{S}^*$ bezeichnet. Dann erhält man für $p_x \mathfrak{V}^*(1)$ den folgenden Ausdruck:

$$p_x \mathfrak{V}^*(1) = (1+i)\left[\mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{P}^*\right] - \left(1 + \frac{i - q_x}{2}\right)\mathfrak{R}^* - q_x \mathfrak{S}^*$$

oder

$$\mathfrak{V}^*(1) = (1+i)\left[\mathfrak{V}^*(0) + \mathfrak{P}^*\right] - (1 + \tfrac{1}{2})\,\mathfrak{R}^* - q_x\left[\mathfrak{S}^* - \mathfrak{V}^*(1) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}^*\right]. \tag{17}$$

Jetzt summieren wir wieder über alle Teilbestände (L_x). Die Summation soll durch Weglassung des *-Zeichens angedeutet werden. Die zu den verschiedenen Teilbeständen gehörenden Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x werden durch eine «mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit» q ersetzt. Über q lässt sich das gleiche sagen wie über das μ des vorhergehenden Abschnitts. Wir setzen also

$$\sum q_x\left[\mathfrak{S}^* - \mathfrak{V}^*(1) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}^*\right] = q\left[\mathfrak{S} - \mathfrak{V}(1) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}\right]. \tag{18}$$

Die Gleichung (1) geht dann über in

$$p\,\mathfrak{V}(1) = (1+i)\left[\mathfrak{V}(0) + \mathfrak{P}\right] - \left(1 + \frac{i - q}{2}\right)\mathfrak{R} - q\,\mathfrak{S} \tag{19}$$

oder aufgelöst nach q:

$$q = \frac{(1+i)\left[\mathfrak{V}(0) + \mathfrak{P}\right] - (1 + \frac{1}{2})\,\mathfrak{R} - \mathfrak{V}(1)}{\mathfrak{S} - \mathfrak{V}(1) - \frac{1}{2}\mathfrak{R}}. \tag{20}$$

Diese Gleichung (20) wird verwendet, um aus den vorangehenden Rechnungsperioden eine q-Reihe zu berechnen. Durch geeignete Extrapolation wird ein q für die gerade in Frage stehende Rechnungsperiode berechnet und mit diesen q auf Grund der Formel (19) das gesuchte Bilanzdeckungskapital berechnet.

Es sei noch erwähnt, dass sämtliche bisher gemachten Annäherungen bedeutungslos sind. Wohl entspricht das auf Grund der Formel (20) errechnete q nicht demjenigen q, das wir erhielten, wenn wir keine Annäherung gemacht hätten. Aber bei der Inversion der Gleichung (20) in die Gleichung (19) fällt diese Ungleichheit wieder heraus.

Nimmt man an, wir könnten den Fehler von q, der bei der Extrapolation entsteht, abschätzen, so gelingt auch die Abschätzung des Fehlers im Deckungskapital. Es ist nämlich:

$$\Delta \mathfrak{V} = -[\mathfrak{S} - \mathfrak{V}(1) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}]\,\Delta q. \tag{21}$$

Zur Bestimmung der mittleren rechnungsmässigen Sterbenswahrscheinlichkeit gibt es noch ein anderes Verfahren, das besonders dann von Vorteil ist, wenn die genauen Bilanzdeckungskapitalien nur zu Beginn einer längern Zeitepoche, z. B. eines Jahrfünfts, und am Ende dieser Epoche bekannt sind. Voraussetzung ist freilich, dass für den Bilanzzeitpunkt $t = 0$ nicht nur $\mathfrak{V}(0)$, sondern auch $\mathfrak{V}(-\tfrac{1}{2})$ und $\mathfrak{V}(+\tfrac{1}{2})$ gegeben sind. Der Übergang von $\mathfrak{V}(-\tfrac{1}{2})$ zu $\mathfrak{V}(+\tfrac{1}{2})$ wird gleich durchgeführt wie bisher. Weil aber beide Deckungskapitalien auf den gleichen Bestand Bezug haben, verschwindet in der Formel (20) das Glied $\mathfrak{R}$, während $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ die Bedeutung des Stands der Nettoprämien resp. Versicherungssumme am Bilanztag erhalten. Die mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit, die wir diesmal mit q' bezeichnen wollen, ergibt sich aus der Formel

$$q' = \frac{(1+i)\,[\mathfrak{V}(-\tfrac{1}{2}) + \mathfrak{P}] - \mathfrak{V}(+\tfrac{1}{2})}{\mathfrak{S} - \mathfrak{V}(+\tfrac{1}{2})}. \tag{22}$$

Bei der Auswertung dieser Formel ist daran zu denken, dass der Zeitpunkt, auf den das q' der Formel (22) bezogen ist, um ein halbes Jahr früher liegt als der Zeitpunkt, auf den das q der Formel (20) bezogen ist.

VI. Die numerische Auswertung

Um die Güte des in Abschnitt III geschilderten Verfahrens zu erproben, hat die PAX, Schweizerische Lebensversicherungs-Gesellschaft, das notwendige Material in verdankenswerter Weise zur Verfügung gestellt. Es handelt sich dabei um sechs verschiedene Versicherungsbestände und deren Abwicklung in den Jahren 1944 bis 1949. Eine Ausdehnung der Untersuchungen auf die vor 1944 liegenden Jahre war deshalb unmöglich, weil im Jahre 1943 ein Wechsel der Rechnungsgrundlagen für die Deckungskapitalberechnung stattfand. Bei der numerischen Auswertung des Materials wurde wie folgt vorgegangen: Für jeden der sechs Bestände und für die Gesamtheit aller sechs Bestände wurde auf Grund der Formel (20) für die Jahre 1944 bis 1949 die mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit q berechnet. Ausserdem wurde für die Bilanztermine Ende 1944 und Ende 1949 die mittlere Sterbenswahrscheinlichkeit q' aus Formel (22) berechnet.

In einer ersten Annäherung wurden die so errechneten q des Vorjahres unverändert für die Berechnung des Bilanzdeckungskapitals des Rechnungsjahres übernommen. In einer zweiten Annäherung wurde das q für das Rechnungsjahr aus den q der beiden Vorjahre linear extrapoliert. Dieses zweite Verfahren zeigt sehr gute Resultate. Ein drittes Verfahren würde darin bestehen, das q für das Rechnungsjahr aus den q' der Bilanz der beiden Vorjahre zu extrapolieren. Auch dieses Verfahren würde zu guten Resultaten führen. Das zweite und dritte Verfahren ist nur anwendbar, wenn die q resp. q' der Vorjahre aus den Formeln (20) resp. (22) berechnet werden können, d. h. wenn die Bilanzdeckungskapitalien der Vorjahre $\mathfrak{B}(1)$ genau berechnet vorliegen. Mit andern Worten: das zweite und dritte Verfahren kann nur zur vorläufigen Schätzung oder zur nachträglichen Kontrolle des Bilanzdeckungskapitals $\mathfrak{B}(1)$ auf Ende des Rechnungsjahres verwendet werden.

Sollen dagegen die nach Formel (19) berechneten Bilanzdeckungskapitalien nicht mehr genau nachgerechnet werden, sondern direkt in die Bilanz übernommen werden, so ist es nicht möglich, die q oder die q' für eine Reihe aufeinanderfolgender Jahre zu berechnen. Es dürfte sich dann das folgende Verfahren empfehlen. Man rechnet die Bilanzdeckungskapitalien nur jeweilen von Jahrfünft zu Jahrfünft genau. Auf Grund der Formel (22) ermittelt man dann die q' für diese beiden 5 Jahre auseinanderliegenden Bilanztermine. Durch geeignete Extrapolation werden die q für das anschliessende Jahrfünft und, gestützt darauf, die Bilanzdeckungskapitalien berechnet. Da die zur Verfügung stehenden Unterlagen nur bis ins Jahr 1944 zurückliegen, war es uns nicht möglich, die q für die Jahre 1944 bis 1949 zu extrapolieren. Wir behelfen uns mit einer Interpolation, indem wir so tun als ob diese Interpolation das Resultat der Extrapolation aus den beiden q' für 1939 und 1944 wären. In dieser Hinsicht ist also den gewonnenen Resultaten gegenüber, so gut sie auch aussehen, einige Reserve am Platz. Doch glauben wir, dass bei Zuhilfenahme von Trends auch eine gute Extrapolation möglich sein sollte.

Im vierten Verfahren wurde als Vortrag $\mathfrak{B}(0)$ das geschätzte $\mathfrak{B}(1)$ des Vorjahres angenommen. Bei diesem Verfahren werden daher die

Abweichungen $\Delta\mathfrak{V}$ des Deckungskapitals von der gleichen Grössenordnung sein wie beim zweiten Verfahren. Beim fünften Verfahren dagegen werden sich die Abweichungen während vier Jahren akkumulieren.

Es sei $\overset{0}{q}_{i+1}$ die für die Berechnung von $\mathfrak{V}(1)$ verwendete mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit; q_{i-1} und q_i die auf Grund der Formel (20) gewonnenen q; ebenso sei $q'_{1/2}$ und $q'_{5 1/2}$ die auf Grund der Formel (22) gewonnenen q'. Dann wurde $\overset{0}{q}_{i+1}$ für das

I. Verfahren nach der Formel $\overset{0}{q}_{i+1} = q_i$

II. Verfahren nach der Formel $\overset{0}{q}_{i+1} = 2q_i - q_{i-1}$

IV. u. V. Verfahren nach der Formel $\overset{0}{q}_{i+1} = q_{1/2} + \frac{1+2i}{10}(q_{5 1/2} - q_{1/2})$

berechnet.

Von den sechs untersuchten Versicherungsbeständen sind A_1 und A_2 geschlossen, und zwar so, dass sowohl die Versicherungssumme als auch das Bilanzdeckungskapital bereits abnehmen. Zwei weitere Bestände B_1 und B_2 sind auch geschlossen, dagegen ist das Bilanzdeckungskapital noch im Wachsen begriffen. Die beiden letzten Bestände C_1 und C_2 sind offen, so dass also sowohl die Versicherungssumme als auch das Bilanzdeckungskapital zunimmt. Die Gesamtheit aller sechs Bestände wird mit D bezeichnet. Die aus diesem Urmaterial gewonnenen mittleren rechnungsmässigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1

Mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit q in ‰

Berechnung aus dem Jahr	Bestand							Verwendung nach Verfahren I für das Jahr
	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D	
1944	10.28	7.21	5.46	4.26	4.06	4.31	5.16	1945
1945	10.80	7.50	5.67	4.42	4.26	4.31	5.21	1946
1946	11.49	7.81	5.89	4.57	4.35	4.36	5.24	1947
1947	12.22	8.08	6.11	4.74	4.43	4.43	5.26	1948
1948	12.93	8.35	6.34	4.92	4.50	4.50	5.28	1949
1949	13.75	8.58	6.60	5.11	4.56	4.59	5.31	

Man erkennt daraus ohne weiteres die grosse Regelmässigkeit im Anwachsen der einzelnen Reihen. Die mittleren rechnungsmässigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q' für die Bilanztermine Ende 1944 und Ende 1949 sind aus der Tabelle 2 ersichtlich.

Tabelle 2
Mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit q' in $^0/_{00}$

Zeit 31. 12.	Bestand						
	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D
1944	10.54	7.35	5.58	4.34	4.15	4.29	5.19
1949	14.24	8.68	6.74	5.22	4.58	4.64	5.32

Die für das Verfahren II verwendeten $\overset{0}{q}$ sind in Tabelle 3 enthalten.

Tabelle 3. Mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit $\overset{0}{q}$ für das Verfahren II in $^0/_{00}$

Jahr	Bestand						
	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D
1946	11.32	7.79	5.88	4.58	4.46	4.31	5.26
1947	12.18	8.12	6.11	4.72	4.44	4.41	5.27
1948	12.95	8.35	6.33	4.91	4.51	4.50	5.28
1949	13.64	8.62	6.57	5.10	4.57	4.57	5.30

Vergleicht man diese Zahlen mit denjenigen der Tabelle 1, so findet man eine gute Übereinstimmung. Mit drei einzigen Ausnahmen übersteigt der Fehler Δq den Betrag von 0,05 $^0/_{00}$ nicht. Der Fehler im Bilanzdeckungskapital wird also innerhalb von 0,05 $^0/_{00}$ der Risikosumme des Bestandes bleiben.

Die für die Verfahren IV und V verwendeten $\overset{0}{q}$ sind in der Tabelle 4 zusammengefasst.

Tabelle 4. Mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit $\overset{0}{q}$ für die Verfahren IV und V in $^0/_{00}$

Jahr	Bestand						
	A_1	A_2	B_1	B_2	C_1	C_2	D
1945	10.91	7.48	5.70	4.43	4.19	4.33	5.20
1946	11.65	7.75	5.93	4.60	4.28	4.40	5.23
1947	12.39	8.02	6.16	4.78	4.37	4.47	5.26
1948	13.13	8.28	6.39	4.96	4.45	4.54	5.28
1949	13.87	8.55	6.62	5.13	4.54	4.61	5.31

Auch hier übersteigt die Abweichung Δq nirgends den Betrag von 0,2 $^0/_{00}$ und bleibt in den meisten Fällen unter 0,1 $^0/_{00}$.

Die auf Grund dieser $\overset{0}{q}$ berechneten Bilanzdeckungskapitalien sind in den folgenden Tabellen 5 bis 12 zusammengestellt.

Tabelle 5. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes A_1

Jahr	$\mathfrak{V}(1)$ Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{V}(1)$ genau
	I	II	IV	V	
1945	24 721 962		24 716 042	24 716 042	24 717 049
1946	22 707 613	22 703 484	22 700 846	22 699 799	22 702 136
1947	20 247 950	20 243 353	20 241 928	20 239 497	20 243 068
1948	18 082 031	18 077 970	18 076 972	18 073 254	18 078 123
1949	16 279 111	16 275 909	16 274 852	16 269 780	16 275 426

Tabelle 6. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes A_2

Jahr	$\mathfrak{V}(1)$ Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{V}(1)$ genau
	I	II	IV	V	
1945	2 636 341		2 636 059	2 636 059	2 636 037
1946	2 254 512	2 254 252	2 254 287	2 254 310	2 254 236
1947	2 086 496	2 086 265	2 086 340	2 086 417	2 086 295
1948	1 922 583	1 922 415	1 922 460	1 922 586	1 922 418
1949	1 669 222	1 669 088	1 669 121	1 669 295	1 669 105

Tabelle 7. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes B_1

Jahr	$\mathfrak{B}$ (1) Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{B}$ (1) genau
	I	II	IV	V	
1945	47 740 926		47 719 334	47 719 334	47 721 802
1946	51 958 848	51 941 121	51 936 897	51 934 347	51 940 491
1947	55 161 512	55 144 125	55 140 180	55 133 828	55 144 236
1948	57 707 675	57 691 494	57 687 080	57 676 318	57 691 094
1949	59 895 333	59 879 660	59 876 267	59 860 983	59 877 585

Tabelle 8. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes B_2

Jahr	$\mathfrak{B}$ (1) Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{B}$ (1) genau
	I	II	IV	V	
1945	26 918 468		26 908 512	26 908 512	26 909 377
1946	29 319 642	29 310 905	29 309 813	29 308 919	29 311 209
1947	30 657 330	30 649 710	30 646 658	30 644 294	30 648 543
1948	31 983 831	31 975 804	31 973 454	31 969 067	31 975 208
1949	32 954 252	32 946 410	32 945 091	32 938 749	32 945 833

Tabelle 9. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes C_1

Jahr	$\mathfrak{B}$ (1) Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{B}$ (1) genau
	I	II	IV	V	
1945	1 699 899		1 694 593	1 694 593	1 691 803
1946	3 219 635	3 207 320	3 218 403	3 221 282	3 213 861
1947	5 356 866	5 349 245	5 355 173	5 362 832	5 350 280
1948	8 110 824	8 102 235	8 108 677	8 121 631	8 102 910
1949	11 465 304	11 456 293	11 460 156	11 479 479	11 457 953

Tabelle 10. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes C_2

Jahr	$\mathfrak{B}$ (1) Schätzung nach Verfahren				$\mathfrak{B}$ (1) genau
	I	II	IV	V	
1945	698 213		697 982	697 982	698 234
1946	1 283 793	1 283 793	1 282 312	1 282 052	1 283 049
1947	2 076 850	2 075 777	2 074 591	2 073 563	2 075 427
1948	3 065 227	3 063 400	3 062 356	3 060 432	3 063 406
1949	4 250 183	4 248 062	4 246 850	4 243 781	4 247 474

Tabelle 11. Summe der Bilanzdeckungskapitalien aller sechs Bestände

Jahr	$\mathfrak{V}$ (1) Schätzung nach Verfahren I	II	IV	V	$\mathfrak{V}$ (1) genau
1945	104 415 809		104 372 522	104 372 522	104 374 302
1946	110 744 043	110 700 875	110 702 558	110 700 709	110 704 982
1947	115 587 004	115 548 475	115 544 870	115 540 431	115 547 849
1948	120 872 171	120 833 318	120 830 999	120 823 288	120 833 159
1949	126 513 405	126 475 422	126 472 337	126 462 067	126 473 376

Tabelle 12. Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes D

Jahr	$\mathfrak{V}$ (1) Schätzung nach Verfahren I	II	IV	V	$\mathfrak{V}$ (1) genau
1945	104 385 186		104 376 734	104 376 734	104 374 302
1946	110 712 442	110 701 172	110 707 923	110 710 437	110 704 982
1947	115 553 402	115 546 060	115 548 532	115 554 167	115 547 849
1948	120 839 244	120 834 037	120 834 037	120 840 562	120 833 159
1949	126 481 620	126 476 105	126 473 309	126 480 956	126 473 376

Um das Bild zu vervollständigen, geben wir noch die Abweichungen $\Delta\,\mathfrak{V}$ der geschätzten von den genauen Deckungskapitalien im Betrag sowie das Verhältnis $\Delta\,q$ dieser Abweichungen zur Risikosumme bekannt.

Tabelle 13

Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes A_1

Jahr	$\Delta\,\mathfrak{V}$ nach Schätzung I	II	IV	V	$1000\,\Delta\,q$ nach Schätzung I	II	IV	V
1945	+ 4913		— 1007	— 1007	+ 0,53		— 0,11	— 0,11
1946	+ 5477	+ 1348	— 1290	— 2337	+ 0,70	+ 0,17	— 0,16	— 0,30
1947	+ 4882	+ 285	— 1140	— 3571	+ 0,74	+ 0,04	— 0,17	— 0,54
1948	+ 3908	— 153	— 1151	— 4869	+ 0,71	— 0,03	— 0,21	— 0,89
1949	+ 3685	+ 483	— 574	— 5646	+ 0,82	+ 0,11	— 0,13	— 1,26

Tabelle 14. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes A_2

Jahr	$\Delta \mathfrak{V}$ nach Schätzung				$1000\,\Delta q$ nach Schätzung			
	I	II	IV	V	I	II	IV	V
1945	+ 304		+ 22	+ 22	+ 0,29		+ 0,02	+ 0,02
1946	+ 276	+ 16	+ 51	+ 74	+ 0,31	+ 0,02	+ 0,06	+ 0,08
1947	+ 201	— 30	+ 45	+ 122	+ 0,27	— 0,04	+ 0,06	+ 0,16
1948	+ 165	— 3	+ 42	+ 168	+ 0,27	— 0,00	+ 0,07	+ 0,27
1949	+ 117	— 17	+ 16	+ 190	+ 0,23	— 0,03	+ 0,03	+ 0,38

Tabelle 15. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes B_1

Jahr	$\Delta \mathfrak{V}$ nach Schätzung				$1000\,\Delta q$ nach Schätzung			
	I	II	IV	V	I	II	IV	V
1945	+ 19 124		— 2468	— 2 468	+ 0,21		— 0,03	— 0,03
1946	+ 18 357	+ 630	— 3594	— 6 144	+ 0,22	+ 0,01	— 0,04	— 0,07
1947	+ 17 276	— 111	— 4056	— 10 408	+ 0,22	— 0,00	— 0,05	— 0,13
1948	+ 16 581	+ 400	— 4014	— 14 776	+ 0,23	+ 0,01	— 0,05	— 0,20
1949	+ 17 748	+ 2075	— 1318	— 16 602	+ 0,26	+ 0,03	— 0,02	— 0,25

Tabelle 16. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes B_2

Jahr	$\Delta \mathfrak{V}$ nach Schätzung				$1000\,\Delta q$ nach Schätzung			
	I	II	IV	V	I	II	IV	V
1945	+ 9091		— 865	— 865	+ 0,16		— 0,01	— 0,01
1946	+ 8433	— 304	— 1396	— 2290	+ 0,16	— 0,01	— 0,03	— 0,04
1947	+ 8787	+ 1167	— 1885	— 4249	+ 0,17	+ 0,02	— 0,04	— 0,08
1948	+ 8623	+ 596	— 1754	— 6141	+ 0,18	+ 0,01	— 0,04	— 0,13
1949	+ 8419	+ 577	— 742	— 7084	+ 0,19	+ 0,01	— 0,02	— 0,16

Tabelle 17. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes C_1

Jahr	$\Delta \mathfrak{V}$ nach Schätzung				$1000\,\Delta q$ nach Schätzung			
	I	II	IV	V	I	II	IV	V
1945	+ 8096		+ 2790	+ 2 790	+ 0,20		+ 0,07	+ 0,07
1946	+ 5774	— 6541	+ 4542	+ 7 421	+ 0,09	— 0,11	+ 0,07	+ 0,12
1947	+ 6586	— 1035	+ 4893	+ 12 552	+ 0,08	— 0,01	+ 0,06	+ 0,15
1948	+ 7914	— 675	+ 5767	+ 18 721	+ 0,07	— 0,01	+ 0,05	+ 0,18
1949	+ 7351	— 1660	+ 2203	+ 21 526	+ 0,06	— 0,01	+ 0,02	+ 0,17

Tabelle 18. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes C_2

Jahr	$\Delta\mathfrak{V}$ nach Schätzung I	II	IV	V	$1000\,\Delta q$ nach Schätzung I	II	IV	V
1945	— 21		— 252	— 252	— 0,00		— 0,02	— 0,02
1946	+ 744	+ 744	— 737	— 997	+ 0,05	+ 0,05	— 0,04	— 0,06
1947	+ 1423	+ 350	— 836	— 1864	+ 0,07	+ 0,02	— 0,04	— 0,09
1948	+ 1821	— 6	— 1050	— 2974	+ 0,07	— 0,00	— 0,04	— 0,11
1949	+ 2709	+ 588	— 624	— 3693	+ 0,09	+ 0,02	— 0,02	— 0,12

Tabelle 19. Abweichungen der Summe der Bilanzdeckungskapitalien aller sechs Bestände

Jahr	$\Delta\mathfrak{V}$ nach Schätzung I	II	IV	V	$1000\,\Delta q$ nach Schätzung I	II	IV	V
1945	+ 41 507		— 1780	— 1 780	+ 0,20		— 0,01	— 0,01
1946	+ 39 061	— 4107	— 2424	— 4 273	+ 0,17	— 0,02	— 0,01	— 0,02
1947	+ 39 155	+ 626	— 2979	— 7 418	+ 0,16	+ 0,00	— 0,01	— 0,03
1948	+ 39 012	+ 159	— 2160	— 9 871	+ 0,15	+ 0,00	— 0,01	— 0,04
1949	+ 40 029	+ 2046	— 1039	— 11 309	+ 0,15	+ 0,01	— 0,00	— 0,04

Tabelle 20. Abweichungen der Bilanzdeckungskapitalien des Bestandes D

Jahr	$\Delta\mathfrak{V}$ nach Schätzung I	II	IV	V	$1000\,\Delta q$ nach Schätzung I	II	IV	V
1945	+ 10 884		+ 2432	+ 2432	+ 0,05		+ 0,01	+ 0,01
1946	+ 7 460	— 3810	+ 2941	+ 5455	+ 0,03	— 0,02	+ 0,01	+ 0,02
1947	+ 5 553	— 1789	+ 683	+ 6318	+ 0,02	— 0,01	+ 0,00	+ 0,03
1948	+ 6 085	+ 878	+ 878	+ 7403	+ 0,02	+ 0,00	+ 0,00	+ 0,03
1949	+ 8 244	+ 2729	— 67	+ 7580	+ 0,03	+ 0,01	— 0,00	+ 0,03

Der Bestand A_1 macht eine Ausnahme unter allen Beständen insofern, als die Abweichungen des Deckungskapitals im Verhältnis zur Risikosumme durchwegs höher sind als bei den übrigen Beständen. Das ist aber weiter nicht verwunderlich. Bei Bestand A_1 ist das durchschnittliche Bilanzalter wesentlich höher als bei den übrigen Beständen. Das hat zur Folge, dass auch die mittlere rechnungsmässige Sterbenswahrscheinlichkeit q und mit ihr die Abweichungen grösser ausfallen. Immerhin ist die Abschätzung nach Verfahren II und auch nach IV, wie Tabelle 13 zeigt, noch gut. Bei der weitern Diskussion lassen wir den Bestand A_1 beiseite.

Bei den übrigen Beständen liegt die Abweichung Δq für das Verfahren

I	zwischen	$-0{,}00\,^0/_{00}$	und	$+0{,}31\,^0/_{00}$	der	Risikosumme
II	»	$-0{,}11\,^0/_{00}$	»	$+0{,}17\,^0/_{00}$	»	»
IV	»	$-0{,}21\,^0/_{00}$	»	$+0{,}07\,^0/_{00}$	»	»

Das ist eine respektable Genauigkeit, die um so eindrücklicher wird, als die Δq innerhalb ein und desselben Bestandes eine bemerkenswerte Konstanz aufweisen.

Bei Verfahren V akkumulieren sich, wie bereits gesagt, die Abweichungen von Jahr zu Jahr. Es ist daher gerechtfertigt, jedes Bilanzjahr für sich zu betrachten. Die Δq schwanken für das Jahr

1945	zwischen	$-0{,}03\,^0/_{00}$	und	$+0{,}07\,^0/_{00}$	der	Risikosumme
1946	»	$-0{,}07\,^0/_{00}$	»	$+0{,}12\,^0/_{00}$	»	»
1947	»	$-0{,}13\,^0/_{00}$	»	$+0{,}16\,^0/_{00}$	»	»
1948	»	$-0{,}20\,^0/_{00}$	»	$+0{,}27\,^0/_{00}$	»	»
1949	»	$-0{,}25\,^0/_{00}$	»	$+0{,}38\,^0/_{00}$	»	»

Als Schlussfolgerung kann gesagt werden, dass die Abschätzung der Bilanzdeckungskapitalien nach allen Verfahren, insbesondere aber nach dem Verfahren II gut brauchbare Resultate ergibt.