

<b>Zeitschrift:</b>	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
<b>Herausgeber:</b>	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
<b>Band:</b>	50 (1950)
<b>Artikel:</b>	Zur Technik der retrospektiven Lebensversicherung
<b>Autor:</b>	Hansen, C.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-966864">https://doi.org/10.5169/seals-966864</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zur Technik der retrospektiven Lebensversicherung

Von *Chr. Hansen*, Kopenhagen

Das Lebensversicherungsproblem besitzt zwei mathematisch-technische Lösungen (Chr. Hansen: *Retrospective Life Assurance. The Institute of Actuaries Centenary Assembly 1948*). Auf diesen beiden lassen sich zwei Lebensversicherungssysteme aufbauen: das prospektive System und das retrospektive System.

Das erste System ist wohlbekannt. Es wird von fast allen Lebensversicherungs- und Pensionsversicherungsanstalten der Welt benutzt; seine Theorie bildet den Hauptgegenstand der Lehrbücher der Versicherungsmathematik. Dagegen dürfte das retrospektive System weniger bekannt sein; jedenfalls haben die Lebensversicherungsunternehmungen davon noch nicht allgemeinen Gebrauch gemacht. Die Eigenschaften dieses Systems ermöglichen, theoretische und praktische Aufgaben zu lösen, die im prospektiven System entweder unlösbar oder schwierig lösbar sind.

Die folgenden Ausführungen haben den Zweck, das Interesse der Versicherungsmathematiker auf das retrospektive System hinzulenken.

1. Die mathematische Theorie des prospektiven Lebensversicherungssystems fusst auf der sogenannten Äquivalenzgleichung. Diese Gleichung besagt, dass beim Beginn der Versicherung der Barwert der künftigen Leistungen des Versicherers gleich dem Barwert der künftigen Gegenleistungen des Versicherten ist.

Um die Äquivalenzgleichung aufzustellen, sind Hypothesen notwendig, und zwar Hypothesen über den künftigen Verlauf von Sterblichkeit, Zinsfuss und Verwaltungskosten der Versicherungsunternehmung, über Zahlungsfähigkeit und Lebensversicherungsbedürfnis des

Versicherten. Mit anderen Worten: die Rechnungsgrundlagen, Leistungen des Versicherers und Gegenleistungen des Versicherten sind beim Beginn der Versicherung hypothetisch gegeben.

2. Die mathematische Theorie des retrospektiven Lebensversicherungssystems fußt im kontinuierlichen Fall auf der Thieleschen Differentialgleichung der Prämienreserve, im diskontinuierlichen Fall dagegen auf ihrer Differenzengleichung. Beide Gleichungen sind mathematische Ausdrücke für die Gewinn- und Verlustrechnung eines unendlich kleinen oder eines endlichen Zeitabschnittes.

Am Anfang des Zeitabschnittes sind die Leistungen des Versicherers und die Gegenleistungen des Versicherten für den Zeitabschnitt gegeben; am Ende sind Sterblichkeit, Zinsfuss und Verwaltungskosten des Zeitabschnittes bekannt. Die Rechnungsgrundlagen, die Leistungen und Gegenleistungen von Versicherer und Versicherten sind somit erst am Ende der Versicherung vollständig bekannt.

3. Die grundsätzlichen Verschiedenheiten der beiden Systeme können deshalb wie folgt zusammengefasst werden:

*Prospektives System*

1. Das prospektive System arbeitet mit Hypothesen.
2. Leistungen und Gegenleistungen werden beim Beginn der Versicherung für die ganze Versicherungsdauer bestimmt.
3. Alle Versicherungen haben gemeinschaftliche Rechnungsgrundlagen, die schon beim Beginn der Versicherung festgelegt sind.
4. Die prospektiven Lebensversicherungen sind im *wahren* Sinn Versicherungen *mit* Gewinnbeteiligung.
5. Hier können vorzeitige Vertragslösungen vorkommen.

*Retrospektives System*

1. Das retrospektive System arbeitet ohne Hypothesen.
2. Leistungen und Gegenleistungen werden im Laufe der Versicherungszeit festgesetzt, und zwar nach Versicherungsbedürfnis und Zahlungsfähigkeit des Versicherten.
3. Jede Versicherung hat ihre eigenen Rechnungsgrundlagen; sie werden bestimmt durch die Erfahrungen des Versicherers über den Verlauf von Sterblichkeit, Zinsfuss und Verwaltungskosten in der Zeit zwischen Beginn und Ende der Versicherung.
4. Die retrospektiven Lebensversicherungen sind im *wahren* Sinn Versicherungen *ohne* Gewinnbeteiligung.
5. Hier kommen vorzeitige Vertragslösungen *niemals* vor.

4. Meinen Ausführungen entnimmt man, dass die Versicherungsarten beider Systeme verschieden sind. Selbst ähnliche Formen sind grundsätzlich verschieden (z. B. die der Lebensversicherung mit gleichbleibenden Leistungen und Gegenleistungen während der ganzen

Versicherungszeit), weil die prospektive Lebensversicherung durch eine Äquivalenzgleichung bestimmt wird, die ihr entsprechende retrospektive Form dagegen durch eine Differentialgleichung (Differenzen-gleichung), d. h. durch *unendlich viele* Äquivalenzgleichungen.

### Die Hauptversicherungsarten des retrospektiven Systems

5. Ein Vergleich zwischen den einfachsten prospektiven und retrospektiven Versicherungsarten dürfte wohl die beste Weise sein, um die Verschiedenheiten beider Systeme zu beleuchten. Wir konstruieren zu diesem Zweck eine retrospektive Lebensversicherungsordnung für die Mitglieder einer Vereinigung. Die Wahl eines konkreten Beispiels schränkt die Allgemeinheit nicht ein, sondern vereinfacht die ganze Darstellung wesentlich.

6. Zunächst wird eine Sparvereinigung gebildet: Die Beiträge der Mitglieder und die Zinsen des Kapitals der Vereinigung werden nach Abzug der Verwaltungskosten den einzelnen Konten gutgeschrieben. Der Saldo eines Kontos gibt also die Sparsumme an, welche dem betreffenden Mitglied gehört. Da die Summe sämtlicher Sparsummen gleich dem Kapital der Vereinigung ist, so muss die Sparsumme Anteil des Mitgliedes an diesem Kapital sein. Die Grösse der Sparsumme hängt von den bezahlten Beiträgen des Mitgliedes, von der Verzinsung des Kapitals der Vereinigung und von den Verwaltungskosten ab. Stirbt das Mitglied oder tritt es aus, so wird die Sparsumme ausbezahlt.

Nun wird das Gesetz der Vereinigung wie folgt abgeändert: *Stirbt das Mitglied, so wird nicht mehr die Sparsumme, sondern ein im voraus verabredeter Betrag ausbezahlt.*

Durch diese Änderung wird die Sparvereinigung in eine Lebensversicherungsvereinigung verwandelt, und zwar in eine auf retrospektiver Grundlage.

7. Im Fall des Todes wird die vorbestimmte Summe (die Sterbesumme) ausbezahlt; die Sparsumme fällt aber der Vereinigung zu. Die übrigen Mitglieder der Vereinigung erben die Sparsummen der Verstorbenen.

Beim Todesfall wird also jedem Konto sein Anteil an der fälligen Sterbesumme debitiert und sein Anteil an der fälligen Sparsumme

kreditiert. Dadurch wird die Sparsumme nicht nur durch die einbezahlten Mitgliederbeiträge, die Verzinsung des Kapitals der Vereinigung und durch die Verwaltungskosten bestimmt, sondern auch durch die ausbezahlten Sterbesummen und die eingenommenen Sparsummen.

8. Die Art einer retrospektiven Lebensversicherung ist durch die Sterbesumme gegeben.

Ist die Sterbesumme konstant und grösser als Null, so ist die Versicherung eine *retrospektive Lebensversicherung mit konstanter, nicht verschwindender Sterbesumme*.

Ist die Sterbesumme die um eine konstante, nicht verschwindende Grösse vermehrte Sparsumme, so ist die Versicherung eine *retrospektive Lebensversicherung mit konstanter, nicht verschwindender Risikosumme*.

Diesen zwei Lebensversicherungsarten schliessen sich systematisch folgende an:

*die retrospektive Lebensversicherung mit überall verschwindender Sterbesumme*

und

*die retrospektive Lebensversicherung mit überall verschwindender Risikosumme.*

Bei der ersten findet keine Auszahlung im Fall des Todes statt; die Sparsumme wird verzinst, solange der Versicherte lebt. Die zweite ist keine eigentliche Versicherung, sondern ein Aufsparen; beim Tod wird die Sparsumme ausbezahlt.

Durch Kombination dieser vier Typen lassen sich zahlreiche andere retrospektive Lebensversicherungsarten bilden; ein reiches Feld für ideenreiche Versicherungsmathematiker!

Eine retrospektive Lebensversicherung besteht, vom Tod oder Austritt des Mitgliedes abgesehen, solange die Beiträge und die Sparsummen zusammen ihre Anteile an den Sterbe- und Verwaltungskosten der Vereinigung decken können.

9. Die Sparsumme  ${}_tV$  einer retrospektiven Lebensversicherung mit der Sterbesumme 1 und der Nettobeitragsintensität  $\bar{P}$  ist zur Zeit  $t \geq 0$  durch die Beziehung

$${}_tV = 1 + (\bar{P} + \delta) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{D_x}{D_{x+t}}$$

bestimmt, falls die Sparsummé  ${}_0V$  für  $t = 0$  verschwindet. Durch Auflösen nach  $\bar{P}$  folgt

$$\bar{P} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t} + {}_tV D_{x+t}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}},$$

eine Beziehung, der man entnimmt, dass die betrachtete retrospektive Versicherung *sämtliche* prospektiven Kombinationen *der temporären Todesfallversicherung (Sterbesumme 1) mit der Erlebensfallversicherung (Erlebensfallsumme  ${}_tV$ )* umfasst, solange  ${}_tV \geq 0$  ist.  $\bar{P}$  ist Nettoprämiensintensität.

Die Versicherung fällt lebenslänglich aus, wenn  $\bar{P} \geq \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$  ist; mit  $\bar{P} < \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$  dagegen wird sie von endlicher Dauer  $n$ , bestimmt durch  $\bar{P} = \frac{D_x - D_{x+n}}{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+n}} - \delta$ .

Ist  $\bar{P} > \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$ , so nimmt die Sparsumme beständig zu; für  $\bar{P} = \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$  wächst sie noch derart, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} {}_tV = 1$  wird.

Falls  $\bar{P} < \frac{1}{\bar{a}_x} - \delta$  ist, steigt die Sparsumme von 0 auf  ${}_{\xi-x}V$ , wenn  $t$  von 0 bis  $\xi - x$  wächst, nimmt dann dauernd ab und verschwindet für  $t = n$ .  $\xi$  und  ${}_{\xi-x}V$  sind durch die Gleichung  $\bar{P} + \delta = (\mu_\xi + \delta)(1 - {}_{\xi-x}V)$  bestimmt.

10. Die obigen Entwicklungen setzen voraus, dass Versicherung und Beitragszahlung gleichzeitig aufhören. Da die Versicherung besteht, solange das Mitglied am Leben ist und nicht austritt und solange eine Sparsumme vorhanden ist, bedeutet das Einstellen der Beitragszahlung keineswegs, dass auch die Versicherung erlischt.

Wird die Beitragszahlung zur Zeit  $t = m$  eingestellt, so ist die Sparsumme  ${}_tV$  für  $t \geq m$  durch

$${}_tV = 1 + \delta \frac{\bar{N}_{x+m} - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}} - (1 - {}_mV) \frac{D_{x+m}}{D_{x+t}}$$

gegeben.

Wird diese Gleichung nach  ${}_mV$  aufgelöst, so folgt

$${}_mV = \frac{\bar{M}_{x+m} - \bar{M}_{x+t} + {}_tV D_{x+t}}{D_{x+m}}.$$

Dieser Beziehung entnimmt man, dass die Versicherung nach dem Aufhören der Beitragszahlung sämtliche prospektiven Kombinationen der temporären Todesfallversicherung (Sterbesumme 1) mit der Erlebensfallversicherung (Erlebensfallsumme  ${}_tV$ ) enthält, solange  ${}_tV \geq 0$  bleibt.  ${}_mV$  ist dabei Einmaleinlage.

Für  ${}_mV \geq 1 - \delta \bar{a}_{x+m}$  ist die Versicherung lebenslänglich; mit  ${}_mV < 1 - \delta \bar{a}_{x+m}$  wird sie von endlicher Dauer  $n - m$ , bestimmt durch

$${}_mV = \frac{\bar{M}_{x+m} - \bar{M}_{x+n}}{D_{x+m}}.$$

Ist  ${}_mV > 1 - \delta \bar{a}_{x+m}$ , so nimmt die Sparsumme beständig mit  $t$  zu; sie wächst gegen den Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} {}_tV = 1$ , wenn  ${}_mV = 1 - \delta \bar{a}_{x+m}$  ist.

Ist  ${}_mV < 1 - \delta \bar{a}_{x+m}$ , so verschwindet die Sparsumme für  $t = n$ , d. h. die Versicherung hört zur Zeit  $t = n$  auf.

### Das Optierungsproblem

11. Im prospektiven Lebensversicherungssystem müssen bei Beginn der Versicherung Leistungen und Gegenleistungen für die ganze Versicherungsdauer festgelegt werden. Im retrospektiven System können derartige Festsetzungen im Laufe der Versicherungszeit getroffen werden, und zwar nach Versicherungsbedürfnis und Zahlungsfähigkeit des Mitgliedes.

Versicherungsbedürfnis und Zahlungsfähigkeit sind während des Lebenslaufes eines Menschen grossen Änderungen unterworfen. Für jüngere Personen ohne Versorgungspflicht genügt das Versichern von Sterbesummen, die Begräbniskosten und ärztliches Honorar zu decken vermögen. Wird die Sterbesumme derart dem Versicherungsbedürfnis angepasst, so wächst die Sparsumme der Versicherung zunächst stark. Treten später Versorgungspflichten hinzu, z. B. infolge Heirat, so muss die Sterbesumme entsprechend erhöht werden. Dieses Erhöhen der Sterbesumme vergrössert den Beitrag nicht, es sei denn, dass das

Mitglied eine Beitragserhöhung wünscht. Ein Erhöhen der Sterbesumme lässt nur die Sparsumme langsamer anwachsen. Wenn später die Versorgungspflichten wieder wegfallen, die Sterbesumme herabgesetzt werden kann, beginnt die Sparsumme wieder schneller anzuwachsen. Auf diese Weise wird es gelingen, die Sterbesumme einer retrospektiven Lebensversicherung ohne Beitragserhöhung innerhalb weiter Grenzen wertbeständig zu machen.

Auch die Zahlungsfähigkeit des Mitgliedes ist während der Lebenszeit oft grossen Schwankungen unterworfen. Wird die Höhe der Beiträge diesen Schwankungen angepasst, so wird es möglich, den durch die Lebensversicherung erzielten Schutz, von der wechselnden Wirtschaftslage unberührt, zu erhalten.

12. Die folgenden Betrachtungen setzen voraus, dass der Beitrag nicht geändert wird.

Die Sterbesumme ist nicht frei wählbar; ihre Grösse ist vom Gesundheitszustand im Wahlaugenblick abhängig. Es ist daher möglich, dass wegen dieser Abhängigkeit das Mitglied auch zu einem späteren Zeitpunkt seine Sterbesumme nicht beliebig erhöhen kann. Das Risiko, die Sterbesumme nicht beliebig vergrössern zu können, wird ausgeschaltet, wenn die Anfangssterbesumme derart gewählt wird, dass sie das grösste Bedürfnis nach Todesfallkapital im Leben des Versicherten erfüllt.

Diese Lösung ist unbefriedigend; sie bedeutet oft überflüssige Versicherungsausgaben, welche in diesem Fall mit einer Verkleinerung der Sparsumme, d. h. mit einer Verkleinerung der Selbstversorgung gleichbedeutend sind. Bedeutet  $S$  die ausreichende Sterbesumme in den ersten  $t$  und  $M$  die Sterbesumme in den darauf folgenden  $n - t$  Jahren, dann ist die Verkleinerung der Sparsumme zur Zeit  $n$  durch

$$(M - S) \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{v+t}}{D_{x+n}}$$

gegeben. Da die  $M$ -Summen oft zehn- bis zwanzigmal grösser als die  $S$ -Summen sind, handelt es sich um beträchtliche Verkleinerungen.

Indessen lässt sich die retrospektive Lebensversicherung so gestalten, dass auch das oben erwähnte Risiko gedeckt wird. Die Lebensversicherung wird mit einer Optierungsversicherung kombiniert. Eine derartige Verbindung wird im folgenden als Lebensversicherung mit Optierungsrecht bezeichnet.

13. Eine retrospektive Lebensversicherung mit Optierungsrecht operiert mit zwei Sterbesummen: der ursprünglichen Summe  $S$  und der Optierungssumme  $M$ . Das Optierungsrecht bedeutet, dass ungeachtet des Gesundheitszustandes das Mitglied zu jeder Zeit die Sterbesumme der Versicherung bis zur Optierungssumme erhöhen kann. Es muss ausdrücklich betont werden, dass bei Optierung die Optierungssumme nicht überschritten werden darf. Ist eine grössere Summe erwünscht, so muss das gewöhnliche Verfahren bei Summenerhöhung angewendet werden.

Die Technik der retrospektiven Lebensversicherung mit Optierungsrecht kann direkt ausgebildet werden; Kenntnis der Optierungsversicherung ist nicht notwendig.

Wir betrachten eine retrospektive Lebensversicherung mit Optierungsrecht, für die  $S$  Sterbesumme beim Eintritt,  $M$  Optierungssumme,  ${}_0V$  einmaliger Nettobeitrag und  $\bar{P} dt$  Nettobeitrag im Intervall  $(t, t + dt)$  bedeuten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass nur entweder die Sterbesumme  $S$  oder die Optierungssumme  $M$  gewählt wird.

Zur Zeit  $t$  seien von ursprünglich  $l_x$  Personen noch  $l_{x+t}$  Personen am Leben; von ihnen haben  $l_{x+t}^0$  optiert und  $l_{x+t}^{n0}$  nicht optiert. Der Summenbestand wird dann zur Zeit  $t$  die Grösse

$$M l_{x+t}^0 + S l_{x+t}^{n0}$$

haben. Nach Einführen der Funktionen

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= \text{Sterbeintensität aller Versicherten,} \\ \mu_{x+t}^0 &= \text{Sterbeintensität der Optanten,} \\ \mu_{x+t}^{n0} &= \text{Sterbeintensität der Nichtoptanten,} \\ \mu_{x+t}^s &= \text{Sterbeintensität im Summenbestand,} \end{aligned}$$

haben wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} l_{x+t} &= l_{x+t}^0 + l_{x+t}^{n0}, \\ l_{x+t} \mu_{x+t} &= l_{x+t}^0 \mu_{x+t}^0 + l_{x+t}^{n0} \mu_{x+t}^{n0}, \\ \{M l_{x+t}^0 + S l_{x+t}^{n0}\} \mu_{x+t}^s &= M l_{x+t}^0 \mu_{x+t}^0 + S l_{x+t}^{n0} \mu_{x+t}^{n0}. \end{aligned}$$

Führen wir den durch  $l_{x+t}^{n0} = \theta_{x+t} l_{x+t}$  definierten Nichtoptanten-quotienten  $\theta_{x+t}$  ein, so gehen sie über in

$$\mu_{x+t} = (1 - \theta_{x+t}) \mu_{x+t}^0 + \theta_{x+t} \mu_{x+t}^{n0}$$

und

$$\{M(1 - \theta_{x+t}) + S\theta_{x+t}\} \mu_{x+t}^s = M(1 - \theta_{x+t}) \mu_{x+t}^0 + S\theta_{x+t} \mu_{x+t}^{n0}.$$

Indem wir  $\theta_{x+t}$  eliminieren, erhalten wir

$$M(\mu_{x+t} - \mu_{x+t}^{n0})(\mu_{x+t}^s - \mu_{x+t}^0) = S(\mu_{x+t} - \mu_{x+t}^0)(\mu_{x+t}^s - \mu_{x+t}^{n0}),$$

eine Beziehung zwischen den vier Sterbeintensitäten  $\mu_{x+t}$ ,  $\mu_{x+t}^0$ ,  $\mu_{x+t}^{n0}$  und  $\mu_{x+t}^s$ .

14. Aus den obigen Gleichungen folgt

$$\mu_{x+t}^{n0} = \mu_{x+t} = \mu_{x+t}^s, \quad \text{wenn } \theta_{x+t} = 1,$$

und

$$\mu_{x+t}^0 = \mu_{x+t} = \mu_{x+t}^s, \quad \text{wenn } \theta_{x+t} = 0 \text{ ist.}$$

Keine Optierung und vollständige Optierung führen beide zum Ergebnis  $\mu_{x+t}^s = \mu_{x+t}$ .

Weil Todesfälle innerhalb jeder Personengruppe vorkommen können, wird  $\mu_{x+t}^{n0} > 0$ , für  $\theta_{x+t} < 1$ .

Obwohl der Fall  $\mu_{x+t}^{n0} = 0$  nicht eintreffen kann, ist er bemerkenswert. Für die Annahme  $\mu_{x+t}^{n0} = 0$  enthalten die Gleichungen

$$\{M(1 - \theta_{x+t}) + S\theta_{x+t}\} \mu_{x+t}^s = M(1 - \theta_{x+t}) \mu_{x+t}^0 = M\mu_{x+t}$$

die ökonomischen Konsequenzen einer überall verschwindenden Sterblichkeit der Nichtoptanten.

Schliessen sämtliche  $l_x$  Personen Versicherungen ohne Optierungsrecht zur Summe  $M$  ab oder optieren alle Versicherte im Augenblick ihres Todes, so sind in beiden Fällen die ökonomischen Wirkungen die des Verschwindens der Sterblichkeit der Nichtoptanten.

Aus meinen Darlegungen geht hervor, dass die Sparsumme  ${}_tW$  zur Zeit  $t$  durch

$${}_tW = M - (M - {}_0V) \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\bar{P} + \delta M) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

gegeben wird.

Anderseits ist die Sparsumme  ${}_t V$  einer Versicherung ohne Optierungsrecht mit der Sterbesumme  $S$  zur Zeit  $t$  durch

$${}_t V = S - (S - {}_0 V) \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\bar{P} + \delta S) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

gegeben. Die Differenz

$${}_t V - {}_t W = (M - S) \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

gibt den Endwert der Kosten des Optierungsrechtes im Zeitabschnitt  $(0, t)$  an. Dieser Endwert ist genau gleich der Verkleinerung der Sparsumme zur Zeit  $t$ , die bei Versicherungen ohne Optierungsrecht entsteht, wenn die Sterbesumme  $M$  anstatt der Sterbesumme  $S$  gewählt wird.

Ferner sieht man, dass die Nichtoptanten alle Kosten der Optierung tragen müssen.

15. Die Möglichkeit, dass sämtliche Mitglieder mit schlechter Gesundheit optieren wollen, und die Möglichkeit der Optierung am Sterbebett geben doch nicht zu den oben beschriebenen Konsequenzen Anlass, weil Todesfälle unter Nichtoptanten eintreffen können, weil Mitglieder bei guter Gesundheit optieren wollen, wenn sie grössern Versicherungsschutzes bedürfen und weil Versicherte mit schlechter Gesundheit, die optiert haben, unter Umständen lange leben können. Die ökonomische Lage der Nichtoptanten wird daher besser als im Fall  $\mu_{x+t}^{n0} = 0$ , weil die durch die Optierung hervorgerufenen Mehrausgaben kleiner sind und weil sie gemeinsam von Nichtoptanten und Optanten getragen werden.

Die Sterbeintensität der Nichtoptanten ist für  $\theta_{x+t} = 1$  durch

$$\mu_{x+t}^{n0} = \mu_{x+t}$$

bestimmt. Die übrigens sehr wahrscheinliche Annahme, dass die Sterblichkeit der Optanten grösser sei als die Sterblichkeit aller Versicherten, bedeutet, dass

$$\mu_{x+t}^{n0} < \mu_{x+t}$$

ausfällt, wenn  $\theta_{x+t} < 1$  ist.

Die Sterbeintensität der Nichtoptanten lässt sich als Funktion von  $\theta_{x+t}$  auffassen; sie hat für  $\theta_{x+t} = 1$  den Wert  $\mu_{x+t}$  anzunehmen

und für  $\theta_{x+t} < 1$  kleiner als  $\mu_{x+t}$  zu bleiben. Ist  $k_{x+t} < 1$  eine nur von  $x+t$  abhängige Grösse, so ist

$$\mu_{x+t}^{n0} = \mu_{x+t} \{ \theta_{x+t} + (1 - \theta_{x+t}) k_{x+t} \}$$

eine derartige Funktion. Führen wir diese Funktion ein, erhalten wir

$$\mu_{x+t}^0 = \mu_{x+t} \{ 1 + \theta_{x+t} (1 - k_{x+t}) \}$$

und

$$\mu_{x+t}^s = \mu_{x+t} \frac{M - (M - S) \{ k_{x+t} \theta_{x+t} + (1 - k_{x+t}) \theta_{x+t}^2 \}}{M - (M - S) \theta_{x+t}}.$$

16. Durch Einsetzen der kleinsten Wurzel der Gleichung

$$(M - S) \theta_{x+t}^2 - 2M \theta_{x+t} + M = 0,$$

d. h. von

$$\theta_{x+t} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{S}{M}}}$$

in die vorangehende Bestimmungsgleichung, erhält man für den Maximalwert der Funktion  $\mu_{x+t}^s$  den Ausdruck

$$\text{Max } \mu_{x+t}^s = \mu_{x+t} \left\{ k_{x+t} + \frac{2(1 - k_{x+t})}{1 + \sqrt{\frac{S}{M}}} \right\}.$$

Den Ungleichungen

$$\text{Max } \mu_{x+t}^s < (2 - k_{x+t}) \mu_{x+t} < 2 \mu_{x+t}$$

entnimmt man, dass der Maximalwert der Summensterbeintensität  $\mu_{x+t}^s$  immer kleiner ist als die doppelte Sterbeintensität aller Versicherten.

Ebenso folgt aus

$$1 + \theta_{x+t} (1 - k_{x+t}) \leq 2 - k_{x+t} < 2,$$

dass die Sterbeintensität der Optanten  $\mu_{x+t}^0$  niemals die doppelte Sterbeintensität  $\mu_{x+t}$  sämtlicher Versicherten übersteigen kann.

Durch plausible Annahmen über die Grösse  $k_{x+t}$  lassen sich diese Abschätzungen noch verschärfen.

Die Optierungskosten können jetzt ohne Schwierigkeit abgeschätzt werden. Für die ohne Optierungsrecht abgeschlossene Versicherung beträgt die Sparsumme nach  $t$  Jahren

$${}_t V = S - (S - {}_0 V) \frac{D_x}{D_{x+t}} + (\bar{P} + \delta S) \frac{\bar{N}_x - \bar{N}_{x+t}}{D_{x+t}},$$

für die mit Optierungsrecht abgeschlossene dagegen

$${}_t V^s = S - (S - {}_0 V) \frac{D_x^s}{D_{x+t}^s} + (\bar{P} + \delta S) \frac{\bar{N}_x^s - \bar{N}_{x+t}^s}{D_{x+t}^s}.$$

Die Differenz  ${}_t V - {}_t V^s$  stellt den Endwert der Optierungskosten zur Zeit  $t$  dar. In der ersten Bestimmungsgleichung für die Sparsumme wird die gegebene Sterbeintensität  $\mu_{x+t}$ , in der zweiten die abgeschätzte Sterbeintensität  $\mu_{x+t}^s$  benutzt.

17. In Beständen von der Mächtigkeit des Kontinuums lässt sich die Optierungssumme beliebig gross wählen. In Wirklichkeit hat man sich aber mit Optierungssummen bescheidener Grösse zu begnügen. Je nach dem Umfang der Lebensversicherungsvereinigung kann die Summe  $M$  z. B. wie folgt bemessen werden:

A. Für sehr grosse Vereinigungen

$$M = \frac{\bar{P} \bar{a}_{x:\bar{n}} + {}_0 V}{\bar{A}_{x:\bar{n}}^1}.$$

Die Versicherungsdauer  $n$  ist um so kleiner zu wählen, je grösser die Vereinigung ist.

B. Für Vereinigungen mittlerer Grösse

$$M = \frac{\bar{P} \bar{a}_x + {}_0 V}{\bar{A}_x}.$$

C. Für kleine Vereinigungen

$$M = \frac{\bar{P} \bar{a}_{x:\bar{n}} + {}_0 V}{\bar{A}_{x:\bar{n}}}.$$

Je kleiner die Vereinigung ist, um so kleiner ist  $n$  anzunehmen.

In den obigen Betrachtungen ist mit voller Optierung, d. h. mit Optierung von  $S$  bis  $M$  gerechnet. Aber auch teilweise Optierung, wie z. B. von  $S$  bis  $K < M$  kann stattfinden, ebenso Optierung rückwärts von  $M$  bis  $S$  oder sogar bis Null. Nur eine Art Optierung ist nicht möglich, nämlich die Optierung über die Summe  $M$  hinaus. Eine derartige Optierung lässt sich nur durchführen, falls der Gesundheitszustand des Versicherten als befriedigend betrachtet werden kann.

Ganzes oder teilweises Einstellen der Beitragszahlung verändert die Optierungssumme nicht, weil eine solche Massnahme höchstens ein stufenweises Abnehmen der Sparsumme bedeuten kann. Wird dagegen ein Vorschuss von der Grösse  $K$  auf der Sparsumme ausbezahlt, so sind Optierungssumme  $M$  und Sparsumme  $S$  um  $K$  zu vermindern, wenn ungünstiger Gesundheitszustand vorliegt. Ist dies nicht der Fall, bleiben die Summen  $M$  und  $S$  natürlich ungeändert.

### Das Verteilungsproblem

18. Die Einnahmen und Ausgaben der Lebensversicherungsvereinigung sind unter die Mitglieder zu verteilen. Die folgenden Betrachtungen setzen voraus, dass diese Verteilung nach der Regel erfolgt: Das einzelne Mitglied darf nicht auf Kosten der Vereinigung begünstigt werden; umgekehrt darf die Vereinigung nicht auf Kosten des einzelnen Mitgliedes begünstigt werden.

Um Wiederholungen zu vermeiden, nennen wir diese Regel die Vertrauensregel, weil sie das Vertrauensverhältnis, das zwischen den Mitgliedern einer Lebensversicherungsvereinigung bestehen muss, zum Ausdruck bringt.

Einnahmen und Ausgaben sind nach der Vertrauensregel zu verteilen, somit

1. die Zinsen nach den einzelnen Sparsummen;
2. die fälligen Sterbesummen und die Sparsummen der verstorbenen Mitglieder nach dem Todesrisiko des einzelnen Mitgliedes;
3. die Verwaltungskosten nach den Ausgaben, zu denen das einzelne Mitglied Anlass gegeben hat.

19. Das Todesrisiko hängt teils von Alter und Gesundheitszustand des Mitgliedes beim Eintritt und teils von der gewählten Versicherung ab. Eine Person, die mit dem Alter  $x$  eintritt, kann deshalb sehr wohl

das Todesrisiko eines Alters  $y$  aufweisen;  $y$  ist — je nach Umständen — grösser, gleich oder kleiner als  $x$ . Das so definierte Alter  $y$  wollen wir biologisches Alter nennen;  $x$  wird als natürliches Alter bezeichnet.

Um der Vertrauenregel folgen zu können, muss bei der Risikobestimmung zur Zeit  $t$  das natürliche Alter  $x + t$  durch das biologische  $y + t$  ersetzt werden.

Das biologische Alter  $y + t$  lässt sich als Funktion des natürlichen Alters  $x + t$  auffassen; diese Funktion ist implizite durch

$$\mu_{y+t}^N = \mu_{x+t}^G$$

gegeben. Hier bedeutet  $\mu_{y+t}^N$  die Sterbeintensität normaler Leben,  $\mu_{x+t}^G$  die Sterbeintensität in der Risikogruppe, der das Mitglied angehört.

Eine Risikogruppe wird sowohl durch den Gesundheitszustand beim Eintritt als auch durch die gewählte Versicherungsform bestimmt. Aus den vielen Risikogruppen, die sich derart aufstellen lassen, wird gewöhnlich die grösste als Gruppe normaler Leben gewählt.

Das beschriebene Verfahren ermöglicht, sämtliche Leben als normale Leben zu betrachten.

20. Die Vertrauenregel bestimmt, dass die Verwaltungskosten der Vereinigung nach den Ausgaben, zu denen das einzelne Mitglied Anlass gegeben hat, zu verteilen sind.

Die Verwaltungskosten sind teilweise *persönliche* und teilweise *allgemeine* Kosten.

Die persönlichen Kosten sind die Verwaltungskosten, die durch das Benehmen des Mitgliedes bestimmt sind, z. B. die Kosten, die mit dem Eintritt in die Vereinigung verbunden sind, die Kosten des Einkassierens der Beiträge, die Gebühren für besondere Leistungen usw. Es ist einleuchtend, dass ein Mitglied, welches Sonderausgaben verursacht, diese selbst zu tragen hat. Eine Belastung der übrigen Mitglieder mit solchen Ausgaben steht im Widerspruch zur Vertrauenregel.

Die allgemeinen Kosten sind diejenigen Verwaltungskosten, die für sämtliche Mitglieder gemeinsam sind; sie sind deshalb auf alle Mitglieder zu verteilen. Die Verteilung erstreckt sich daher auf Mitglieder, die noch Beiträge zahlen oder deren Beitragspflicht bereits erloschen ist, ebenso auf Mitglieder, die Versicherungen mit nicht verschwindender Sterbesumme oder mit Sterbesumme Null haben.

Die Kostenverteilung hat sich mithin nicht nach den Beiträgen oder nach den Sterbesummen zu richten; sie muss auf die Zahl der Versicherungen und auf die Sparsumme bezogen werden.

Die allgemeinen Kosten lassen sich in zwei Gruppen teilen. Die erste Gruppe umfasst alle Kosten, die für die Pflege des Versicherungsbestandes nötig sind, die zweite Gruppe die Kosten für die Verwaltung des Kapitals der Vereinigung.

Die Kosten der ersten Gruppe hängen von der Grösse des Bestandes, d. h. von der Anzahl der Versicherungen ab; die Kosten der zweiten Gruppe sind von der Grösse des Kapitals abhängig. Als Masszahlen für die Kostenverteilung sind Versicherungsbestand im ersten Fall und Sparsumme im zweiten Fall zu wählen.

21. Da die Grösse der Sparsumme für die Selbstversorgung ausschlaggebend ist, haben die Mitglieder der Vereinigung ein Recht auf Angaben über deren künftigen Wert. Solche Mitteilungen haben hypothetischen Charakter. Der Wert der Sparsumme ist unter der Voraussetzung anzugeben, dass der künftige Verlauf von Sterblichkeit, Zins und Verwaltungskosten mit den gegenwärtigen Erfahrungen der Vereinigung übereinstimmt.

Um derartige Auskünfte geben zu können, muss man sich einer aufklärenden Rechnungsgrundlage bedienen. Diese Grundlage, nach den gegenwärtigen Erfahrungen der Vereinigung konstruiert, ist auch bedeutsam für das Verteilungsverfahren.

22. Das Ziel der Verteilung ist im Bestimmen der Sparsumme des einzelnen Mitgliedes und im Ermitteln der Rechnungsgrundlagen für die einzelne Versicherung zu sehen.

Die Ausbildung der Technik der Verteilung bietet keine Schwierigkeiten grundsätzlicher Art. Im wesentlichen handelt es sich nur um eine Interpretation der Thieleschen Differentialgleichung oder der Differenzengleichung der Prämienreserve (Sparsumme). Hier wollen wir die Differentialgleichung heranziehen.

Wir nehmen an, dass ein Mitglied, dessen biologisches Alter beim Eintritt  $x$  war, zur Zeit  $t \geq 0$  die Sparsumme  ${}_tV$  besitze und dass seine Versicherung für den Zeitabschnitt  $(t, t + dt)$  durch die Sterbesumme  $S_t \geq 0$  und durch den Beitrag  $B_{x+t} dt$  gegeben sei. Für diese Versicherung lässt sich folgende Gewinn- und Verlustrechnung zur Zeit  $t + dt$  aufstellen:

Einnahmen	Ausgaben
Sparsumme zur Zeit $t$ ${}_t V$	Persönliche Kosten $\alpha_t dt$
Beitrag $B_{x+t} dt$	Anteil an den Kosten für die Pflege des Bestandes $\beta_t dt$
Zinsen $(\delta_t + \varepsilon_t) {}_t V dt$	Anteil an den Kosten für die Verwaltung des Kapitals $\varepsilon_t V dt$
	Anteil an den fälligen Risikosummen $\{S_t - {}_t V\} \mu_{x+t} dt$
	Sparsumme zur Zeit $t + dt$ ${}_{t+dt} V$

Bildet man die Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben, so erhalten wir die Thielesche Differentialgleichung der Sparsumme  ${}_t V$ .

Aus der Gewinn- und Verlustrechnung der Vereinigung für den Zeitabschnitt  $(t, t + dt)$  lassen sich unmittelbar folgende Intensitäten bestimmen:

Verzinsungsintensität  $\delta_t + \varepsilon_t$ ,  
 Intensität der Kosten zur Pflege des Bestandes  $\beta_t$ ,  
 Intensität der Kosten zur Verwaltung des Kapitals  $\varepsilon_t$ .

Auch wenn die fälligen Risikosummen und der Bestand der Risikosumme der Vereinigung zur Zeit  $t$  in Gruppen nach dem biologischen Geburtsjahr aufgeteilt sind, bietet die Bestimmung der Sterbeintensitäten  $\mu_{x+t}$  keine Schwierigkeit.

Da die persönlichen Kosten  $\alpha_t dt$ , der Beitrag  $B_{x+t} dt$  und die Sparsumme  ${}_t V$  bekannt sind, lässt sich die gesuchte Sparsumme zur Zeit  $t + dt$ ,  ${}_{t+dt} V$ , mit Hilfe der gefundenen Intensitäten leicht bestimmen.

Gleichzeitig sind auch die Rechnungsgrundlagen der Versicherung für den Zeitabschnitt  $(t, t + dt)$  gegeben, nämlich:

$$S_t, B_{x+t}, \varepsilon_t + \delta_t, \alpha_t, \beta_t, \varepsilon_t \text{ und } \mu_{x+t}.$$

23. Die obigen Entwicklungen setzen voraus, dass die im Zeitabschnitt  $(t, t + dt)$  verstorbenen und ausgetretenen Mitglieder ihre Anteile an den Einnahmen und Ausgaben der Vereinigung erhalten haben. Beim Austritt erhält ein Mitglied die Sparsumme  ${}_t V$ , vermehrt um seinen Anteil  ${}_{t+dt} V - {}_t V$ , also im ganzen die Summe  ${}_{t+dt} V$ . Die im betrachteten Zeitabschnitt ausgetretenen Mitglieder können mithin erst am Ende des Intervalls ihre Sparsumme erhalten.

Um dem Wunsch einer sofortigen Auszahlung der Sparsumme entgegenzukommen, muss man deshalb zur Zeit  $t$  eine vorläufige Verteilung mit späterer Nachregelung durchführen. Bei dieser vorläufigen Verteilung bedient man sich der erwähnten aufklärenden Rechnungsgrundlage. Wenn diese Grundlage mit der gegenwärtigen Erfahrung in Übereinstimmung gebracht ist, lässt sich manchmal die Nachregelung vermeiden. Sind

$$\delta'_t + \varepsilon'_t, \beta'_t, \varepsilon'_t \text{ und } \mu'_{x+t}$$

die Elemente der aufklärenden Rechnungsgrundlage, so sind bei der Nachregelung die Elementendifferenzen

$$\delta_t + \varepsilon_t - (\delta'_t + \varepsilon'_t), \beta_t - \beta'_t, \varepsilon_t - \varepsilon'_t \text{ und } \mu_{x+t} - \mu'_{x+t}$$

zu benutzen.