Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

= Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of

Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 50 (1950)

Artikel: Über unterjährig zahlbare Zeitrenten

Autor: Michalup, Erich

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966865

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über unterjährig zahlbare Zeitrenten

Von Erich Michalup, Caracas

Wenn die Jahresrente der Einheit gleichgesetzt wird, so gelten die Formeln

$$1 = z^{(p)} \left[1 + (1+i)^{\frac{1}{p}} + \dots + (1+i)^{\frac{p-1}{p}} \right]; z^{(p)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{i}$$
 (A)

für die im nachhinein unterjährig zahlbare Rente $z^{(p)}$ und

$$1 = c^{(p)} \left[1 + (1+i)^{-\frac{1}{p}} + \dots + (1+i)^{-\frac{p-1}{p}} \right];$$

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{i} \left[1 - (1+i)^{-\frac{1}{p}} \right] = (1+i)^{\frac{p-1}{p}} z^{(p)} \quad (B)$$

für die im vorhinein unterjährig zahlbare Rente $c^{(p)}$.

Für die gebräuchlichsten Zinsfüsse sind die Werte von $z^{(p)}$ in den einschlägigen Tabellenwerken (Spitzer-Förster etc.) zu finden, und daraus kann leicht der Wert von $c^{(p)}$ berechnet werden. Für selten gebrauchte Zinsfüsse können wir eine genügende Genauigkeit durch Anwendung der im folgenden entwickelten Näherungsformeln erreichen, die mittels des Lindelöfschen Konvergenzverbesserungsverfahrens abgeleitet werden.

Wir entwickeln den Ausdruck (A) in eine unendliche, konvergente Reihe

$$z^{(p)} = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{p-1}{2p} i + \frac{p-1}{2p} \frac{2p-1}{3p} i^2 - \frac{p-1}{2p} \frac{2p-1}{3p} \frac{3p-1}{4p} i^3 + \dots \right]$$

und setzen

$$z^{(p)} = rac{1}{p} \left[1 - rac{p-1}{2p} i \left(1 - rac{2p-1}{3p} i + rac{2p-1}{3p} rac{3p-1}{4p} i^2 \ldots
ight)
ight].$$

Auf den Ausdruck in der runden Klammer wenden wir nun die Lindelöfsche Methode an, wobei wir zur Vereinfachung

$$a = \frac{2p-1}{3p}; \quad b = \frac{3p-1}{4p}$$

setzen, so dass wir für den Klammerausdruck

$$1 - ai + abi^2$$

erhalten. Durch die Eulersche Substitution

$$x = \frac{i}{s+i}$$
; $i = \frac{sx}{1-x} = sx + sx^2 + sx^3 + \dots$

ergibt sich bei Begrenzung auf die zweiten Potenzen

$$i = sx + sx^2 + \dots$$
$$i^2 = s^2x^2 + \dots$$

und der Klammerausdruck geht in

$$1 - asx - asx^2 + abs^2x^2 = 1 - asx - asx^2(1 - bs)$$

über. Um nun den Koeffizienten von x^2 zum Verschwinden zu bringen, setzen wir $s=\frac{1}{b}$ und erhalten

$$z^{(p)} = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{p-1}{2p} \, i \left(1 - \frac{a}{b} \, \frac{i}{1/b+i} \right) \right] = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{p-1}{2p} \, i \, \frac{1+b \, i - a \, i}{1+b \, i} \right]$$

und nach einigen Umformungen die endgültige Formel

$$z^{(p)} = \frac{1}{p} \; \frac{24 \, p^2 + 6 \, p \, (p+1) \, i - (p^2 - 1) \, i^2}{24 \, p^2 + 6 \, p \, (3 \, p - 1) \, i} \; .$$

Für halbjährliche Zahlungen ergibt sich

$$z^{(2)} = \frac{32 + 12i - i^2}{64 + 40i} \tag{C}$$

für vierteljährliche Zahlungen

$$z^{(4)} = \frac{128 + 40i - 5i^2}{512 + 352i} \tag{D}$$

und für monatliche Zahlungen

$$z^{(12)} = \frac{3456 + 936 i - 143 i^2}{41472 + 30240 i}$$
 (E)

welchen Ausdruck wir durch

$$z^{(12)} = \frac{48 + 13i - 2i^2}{576 + 420i} \tag{F}$$

ersetzen können, wenn der Zinsfuss klein ist.

Der Unterschied zwischen den exakt gerechneten Werten und den Näherungswerten erreicht bei halbjährlichen Zahlungen und dem exorbitanten Zinsfuss von 12 % nur 5 Einheiten der siebenten Dezimale. Diese Formeln geben eine merklich grössere Genauigkeit als die bei anderer Gelegenheit (1) entwickelten Formeln.

Für die im vorhinein zahlbare Rente gehen wir von dem Ausdruck (B)

$$e^{(p)} = rac{1+i}{i} \left[1 - \left(1 - rac{i}{p} + rac{1/p \left(1/p + 1
ight)}{1 \cdot 2} i^2 - rac{1/p \left(1/p + 1
ight) \left(1/p + 2
ight)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \dots
ight) \right] \right]$$

aus, den wir wie folgt umformen

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{p} \left[1 - \frac{p+1}{2p} i \left(1 - \frac{2p+1}{3p} i + \frac{2p+1}{3p} \frac{3p+1}{4p} i^2 + \dots \right) \right].$$

Wenn wir nun die Lindelöfsche Methode in derselben Art anwenden, erhalten wir den Ausdruck

$$c^{(p)} = \frac{1+i}{p} \; \frac{24 \, p^2 + 6 \, p \, (p-1) \, i - (p^2-1) \, i^2}{24 \, p^2 + 6 \, p \, (3 \, p+1) \, i}$$

der grosse Ähnlichkeit mit dem früher entwickelten aufweist.

Für halbjährliche Zahlungen ergibt sich

$$c^{(2)} = (1+i) \frac{32+4i-i^2}{64+56i}$$
 (G)

für vierteljährliche Zahlungen

$$c^{(4)} = (1+i) \frac{128 + 24i - 5i^2}{512 + 416i}$$
 (H)

und für monatliche Zahlungen

$$c^{(12)} = (1+i) \frac{3456 + 792i - 143i^2}{41472 + 31968i}$$
 (I)

oder näherungsweise für niedrige Zinsfüsse

$$c^{(12)} = (1+i) \frac{48+11i-2i^2}{576+444i}.$$
 (J)

Wir können nun die auf theoretischem Wege gefundenen Formeln durch bessere Annäherungen ersetzen, wenn wir uns begnügen, den Koeffizienten von i^2 in den verschiedenen Formeln etwas zu verringern, und die erforderliche Verringerung auf empirischem Wege feststellen. So könnten wir z. B. in den Formeln F und J statt 2 den Koeffizienten 1.98 wählen und drücken dadurch die Abweichungen auf 5 Einheiten der achten Dezimale herunter. Bei den Ausdrücken für die halb- und vierteljährlichen Renten jedoch müsste der Koeffizient vom Zinsfuss abhängig gemacht werden, und aus diesem Grunde haben wir bei allen Formeln den Faktor von i^2 derart bestimmt, dass die Abweichungen von den exakten Werten auf eine Einheit der achten Dezimale herabgedrückt werden, sofern der Zinsfuss 10% nicht überschreitet. Die diesbezüglichen Koeffizienten geben wir im nachstehenden an, wobei wir für die abgeänderten Formeln aus Vergleichszwecken einen Doppelbuchstaben gewählt haben.

Formel:

Koeffizient von i^2

CC
$$\frac{32 + 12i - yi^2}{64 + 40i} \qquad y = \left(1 - \frac{3i - 0.13}{100}\right) \leqslant 1$$

DD
$$\frac{128 + 40i - yi^2}{512 + 352i} \qquad y = \left(5 - \frac{2i - 0.09}{10}\right) \leqslant 5$$

FF
$$\frac{48+13i-yi^2}{576+420i} \qquad y = \left(2 - \frac{i+0.09}{10}\right) \leqslant 2$$

$$\text{GG} \qquad (1+i) \, \frac{32 + 4\,i - y\,i^2}{64 + 56\,i} \qquad \qquad y = \left(1 - \frac{6\,i - 0.22}{100}\right) \leqslant 1$$

$$\text{HH} \qquad (1+i) \, \frac{128 + 24 \, i - y \, i^2}{512 + 416 \, i} \qquad \quad y = \left(5 - \frac{3 \, i - 0.14}{10}\right) \leqslant 5$$

$$\text{JJ} \qquad (1+i) \, \frac{48+11\,i-y\,i^2}{576+444\,i} \qquad \quad y = \left(2-\frac{i+0.10}{10}\right) \leqslant 2\,.$$

⁽¹⁾ Michalup, «Beitrag zur Amortisationsrechnung», «Skandinavisk Aktuarietidskrift», Uppsala 1946, Seiten 80–84.

Zins- fuss %	$ \frac{1}{i} \left[(1+i)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] $	Formel C	Formel CC	$\frac{1+i}{i} \left[1 - (1+i)^{-\frac{1}{2}} \right]$	Formel G	Formel GG
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	$\begin{array}{c} 0.4987\ 5621\\ 0.4975\ 2469\\ 0.4963\ 0522\\ 0.4950\ 9757\\ 0.4939\ 0153\\ 0.4927\ 1690\\ 0.4915\ 4348\\ 0.4903\ 8106\\ 0.4892\ 2945\\ 0.4880\ 8848\\ 0.4869\ 5796\\ 0.4858\ 3770\\ \end{array}$	$ \begin{array}{c} 0.4987\ 5621 \\ 0.4975\ 2469 \\ 0.4963\ 0521 \\ 0.4950\ 9756 \\ 0.4939\ 0152 \\ 0.4927\ 1687 \\ 0.4915\ 4341 \\ 0.4903\ 8095 \\ 0.4892\ 2929 \\ 0.4880\ 8824 \\ 0.4869\ 5760 \\ 0.4858\ 3721 \\ \end{array} $	$\begin{array}{c} 0.4987\ 5621\\ 0.4975\ 2469\\ 0.4963\ 0521\\ 0.4950\ 9756\\ 0.4939\ 0152\\ 0.4927\ 1689\\ 0.4915\ 4347\\ 0.4903\ 8106\\ 0.4892\ 2946\\ 0.4880\ 8849\\ 0.4869\ 5796\\ 0.4858\ 3769\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.5012\ 4379\\ 0.5024\ 7531\\ 0.5036\ 9478\\ 0.5049\ 0243\\ 0.5060\ 9847\\ 0.5072\ 8310\\ 0.5084\ 5652\\ 0.5096\ 1894\\ 0.5107\ 7055\\ 0.5119\ 1152\\ 0.5130\ 4204\\ 0.5141\ 6230\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.5012\ 4379\\ 0.5024\ 7531\\ 0.5036\ 9478\\ 0.5049\ 0242\\ 0.5060\ 9843\\ 0.5072\ 8302\\ 0.5084\ 5638\\ 0.5096\ 1869\\ 0.5107\ 7015\\ 0.5119\ 1092\\ 0.5130\ 4118\\ 0.5141\ 6109 \end{array}$	0.5012 4379 0.5024 7531 0.5036 9478 0.5049 0242 0.5060 9846 0.5072 8310 0.5084 5653 0.5096 1895 0.5107 7056 0.5119 1152 0.5130 4202 0.5141 6223
	$ \frac{1}{i} \left[(1+i)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] $	Formel D	Formel DD	$\frac{1+i}{i} \left[1 - (1+i)^{-\frac{1}{4}} \right]$	Formel H	Formel HH
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	$\begin{array}{c} 0.2490\ 6793\\ 0.2481\ 4658\\ 0.2472\ 3573\\ 0.2463\ 3516\\ 0.2454\ 4469\\ 0.2445\ 6410\\ 0.2436\ 9321\\ 0.2428\ 3184\\ 0.2419\ 7979\\ 0.2411\ 3689\\ 0.2403\ 0297\\ 0.2394\ 7787\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2490\ 6793\\ 0.2481\ 4658\\ 0.2472\ 3572\\ 0.2463\ 3516\\ 0.2454\ 4468\\ 0.2445\ 6408\\ 0.2436\ 9316\\ 0.2428\ 3175\\ 0.2419\ 7966\\ 0.2411\ 3670\\ 0.2403\ 0269\\ 0.2394\ 7748\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2490\ 6793\\ 0.2481\ 4658\\ 0.2472\ 3572\\ 0.2463\ 3516\\ 0.2454\ 4468\\ 0.2445\ 6410\\ 0.2436\ 9321\\ 0.2428\ 3184\\ 0.2419\ 7979\\ 0.2411\ 3690\\ 0.2403\ 0298\\ 0.2394\ 7787\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2509\ 3362\\ 0.2518\ 5955\\ 0.2527\ 7793\\ 0.2536\ 8887\\ 0.2545\ 9250\\ 0.2554\ 8894\\ 0.2563\ 7830\\ 0.2572\ 6070\\ 0.2581\ 3623\\ 0.2590\ 0501\\ 0.2598\ 6715\\ 0.2607\ 2274\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2509\ 3362\\ 0.2518\ 5955\\ 0.2527\ 7792\\ 0.2536\ 8886\\ 0.2545\ 9248\\ 0.2554\ 8890\\ 0.2563\ 7822\\ 0.2563\ 7822\\ 0.2572\ 6056\\ 0.2581\ 3602\\ 0.2590\ 0470\\ 0.2598\ 6669\\ 0.2607\ 2210\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.2509 \ 3362 \\ 0.2518 \ 5955 \\ 0.2527 \ 7793 \\ 0.2536 \ 8887 \\ 0.2545 \ 9249 \\ 0.2554 \ 8893 \\ 0.2563 \ 7829 \\ 0.2572 \ 6069 \\ 0.2581 \ 3623 \\ 0.2590 \ 0501 \\ 0.2598 \ 6715 \\ 0.2607 \ 2273 \\ \end{array}$
	$ \frac{1}{i} \left[(1+i)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] $	Formel E	Formel FF	$\frac{1+i}{i} \left[1 - (1+i)^{-\frac{1}{12}} \right]$	Formel I	Formel JJ
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	$\begin{array}{c} 0.0829\ 5381\\ 0.0825\ 7907\\ 0.0822\ 0899\\ 0.0818\ 4349\\ 0.0814\ 8248\\ 0.0811\ 2584\\ 0.0807\ 7351\\ 0.0804\ 2538\\ 0.0800\ 8137\\ 0.0797\ 4140\\ 0.0794\ 0540\\ 0.0790\ 7327\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0829\ 5381\\ 0.0825\ 7906\\ 0.0822\ 0899\\ 0.0818\ 4349\\ 0.0814\ 8247\\ 0.0811\ 2583\\ 0.0807\ 7349\\ 0.0804\ 2534\\ 0.0800\ 8132\\ 0.0797\ 4133\\ 0.0794\ 0528\\ 0.0790\ 7312\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0829\ 5381\\ 0.0825\ 7906\\ 0.0822\ 0899\\ 0.0818\ 4349\\ 0.0814\ 8247\\ 0.0811\ 2584\\ 0.0807\ 7350\\ 0.0804\ 2538\\ 0.0800\ 8137\\ 0.0797\ 4141\\ 0.0794\ 0540\\ 0.0790\ 7328\\ \end{array}$	$\begin{array}{c} 0.0837\ 1391 \\ 0.0840\ 9176 \\ 0.0844\ 6694 \\ 0.0848\ 3949 \\ 0.0852\ 0945 \\ 0.0855\ 7684 \\ 0.0859\ 4172 \\ 0.0863\ 0412 \\ 0.0866\ 6408 \\ 0.0870\ 2162 \\ 0.0873\ 7679 \\ 0.0877\ 2962 \\ \end{array}$	0.0837 1391 0.0840 9176 0.0844 6694 0.0848 3949 0.0852 0944 0.0855 7683 0.0859 4170 0.0863 0408 0.0866 6401 0.0870 2152 0.0873 7665 0.0877 2942	0.0837 1391 0.0840 9176 0.0844 6694 0.0848 3949 0.0852 0944 0.0855 7684 0.0859 4173 0.0863 0413 0.0866 6408 0.0870 2163 0.0873 7680 0.0877 2963