Algebraische Begründung einer Klasse versicherungstechnischer Approximationen

Autor(en): **Jecklin, Heinrich**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **50 (1950)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966862

Algebraische Begründung einer Klasse versicherungstechnischer Approximationen

Von *Heinrich Jecklin*, Zürich

Es seien a, b, c, d vier positive Grössen, welche die Gleichung erfüllen

$$a \cdot b = c \cdot d. \tag{1}$$

Ist nun weiter

$$a = c, \tag{2}$$

so ist klar, dass (1) eine Identität darstellt, und es gilt, bei gemachten Voraussetzungen (1) und (2) dann auch

$$a + b = c + d, \tag{3}$$

bzw., wenn f irgendeine Funktion

$$f(a)\, f(b) = f(c)\, f(d) \tag{4}$$

und

$$f(a) + f(b) = f(c) + f(d). \tag{5}$$

Wird umgekehrt gefordert, dass vier positive Grössen a, b, c, d die Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig erfüllen, so folgt, dass entweder $a = c$ und $b = d$, oder aber $a = d$ und $b = c$ sein muss, welch zweiter Möglichkeit aber wegen der Kommutativität von Addition und Multiplikation keine einschränkende Bedeutung zukommt.

Seien α, β, γ, δ vier weitere positive Grössen, für welche

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \delta \quad \text{und} \quad \alpha = \gamma,$$

so muss offenbar gelten, wenn für a, b, c, d die Voraussetzungen (1) und (2) bestehen

$$f(a, \alpha)\, f(b, \beta) = f(c, \gamma)\, f(d, \delta) \tag{6}$$

und

$$f(a, \alpha) + f(b, \beta) = f(c, \gamma) + f(d, \delta). \tag{7}$$

Nunmehr sollen die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden, indem lediglich gelten möge

$$\left.\begin{array}{lll} a\cdot b \sim c\cdot d, & \text{aber auch } a+b\sim c+d, & \text{wobei } a\sim c, \\ \alpha\cdot\beta\sim\gamma\cdot\delta, & \text{aber auch } \alpha+\beta\sim\gamma+\delta, & \text{wobei } \alpha\sim\gamma. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Wenn nun f eine Funktion ist, die sich bei kleiner Argumentänderung selbst ebenfalls nur wenig ändert, so wird auch bei genannten abgeschwächten Voraussetzungen (8) in gewisser Abgrenzung, deren genauere Untersuchung wir uns vorbehalten, immer noch gelten können, dass

$$f(a,\alpha)\,f(b,\beta)\sim f(c,\gamma)\,f(d,\delta) \tag{9}$$

und

$$f(a,\alpha)+f(b,\beta)\sim f(c,\gamma)+f(d,\delta)\,. \tag{10}$$

Um vorerst zu einer Nutzanwendung in der Versicherungstechnik zu gelangen, sei daran erinnert, dass erfahrungsgemäss für Quadrupel temporärer Renten gleicher Dauer von der Art $a_{xy\overline{n}|}$, $a_{x\overline{n}|}$, $a_{y\overline{n}|}$, $a_{\overline{n}|}$ innerhalb gewisser Grenzen (etwa bis zum Endalter 65) gilt:

$$a_{xy\overline{n}|}\,a_{\overline{n}|}\sim a_{x\overline{n}|}\,a_{y\overline{n}|}, \tag{11}$$

$$a_{xy\overline{n}|}+a_{\overline{n}|}\sim a_{x\overline{n}|}+a_{y\overline{n}|}. \tag{12}$$

Das sind aber gerade die Voraussetzungen (8), wenn wir $a_{xy\overline{n}|}=a$, $a_{\overline{n}|}=b$, $a_{x\overline{n}|}=c$, $a_{y\overline{n}|}=d$ setzen. Wir geben einige numerische Beispiele nach der Tafel S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %:

x	y	n	$a_{xy\overline{n}|}\cdot a_{\overline{n}|}$	$a_{x\overline{n}|}\cdot a_{y\overline{n}|}$	$a_{xy\overline{n}|}+a_{\overline{n}|}$	$a_{x\overline{n}|}+a_{y\overline{n}|}$
30	30	10	75,864	75,850	17,423	17,418
		20	223,575	223,278	29,936	29,885
		30	367,978	365,693	38,492	38,246
40	30	10	74,809	74,783	17,304	17,296
		20	214,934	214,362	29,383	29,288

Die Approximationen (11) und (12) brauchen übrigens nicht einfach als empirische Tatsachen hingenommen zu werden. Sind $g(t)$ und $h(t)$ zwei positive fallende Funktionen, $k(t)$ eine positive Funktion, so besagt die Ungleichung von Jensen,

dass
$$\sum_{t_0}^{t_n}{}^t g(t)\,h(t)\,k(t) \sum_{t_0}^{t_n}{}^t k(t) \geqslant \sum_{t_0}^{t_n}{}^t g(t)\,k(t) \sum_{t_0}^{t_n}{}^t h(t)\,k(t)\,.$$

Setzt man
$$g(t) = \frac{1}{l_x}\,l_{x+t}\,,\ h(t) = \frac{1}{l_y}\,l_{y+t}\,,\ k(t) = v^t\,,$$

so folgt
$$a_{xy\overline{n}|}\,a_{\overline{n}|} \geqslant a_{x\overline{n}|}\,a_{y\overline{n}|}\,.$$

Es ist aber klar, dass für nicht zu hohe Alter und kurze Dauern die beiden Seiten der letzten Ungleichung nicht stark differieren können, so dass also in gewissen Grenzen (11) gelten muss. Soweit wir $a_{xy\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|}$ setzen dürfen, würde die Existenz von (12) sich ergeben analog zur Folgerung von (3) aus (1) und (2). Man kann aber auch auf die bekannte Näherungsformel von Lidstone

$$P_{xy\overline{n}|} + P_{\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|}\,,$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{a_{xy\overline{n}|}} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \sim \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{a_{y\overline{n}|}}$$

abstellen, welche sich mit der Theorie von Cantelli begründen lässt. Aus der gleichzeitigen Existenz von

$$a_{xy\overline{n}|}\,a_{\overline{n}|} \sim a_{x\overline{n}|}\,a_{y\overline{n}|} \quad \text{und} \quad \frac{1}{a_{xy\overline{n}|}} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \sim \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} + \frac{1}{a_{y\overline{n}|}}$$

folgt aber, dass auch (12) gelten muss, was sofort ersichtlich ist, wenn die letztgenannte Ungleichung in der Form geschrieben wird

$$\frac{a_{\overline{n}|} + a_{xy\overline{n}|}}{a_{xy\overline{n}|}\,a_{\overline{n}|}} \sim \frac{a_{y\overline{n}|} + a_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}\,a_{y\overline{n}|}}\,,$$

worauf die Nenner weggestrichen werden können.

Die Versicherungswerte der gemischten Versicherung (jährliche Prämie, Einmaleinlage, Deckungskapital, prämienfrei reduzierte Summe) sind bekanntlich ganz einfache Funktionen von einem oder zwei Rentenwerten. Bezeichnen wir einen Versicherungswert der gemischten Versicherung mit G, versehen mit den üblichen Indizes für Eintrittsalter, Versicherungsdauer und — wenn nötig — abgelaufene Dauer,

so ist
$$
\begin{aligned}
{}_tG_{xy\overline{n}|} &= f(\mathrm{a}_{xy\overline{n}|},\ \mathrm{a}_{x+t,\,y+t,\,\overline{n-t}|}) &&= f(a, \alpha)\\
{}_tG_{x\overline{n}|} &= f(\mathrm{a}_{x\overline{n}|},\ \mathrm{a}_{x+t,\,\overline{n-t}|}) &&= f(c, \gamma)\\
{}_tG_{y\overline{n}|} &= f(\mathrm{a}_{y\overline{n}|},\ \mathrm{a}_{y+t,\,\overline{n-t}|}) &&= f(d, \delta)\\
{}_tG_{\overline{n}|} &= f(\mathrm{a}_{\overline{n}|},\ \mathrm{a}_{\overline{n-t}|}) &&= f(b, \beta)
\end{aligned}
$$

(wobei für Versicherungswerte, die nicht von der abgelaufenen Dauer abhängig sind, links der Index t und rechts der zweite Rentenwert nicht benötigt werden). In Anwendung von (9) und (10) folgt nun unmittelbar

$$ {}_tG_{xy\overline{n}|} \sim \frac{{}_tG_{x\overline{n}|} \cdot {}_tG_{y\overline{n}|}}{{}_tG_{\overline{n}|}} \tag{13} $$

und

$$ {}_tG_{xy\overline{n}|} \sim {}_tG_{x\overline{n}|} + {}_tG_{y\overline{n}|} - {}_tG_{\overline{n}|}. \tag{14} $$

Formel (14) besagt insbesondere, dass die Lidstonesche Approximation nicht nur für die jährliche Prämie der gemischten Versicherung auf zwei verbundene Leben, sondern auch für deren Einmaleinlage, Deckungskapital und prämienfrei reduzierte Summe analog verwendbar ist. Im übrigen lassen sich nun sofort eine Reihe von Näherungen für die Versicherungswerte der gemischten Versicherung zweier verbundener Leben deduzieren, wofür wir beispielshalber ein paar Approximationen für die Reserveformel ${}_tV_{xy\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\mathrm{a}_{x+t,\,y+t,\,\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{xy\overline{n}|}}$ anführen:

aus (11):

$$ {}_tV_{xy\overline{n}|} \sim 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t,\,\overline{n-t}|}\ \mathrm{a}_{y+t,\,\overline{n-t}|}\ \mathrm{a}_{\overline{n}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|}\ \mathrm{a}_{y\overline{n}|}\ \mathrm{a}_{\overline{n-t}|}} = 1 - \frac{(1 - {}_tV_{x\overline{n}|})\,(1 - {}_tV_{y\overline{n}|})}{(1 - {}_tV_{\overline{n}|})}, $$

aus (12):

$$ {}_tV_{xy\overline{n}|} \sim 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+t,\,\overline{n-t}|} + \mathrm{a}_{y+t,\,\overline{n-t}|} - \mathrm{a}_{\overline{n-t}|}}{\mathrm{a}_{x\overline{n}|} + \mathrm{a}_{y\overline{n}|} - \mathrm{a}_{\overline{n}|}}, $$

aus (13):

$$ {}_tV_{xy\overline{n}|} \sim \frac{{}_tV_{x\overline{n}|} \cdot {}_tV_{y\overline{n}|}}{{}_tV_{\overline{n}|}}, $$

aus (14):

$$ {}_tV_{xy\overline{n}|} \sim {}_tV_{x\overline{n}|} + {}_tV_{y\overline{n}|} - {}_tV_{\overline{n}|}. $$

Für drei verbundene Leben gelten innerhalb gewisser Grenzen die Approximationen

$$\mathsf{a}_{xyz\overline{n}|}\,\mathsf{a}_{\overline{n}|} \sim \mathsf{a}_{xy\overline{n}|}\,\mathsf{a}_{z\overline{n}|} \tag{15}$$

$$\mathsf{a}_{xyz\overline{n}|} + \mathsf{a}_{\overline{n}|} \sim \mathsf{a}_{xy\overline{n}|} + \mathsf{a}_{z\overline{n}|}, \tag{16}$$

welche in Analogie zu (11) und (12) aufgestellt und wie diese mit der Ungleichung von Jensen und der Theorie von Cantelli begründet werden können. Man folgert aus (15) und (16), wieder in Anwendung von (9) und (10), dass

$${}_tG_{xyz\overline{n}|} \sim \frac{{}_tG_{xy\overline{n}|} \cdot {}_tG_{z\overline{n}|}}{{}_tG_{\overline{n}|}} \tag{17}$$

und

$${}_tG_{xyz\overline{n}|} \sim {}_tG_{xy\overline{n}|} + {}_tG_{z\overline{n}|} - {}_tG_{\overline{n}|}. \tag{18}$$

Durch Vertauschung von x, y, z ergeben sich hiezu je zwei weitere Approximationen, und indem weiter die Versicherungswerte zweier verbundener Leben ihrerseits wieder durch Näherungen auf Basis einlebiger Werte ersetzt werden, ergibt sich eine Vielfalt von Approximationsformeln, wofür wir beispielsweise lediglich Näherungen für die Prämie $P_{xyz\overline{n}|} = \dfrac{1}{\mathsf{a}_{xyz\overline{n}|}} - d$ anführen. Man kann auch hier Formeln herleiten, indem man von der genäherten Wiedergabe des Rentenwertes $\mathsf{a}_{xyz\overline{n}|}$ durch (15) oder (16) ausgeht, oder indem man $P_{xyz\overline{n}|}$ direkt approximiert, ausgehend von (17) oder (18). Wir beschränken uns auf den letzteren Fall:

Aus (17) folgt:

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim \frac{P_{xy\overline{n}|}\,P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} \sim \frac{P_{xz\overline{n}|}\,P_{y\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} \sim \frac{P_{yz\overline{n}|}\,P_{x\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} \sim$$

$$\sim {}^1/_3\left(\frac{P_{xy\overline{n}|}\,P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + \frac{P_{xz\overline{n}|}\,P_{y\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + \frac{P_{yz\overline{n}|}\,P_{x\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}}\right),$$

und hieraus unter Verwendung von (13):

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim \frac{P_{x\overline{n}|}\,P_{y\overline{n}|}\,P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}\,P_{\overline{n}|}},$$

dagegen unter Verwendung von (14):

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim \frac{P_{x\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + \frac{P_{y\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} - P_{z\overline{n}|} \sim \frac{P_{x\overline{n}|}P_{y\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + \frac{P_{y\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} - P_{y\overline{n}|} \sim$$

$$\sim \frac{P_{x\overline{n}|}P_{y\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + \frac{P_{x\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} - P_{x\overline{n}|} \sim$$

$$\sim \frac{2}{3P_{\overline{n}|}}(P_{x\overline{n}|}P_{y\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|}P_{z\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}) - {}^1/_3(P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|}),$$

und unter Verwendung von (13) in diesen Näherungen weiter:

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim P_{xz\overline{n}|} + P_{yz\overline{n}|} - P_{z\overline{n}|} \sim P_{xy\overline{n}|} + P_{yz\overline{n}|} - P_{y\overline{n}|} \sim P_{xy\overline{n}|} + P_{xz\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} \sim$$

$$\sim {}^2/_3(P_{xy\overline{n}|} + P_{xz\overline{n}|} + P_{yz\overline{n}|}) - {}^1/_3(P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|}),$$

und schliesslich durch Addition von $0 \sim P_{yz\overline{n}|} + P_{\overline{n}|} - P_{y\overline{n}|} - P_{z\overline{n}|}$ zur vorletzten Approximation:

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim P_{xy\overline{n}|} + P_{xz\overline{n}|} + P_{yz\overline{n}|} - P_{x\overline{n}|} - P_{y\overline{n}|} - P_{z\overline{n}|} + P_{\overline{n}|}.$$

Aus (18) folgt:

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim P_{xy\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim P_{xz\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim P_{yz\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim$$

$$\sim {}^1/_3(P_{xy\overline{n}|} + P_{xz\overline{n}|} + P_{yz\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|}) - P_{\overline{n}|},$$

und hieraus unter Verwendung von (13):

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim \frac{P_{x\overline{n}|}P_{y\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + P_{z\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim \frac{P_{x\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + P_{y\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim$$

$$\sim \frac{P_{y\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}}{P_{\overline{n}|}} + P_{x\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} \sim$$

$$\sim {}^1/_3\left[\frac{1}{P_{\overline{n}|}}(P_{x\overline{n}|}P_{y\overline{n}|} + P_{x\overline{n}|}P_{z\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|}P_{z\overline{n}|}) + P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|}\right] - P_{\overline{n}|},$$

dagegen unter Verwendung von (14):

$$P_{xyz\overline{n}|} \sim P_{x\overline{n}|} + P_{y\overline{n}|} + P_{z\overline{n}|} - 2P_{\overline{n}|},$$

womit die Möglichkeiten noch nicht erschöpft sind.

Wir wollen es hiemit bewenden lassen, denn eine Ausdehnung der Darlegungen auf die Approximation von Versicherungswerten der gemischten Versicherung von mehr als drei verbundenen Leben würde in theoretischer Hinsicht gar nichts Neues bieten, und der Praktiker ist gegebenenfalls ohne weiteres in der Lage, anhand der genannten Spielregeln die ihm dienlichen Näherungsformeln zusammenzustellen. Interessant scheint uns vor allem der sich zeigende Dualismus zwischen additiver und multiplikativer Zusammensetzung der Näherungsformeln. Die verschiedenen Approximationsformeln sind naturgemäss nicht von gleicher Güte, wie dies auch aus den nachstehend aufgeführten numerischen Beispielen zu ersehen ist.

Beispiel I: ${}_tV_{xy\overline{n}|}$, Tafel S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %

$x = 30, \quad y = 35, \quad n = 20$

Formel 1: $${}_tV = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t,\, y+t,\, \overline{n-t}|}}{\mathfrak{a}_{xy\overline{n}|}}, \quad \text{(genau)}$$

» 2: $${}_tV = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t,\, \overline{n-t}|}\, \mathfrak{a}_{y+t,\, \overline{n-t}|}\, \mathfrak{a}_{\overline{n}|}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}\, \mathfrak{a}_{y\overline{n}|}\, \mathfrak{a}_{\overline{n-t}|}},$$

» 3: $${}_tV = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+t,\, \overline{n-t}|} + \mathfrak{a}_{y+t,\, \overline{n-t}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n-t}|}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|} + \mathfrak{a}_{y\overline{n}|} - \mathfrak{a}_{\overline{n}|}},$$

» 4: $${}_tV = \frac{{}_tV_{x\overline{n}|}\, {}_tV_{y\overline{n}|}}{{}_tV_{\overline{n}|}},$$

» 5: $${}_tV = {}_tV_{x\overline{n}|} + {}_tV_{y\overline{n}|} - {}_tV_{\overline{n}|}.$$

Formel	$t = 3$	$t = 6$	$t = 9$	$t = 12$	$t = 15$
	‰	‰	‰	‰	‰
1	113,72	237,11	371,04	517,22	678,89
2	113,53	236,71	370,50	516,63	678,40
3	113,27	236,23	369,79	515,79	677,61
4	113,61	236,85	370,73	516,97	678,81
5	113,58	236,78	370,61	516,83	678,69

Beispiel II: $P_{xyz\overline{n|}}$, Tafel S. M. 1921/30 zu $2^3/_4$ %

$x = 30, \quad y = 35, \quad z = 40$

Formel 1: $P = \dfrac{1}{\mathrm{a}_{xyz\overline{n|}}} - d$, (genau)

» 2: $P = \dfrac{P_{xy\overline{n|}} P_{z\overline{n|}}}{P_{\overline{n|}}}$,

» 3: $P = \dfrac{P_{xy\overline{n|}} P_{yz\overline{n|}}}{P_{y\overline{n|}}}$,

» 4: $P = \dfrac{P_{x\overline{n|}} P_{y\overline{n|}} P_{z\overline{n|}}}{P_{\overline{n|}} P_{\overline{n|}}}$,

» 5: $P = P_{xy\overline{n|}} + P_{yz\overline{n|}} - P_{y\overline{n|}}$,

» 6: $P = P_{xy\overline{n|}} + P_{z\overline{n|}} - P_{\overline{n|}}$,

» 7: $P = P_{x\overline{n|}} + P_{y\overline{n|}} + P_{z\overline{n|}} - 2P_{\overline{n|}}$,

» 8: $P = \dfrac{2}{3P_{\overline{n|}}}\left(P_{x\overline{n|}} P_{y\overline{n|}} + P_{x\overline{n|}} P_{z\overline{n|}} + P_{y\overline{n|}} P_{z\overline{n|}}\right) - {}^1/_3\left(P_{x\overline{n|}} + P_{y\overline{n|}} + P_{z\overline{n|}}\right)$,

» 9: $P = {}^1/_3\left[\dfrac{1}{P_{\overline{n|}}}\left(P_{x\overline{n|}} P_{y\overline{n|}} + P_{x\overline{n|}} P_{z\overline{n|}} + P_{y\overline{n|}} P_{z\overline{n|}}\right) + P_{x\overline{n|}} + P_{y\overline{n|}} + P_{z\overline{n|}}\right] - P_{\overline{n|}}$.

Formel	$n = 10$	$n = 15$	$n = 20$
	‰	‰	‰
1	94,354	63,914	50,073
2	94,501	64,317	51,025
3	94,418	64,083	50,446
4	94,913	64,648	51,483
5	94,337	63,877	50,026
6	94,297	63,804	49,935
7	94,621	63,947	50,003
8	94,813	64,405	50,956
9	94,716	64,175	50,479