Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 50 (1950)

Artikel: Über unterjährig zahlbare Zeitrenten

Autor: Michalup, Erich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966865

Über unterjährig zahlbare Zeitrenten

Von *Erich Michalup*, Caracas

Wenn die Jahresrente der Einheit gleichgesetzt wird, so gelten die Formeln

$$1 = z^{(p)} \left[1 + (1+i)^{\frac{1}{p}} + \ldots + (1+i)^{\frac{p-1}{p}}\right]; \; z^{(p)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{i} \qquad \text{(A)}$$

für die im nachhinein unterjährig zahlbare Rente $z^{(p)}$ und

$$1 = c^{(p)} \left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{p}} + \ldots + (1+i)^{-\frac{p-1}{p}}\right];$$

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{i} \left[1 - (1+i)^{-\frac{1}{p}}\right] = (1+i)^{\frac{p-1}{p}} z^{(p)} \qquad \text{(B)}$$

für die im vorhinein unterjährig zahlbare Rente $c^{(p)}$.

Für die gebräuchlichsten Zinsfüsse sind die Werte von $z^{(p)}$ in den einschlägigen Tabellenwerken (Spitzer-Förster etc.) zu finden, und daraus kann leicht der Wert von $c^{(p)}$ berechnet werden. Für selten gebrauchte Zinsfüsse können wir eine genügende Genauigkeit durch Anwendung der im folgenden entwickelten Näherungsformeln erreichen, die mittels des Lindelöfschen Konvergenzverbesserungsverfahrens abgeleitet werden.

Wir entwickeln den Ausdruck (A) in eine unendliche, konvergente Reihe

$$z^{(p)} = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{p-1}{2p} i + \frac{p-1}{2p} \frac{2p-1}{3p} i^2 - \frac{p-1}{2p} \frac{2p-1}{3p} \frac{3p-1}{4p} i^3 + \ldots\right]$$

und setzen

$$z^{(p)} = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{p-1}{2p} i \left(1 - \frac{2p-1}{3p} i + \frac{2p-1}{3p}\,\frac{3p-1}{4p} i^2 \ldots\right)\right].$$

Auf den Ausdruck in der runden Klammer wenden wir nun die Lindelöfsche Methode an, wobei wir zur Vereinfachung

$$a = \frac{2p-1}{3p}; \quad b = \frac{3p-1}{4p}$$

setzen, so dass wir für den Klammerausdruck

$$1 - a i + a b i^2$$

erhalten. Durch die Eulersche Substitution

$$x = \frac{i}{s+i}; \quad i = \frac{s x}{1-x} = s x + s x^2 + s x^3 + \ldots$$

ergibt sich bei Begrenzung auf die zweiten Potenzen

$$i = s x + s x^2 + \ldots$$
$$i^2 = s^2 x^2 + \ldots$$

und der Klammerausdruck geht in

$$1 - a s x - a s x^2 + a b s^2 x^2 = 1 - a s x - a s x^2 (1 - b s)$$

über. Um nun den Koeffizienten von x^2 zum Verschwinden zu bringen, setzen wir $s = \frac{1}{b}$ und erhalten

$$z^{(p)} = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{p-1}{2p} i \left(1 - \frac{a}{b}\,\frac{i}{1/b + i}\right)\right] = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{p-1}{2p} i \,\frac{1 + b i - a i}{1 + b i}\right]$$

und nach einigen Umformungen die endgültige Formel

$$z^{(p)} = \frac{1}{p}\,\frac{24 p^2 + 6 p (p+1) i - (p^2 - 1) i^2}{24 p^2 + 6 p (3p - 1) i}.$$

Für halbjährliche Zahlungen ergibt sich

$$z^{(2)} = \frac{32 + 12\,i - i^2}{64 + 40\,i} \tag{C}$$

für vierteljährliche Zahlungen

$$z^{(4)} = \frac{128 + 40\,i - 5\,i^2}{512 + 352\,i} \tag{D}$$

und für monatliche Zahlungen

$$z^{(12)} = \frac{3456 + 936\,i - 143\,i^2}{41472 + 30240\,i} \tag{E}$$

welchen Ausdruck wir durch

$$z^{(12)} = \frac{48 + 13\,i - 2\,i^2}{576 + 420\,i} \tag{F}$$

ersetzen können, wenn der Zinsfuss klein ist.

Der Unterschied zwischen den exakt gerechneten Werten und den Näherungswerten erreicht bei halbjährlichen Zahlungen und dem exorbitanten Zinsfuss von 12 % nur 5 Einheiten der siebenten Dezimale. Diese Formeln geben eine merklich grössere Genauigkeit als die bei anderer Gelegenheit (1) entwickelten Formeln.

Für die im vorhinein zahlbare Rente gehen wir von dem Ausdruck (B)

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{i}\left[1 - \left(1 - \frac{i}{p} + \frac{1/p\,(1/p+1)}{1\cdot 2}\,i^2 - \frac{1/p\,(1/p+1)\,(1/p+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,i^3 + \ldots\right)\right]$$

aus, den wir wie folgt umformen

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{p}\left[1 - \frac{p+1}{2p}\,i\left(1 - \frac{2p+1}{3p}\,i + \frac{2p+1}{3p}\,\frac{3p+1}{4p}\,i^2 + \ldots\right)\right].$$

Wenn wir nun die Lindelöfsche Methode in derselben Art anwenden, erhalten wir den Ausdruck

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{p}\,\frac{24p^2 + 6p\,(p-1)\,i - (p^2-1)\,i^2}{24p^2 + 6p\,(3p+1)\,i}$$

der grosse Ähnlichkeit mit dem früher entwickelten aufweist.

Für halbjährliche Zahlungen ergibt sich

$$c^{(2)} = (1+i)\,\frac{32+4i-i^2}{64+56i} \tag{G}$$

für vierteljährliche Zahlungen

$$c^{(4)} = (1+i)\,\frac{128+24i-5i^2}{512+416i} \tag{H}$$

und für monatliche Zahlungen

$$c^{(12)} = (1+i)\,\frac{3456+792i-143i^2}{41472+31968i} \tag{I}$$

oder näherungsweise für niedrige Zinsfüsse

$$c^{(12)} = (1+i)\,\frac{48+11i-2i^2}{576+444i}. \tag{J}$$

Wir können nun die auf theoretischem Wege gefundenen Formeln durch bessere Annäherungen ersetzen, wenn wir uns begnügen, den Koeffizienten von i^2 in den verschiedenen Formeln etwas zu verringern, und die erforderliche Verringerung auf empirischem Wege feststellen. So könnten wir z. B. in den Formeln F und J statt 2 den Koeffizienten 1.98 wählen und drücken dadurch die Abweichungen auf 5 Einheiten der achten Dezimale herunter. Bei den Ausdrücken für die halb- und vierteljährlichen Renten jedoch müsste der Koeffizient vom Zinsfuss abhängig gemacht werden, und aus diesem Grunde haben wir bei allen Formeln den Faktor von i^2 derart bestimmt, dass die Abweichungen von den exakten Werten auf eine Einheit der achten Dezimale herabgedrückt werden, sofern der Zinsfuss 10 % nicht überschreitet. Die diesbezüglichen Koeffizienten geben wir im nachstehenden an, wobei wir für die abgeänderten Formeln aus Vergleichszwecken einen Doppelbuchstaben gewählt haben.

	Formel:	Koeffizient von i^2
CC	$\dfrac{32 + 12i - yi^2}{64 + 40i}$	$y = \left(1 - \dfrac{3i - 0.13}{100}\right) \leqslant 1$
DD	$\dfrac{128 + 40i - yi^2}{512 + 352i}$	$y = \left(5 - \dfrac{2i - 0.09}{10}\right) \leqslant 5$
FF	$\dfrac{48 + 13i - yi^2}{576 + 420i}$	$y = \left(2 - \dfrac{i + 0.09}{10}\right) \leqslant 2$
GG	$(1 + i)\,\dfrac{32 + 4i - yi^2}{64 + 56i}$	$y = \left(1 - \dfrac{6i - 0.22}{100}\right) \leqslant 1$
HH	$(1 + i)\,\dfrac{128 + 24i - yi^2}{512 + 416i}$	$y = \left(5 - \dfrac{3i - 0.14}{10}\right) \leqslant 5$
JJ	$(1 + i)\,\dfrac{48 + 11i - yi^2}{576 + 444i}$	$y = \left(2 - \dfrac{i + 0.10}{10}\right) \leqslant 2$.

(1) Michalup, «Beitrag zur Amortisationsrechnung», «Skandinavisk Aktuarietidskrift», Uppsala 1946, Seiten 80–84.

Zins-fuss %	$\frac{1}{i}\left[(1+i)^{\frac{1}{2}}-1\right]$	Formel C	Formel CC	$\frac{1+i}{i}\left[1-(1+i)^{-\frac{1}{2}}\right]$	Formel G	Formel GG
1	0.4987 5621	0.4987 5621	0.4987 5621	0.5012 4379	0.5012 4379	0.5012 4379
2	0.4975 2469	0.4975 2469	0.4975 2469	0.5024 7531	0.5024 7531	0.5024 7531
3	0.4963 0522	0.4963 0521	0.4963 0521	0.5036 9478	0.5036 9478	0.5036 9478
4	0.4950 9757	0.4950 9756	0.4950 9756	0.5049 0243	0.5049 0242	0.5049 0242
5	0.4939 0153	0.4939 0152	0.4939 0152	0.5060 9847	0.5060 9843	0.5060 9846
6	0.4927 1690	0.4927 1687	0.4927 1689	0.5072 8310	0.5072 8302	0.5072 8310
7	0.4915 4348	0.4915 4341	0.4915 4347	0.5084 5652	0.5084 5638	0.5084 5653
8	0.4903 8106	0.4903 8095	0.4903 8106	0.5096 1894	0.5096 1869	0.5096 1895
9	0.4892 2945	0.4892 2929	0.4892 2946	0.5107 7055	0.5107 7015	0.5107 7056
10	0.4880 8848	0.4880 8824	0.4880 8849	0.5119 1152	0.5119 1092	0.5119 1152
11	0.4869 5796	0.4869 5760	0.4869 5796	0.5130 4204	0.5130 4118	0.5130 4202
12	0.4858 3770	0.4858 3721	0.4858 3769	0.5141 6230	0.5141 6109	0.5141 6223

	$\frac{1}{i}\left[(1+i)^{\frac{1}{4}}-1\right]$	Formel D	Formel DD	$\frac{1+i}{i}\left[1-(1+i)^{-\frac{1}{4}}\right]$	Formel H	Formel HH
1	0.2490 6793	0.2490 6793	0.2490 6793	0.2509 3362	0.2509 3362	0.2509 3362
2	0.2481 4658	0.2481 4658	0.2481 4658	0.2518 5955	0.2518 5955	0.2518 5955
3	0.2472 3573	0.2472 3572	0.2472 3572	0.2527 7793	0.2527 7792	0.2527 7793
4	0.2463 3516	0.2463 3516	0.2463 3516	0.2536 8887	0.2536 8886	0.2536 8887
5	0.2454 4469	0.2454 4468	0.2454 4468	0.2545 9250	0.2545 9248	0.2545 9249
6	0.2445 6410	0.2445 6408	0.2445 6410	0.2554 8894	0.2554 8890	0.2554 8893
7	0.2436 9321	0.2436 9316	0.2436 9321	0.2563 7830	0.2563 7822	0.2563 7829
8	0.2428 3184	0.2428 3175	0.2428 3184	0.2572 6070	0.2572 6056	0.2572 6069
9	0.2419 7979	0.2419 7966	0.2419 7979	0.2581 3623	0.2581 3602	0.2581 3623
10	0.2411 3689	0.2411 3670	0.2411 3690	0.2590 0501	0.2590 0470	0.2590 0501
11	0.2403 0297	0.2403 0269	0.2403 0298	0.2598 6715	0.2598 6669	0.2598 6715
12	0.2394 7787	0.2394 7748	0.2394 7787	0.2607 2274	0.2607 2210	0.2607 2273

	$\frac{1}{i}\left[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right]$	Formel E	Formel FF	$\frac{1+i}{i}\left[1-(1+i)^{-\frac{1}{12}}\right]$	Formel I	Formel JJ
1	0.0829 5381	0.0829 5381	0.0829 5381	0.0837 1391	0.0837 1391	0.0837 1391
2	0.0825 7907	0.0825 7906	0.0825 7906	0.0840 9176	0.0840 9176	0.0840 9176
3	0.0822 0899	0.0822 0899	0.0822 0899	0.0844 6694	0.0844 6694	0.0844 6694
4	0.0818 4349	0.0818 4349	0.0818 4349	0.0848 3949	0.0848 3949	0.0848 3949
5	0.0814 8248	0.0814 8247	0.0814 8247	0.0852 0945	0.0852 0944	0.0852 0944
6	0.0811 2584	0.0811 2583	0.0811 2584	0.0855 7684	0.0855 7683	0.0855 7684
7	0.0807 7351	0.0807 7349	0.0807 7350	0.0859 4172	0.0859 4170	0.0859 4173
8	0.0804 2538	0.0804 2534	0.0804 2538	0.0863 0412	0.0863 0408	0.0863 0413
9	0.0800 8137	0.0800 8132	0.0800 8137	0.0866 6408	0.0866 6401	0.0866 6408
10	0.0797 4140	0.0797 4133	0.0797 4141	0.0870 2162	0.0870 2152	0.0870 2163
11	0.0794 0540	0.0794 0528	0.0794 0540	0.0873 7679	0.0873 7665	0.0873 7680
12	0.0790 7327	0.0790 7312	0.0790 7328	0.0877 2962	0.0877 2942	0.0877 2963