Zum Zinsfussproblem

Von *H. Ruch*, Basel

Es ist bekannt, dass die Prämie für eine gemischte oder lebenslängliche Todesfallversicherung mit steigendem Zinsfuss im allgemeinen abnimmt, d. h. sofern nur die der Prämienberechnung zugrunde gelegte Absterbeordnung sich in vernünftigem Rahmen hält. Es gilt nämlich der

Satz 1. Die Bedingung, dass die Sterbeintensität μ_x oder an deren Stelle die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x mit zunehmendem Alter x niemals abnimmt, ist hinreichend dafür, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial P}{\partial i}$ der Prämie einer lebenslänglichen Versicherung nach dem Zinsfuss immer negativ bleibt.

Der Satz ist von C. L. Landré [1]) für den Fall der jährlichen Prämienzahlung bewiesen. Für kontinuierliche Prämienzahlung hat ihn A. Berger [2]) bewiesen. Es dürfte nicht schwer sein, den Satz auch für den Fall der gemischten Versicherung zu beweisen.

Nun gibt es aber Absterbeordnungen, die die genannte Bedingung nicht in allen Teilen erfüllen. Man denke nur an die Kindersterblichkeit, an den sogenannten Tuberkulosebuckel oder an den Einfluss des Klimakteriums. Immerhin ist für sämtliche Absterbeordnungen wenigstens die Forderung $l_{x+t} < l_x$ erfüllt. Doch sind andere Ausscheideordnungen denkbar, bei denen nicht einmal diese Forderung

---

[1]) C. L. Landré, Lebensversicherung, Jena 1921, S. 416.

[2]) A. Berger, Mathematik der Lebensversicherung, Wien 1939, S. 104.

ständig erfüllt ist. Es stellt sich nun die Frage, wie weit der obgenannte Satz 1 noch gilt, auch wenn die Sterbeintensität nicht immer monoton zunimmt. Dabei treffen wir für die Ausscheideordnung folgende Annahmen: Es sei p_t [1]) die t-jährige Wahrscheinlichkeit des Ausscheidens eines heute x-jährigen, also

$$p_t = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Es sei ferner $s_t = p_t v^t = p_t e^{-\delta t}$, so möge sowohl p_t als auch s_t monoton abnehmen. s_t ist, wie ohne weiteres ersichtlich, sowohl nach der Zinsintensität δ als auch nach dem Zinsfuss i differenzierbar. Für den Fall der kontinuierlichen Betrachtungsweise sei ferner vorausgesetzt, dass s_t nach t integrierbar sei. Alle diese Forderungen sind für jede Absterbeordnung zum vornherein erfüllt.

Wir werden die Rechnungen für die diskontinuierliche und die kontinuierliche Betrachtungsweise parallel führen, um so den Zusammenhang zwischen den beiden Betrachtungsweisen besser herausschälen zu können. Damit der Gang der folgenden Darlegungen nicht unterbrochen werde, schicken wir einige Hilfsformeln voraus. Es ist, wenn i, d, δ, r, v die bekannten Zinsgrössen bedeuten:

$$\frac{\partial f(x,v)}{\partial i} = v^2 \frac{\partial f(x,v)}{\partial d} = -v^2 \frac{\partial f(x,v)}{\partial v},$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial v} = r t s_t, \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{n} t s_t = \sum_{t=1}^{n} s_t + \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{i=t+1}^{n} s_i, \tag{2}$$

$$\left(\sum_{t=1}^{n} s_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} s_t^2 + 2 \sum_{t=1}^{n-1} s_t \sum_{i=t+1}^{n} s_i, \tag{3}$$

---

[1]) In der Folge werden die Indices x (Eintrittsalter des Versicherten) und ebenso die Indices $(n+1)$ (Versicherungsdauer) überall da weggelassen, wo kein Missverständnis möglich ist, um die Formeln nicht mit zuviel Indices zu belasten.

$$\frac{\partial s_t}{\partial \delta} = -t s_t\,, \tag{1a}$$

$$\int_a^b t s_t\, dt = a \int_a^b s_t\, dt + \int_a^b \int_t^b s_x\, dx\, dt, \tag{2a}$$

$$\left(\int_a^b s_t\, dt\right)^2 = 2\int_a^b s_t \int_t^b s_x\, dx\, dt. \tag{3a}$$

Die Funktion $x(a-2x)$ erreicht für $x = \frac{a}{4}$ ihr Maximum, und zwar ist dann:

$$x = \frac{a}{4}; \quad \text{Max.}\ [x(a-2x)] = \frac{a^2}{8}. \tag{4}$$

Die Gleichungen (2a) und (3a) können leicht auf dem Wege der partiellen Integration bestätigt werden.

Nun ist die jährlich zahlbare Prämie $P_{\overline{n+1|}}$ für eine gemischte Versicherung von der Dauer $(n+1)$

$$P_{\overline{n+1|}} = \frac{1}{\mathrm{a}_{\overline{n+1|}}} - d.$$

Die Forderung $\frac{\partial P}{\partial i} < 0$ führt daher zur Ungleichung:

$$\mathrm{a}^2 - \frac{\partial \mathrm{a}}{\partial v} > 0. \tag{5}$$

Für die kontinuierlich zahlbare Prämie $\overline{P}_{\overline{n+1|}}$ für eine gemischte Versicherung von der Dauer $(n+1)$ ist:

$$\overline{P}_{\overline{n+1|}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{a}}_{\overline{n+1|}}} - \delta.$$

Die Forderung $\frac{\partial \overline{P}}{\partial \delta} < 0$ führt daher zu der Ungleichung:

$$\overline{\mathrm{a}}^2 + \frac{\partial \overline{\mathrm{a}}}{\partial \delta} > 0. \tag{5a}$$

Der Rentenbarwert $\mathrm{a}_{\overline{n+1|}}$ lässt sich durch die Gleichung

$$\mathrm{a}_{\overline{n+1|}} = 1 + \sum_{t=1}^{n} s_t \tag{6}$$

darstellen. Differenzieren wir diese Gleichung partiell nach v, so erhalten wir, unter Berücksichtigung von Gleichung (1) und (2),

$$\frac{\partial \mathrm{a}}{\partial v} = r \sum_{t=1}^{n} t s_t = r \sum_{t=1}^{n} s_t + r \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{i=t+1}^{n} s_i . \tag{7}$$

Quadrieren wir die Gleichung (6), so erhalten wir, unter Berücksichtigung der Gleichung (3),

$$\mathrm{a}^2 = 1 + 2 \sum_{t+1}^{n} s_t + \left(\sum_{t=1}^{n} s_t \right)^2 = 1 + \sum_{t=1}^{n} (s_t + 2) s_t + 2 \sum_{t=1}^{n-1} s_t \sum_{i=t+1}^{n} s_i . \tag{8}$$

Demnach geht unsere Ungleichung (5) über in:

$$1 + \sum_{t=1}^{n} (s_t + 2 - r) s_t + \sum_{t=1}^{n-1} (2 s_t - r) \sum_{i=t+1}^{n} s_i > 0 . \tag{9}$$

Gehen wir zur kontinuierlichen Betrachtungsweise über. Der Rentenbarwert $\overline{\mathrm{a}}_{\overline{n+1|}}$ lässt sich durch die Gleichung

$$\overline{\mathrm{a}}_{\overline{n+1|}} = \int_0^{n+1} s_t \, dt \tag{6a}$$

darstellen. Differenzieren wir diese Gleichung partiell nach δ, so erhalten wir, unter Berücksichtigung von Gleichung (1a) und (2a),

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{a}}}{\partial \delta} = - \int_0^{n+1} t \, s_t \, dt = - \int_0^{n+1} \int_t^{n+1} s_x \, dx \, dt . \tag{7a}$$

Quadrieren wir die Gleichung (6a), so erhalten wir, unter Berücksichtigung der Gleichung (3a),

$$\overline{\mathrm{a}}^2 = \left(\int_0^{n+1} s_t \, dt \right)^2 = 2 \int_0^{n+1} s_t \int_t^{n+1} s_x \, dx \, dt . \tag{8a}$$

Demnach geht unsere Ungleichung (5a) über in:

$$\int_0^{n+1} (2 s_t - 1) \int_t^{n+1} s_x \, dx \, dt > 0 . \tag{9a}$$

Durch einen Grenzübergang liesse sich die Ungleichung (9) in die Ungleichung (9a) überführen. Wir wollen aber darauf verzichten, diesen Grenzübergang durchzuführen. Für uns ist wesentlich, dass in der einen Ungleichung (9) der Ausdruck $(2s_t - r)$, in der andern Ungleichung (9a) der ähnliche Ausdruck $(2s_t - 1)$ vorkommt. Die linke Seite der Ungleichungen (9) und (9a) kann nur dann negativ werden, wenn unter ihren Summanden eine genügend grosse Zahl negativ sind. Notwendige Bedingung dafür ist, dass von einem bestimmten t an $(2s_t - r)$ resp. $(2s_t - 1)$ negativ ausfällt.

Von jetzt an betrachten wir nur noch die Ungleichung (9). Wir wollen versuchen, eine möglichst grosse Anzahl negativer Glieder abzuspalten. Zu diesem Zweck bestimmen wir die ganze Zahl k so, dass

$$s_k \geqslant \frac{r}{2}, \qquad s_{k+1} < \frac{r}{2} \quad \text{ist.}$$

Ist $n \leqslant k$, so kommen in der Ungleichung (9) keine negativen Glieder vor.

Damit haben wir den Satz gewonnen:

Satz 2. Sei k diejenige ganze Zahl, für welche $D_{x+k} \geqslant \frac{r}{2} D_x$ und $D_{x+k+1} < \frac{r}{2} D_x$ und sei ferner $n \leqslant k$, so ist die partielle Ableitung der Prämie $P_{\overline{n+1}|}$ nach dem Zinsfuss immer negativ, wie auch im übrigen die Absterbeordnung beschaffen sei.

Ist $n > k$, so führt die Abspaltung der negativen Glieder der Ungleichung (9) zu der Ungleichung

$$\sum_{t=k+1}^{n-1} (r - 2s_t) \sum_{i=t+1}^{n} s_i < 1 + \sum_{t=1}^{k} (s_t + 2 - r)\, s_t + \sum_{t=k+1}^{n} (s_t + 2 - r)\, s_t + \sum_{t=1}^{k} (2s_t - r) \sum_{i=t+1}^{n} s_i \,.$$

Das dritte Glied auf der rechten Seite der Ungleichung kann noch weiter in einen negativen und in einen positiven Bestandteil zerlegt werden. Es ist nämlich:

$$\sum_{t=k+1}^{n} (s_t + 2 - r)\, s_t = \sum_{t=k+1}^{n} \left(2 - \frac{r}{2}\right) s_t - \sum_{t=k+1}^{n} \left(\frac{r}{2} - s_t\right) s_t = \frac{4-r}{2} \sum_{t=k+1}^{n} s_t - \frac{1}{2} \sum_{t=k+1}^{n-1} (r - 2s_t)\, s_t - \frac{(r - 2s_n)\, s_n}{2}$$

Dadurch geht unsere Ungleichung über in:

$$\frac{(r-2s_n)\,s_n}{2}+\sum_{t=1}^{n-1}(r-2s_t)\left[\frac{s_t}{2}+\sum_{i=t+1}^{n}s_i\right]<1+\sum_{t=1}^{k}(s_t+2-r)\,s_t+\frac{4-r}{2}\sum_{t=k+1}^{n}s_t+\sum_{t=1}^{k}(2s_t-r)\sum_{i=t+1}^{n}s_i\,. \tag{10}$$

Damit haben wir auch schon einen weitern Satz erhalten:

Satz 3. Die Ungleichung (10) *ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die partielle Ableitung* $\dfrac{\partial P}{\partial i}$ *negativ ist.*

Setzen wir nun auf der linken Seite der Ungleichung (10) $s_t=\dfrac{r}{4}$ so erreicht diese Seite unter Berücksichtigung von Gleichung (4) ihr Maximum. Es ist nämlich:

$$\frac{(r-2s_n)\,s_n}{2}<\frac{r^2}{16}$$

$$\sum_{t=1}^{n-1}(r-2s_t)\left[\frac{s_t}{2}+\sum_{i=t+1}^{n}s_i\right]<\sum_{t=1}^{n-1}(r-2s_t)\left(\frac{1}{2}+n-t\right)s_t<\frac{r^2}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}+n-t\right)=\frac{r^2}{16}\left[(n-k)^2-1\right].$$

Anderseits gelten die Glieder der rechten Seite der Ungleichung (10) die Ungleichungen:

$$\sum_{t=1}^{k}(s_t+2-r)\,s_t>k\,(s_k+2-r)\,s_k\geqslant\left(\frac{4-r}{4}\right)rk$$

$$\frac{4-r}{2}\sum_{t=k+1}^{n}s_t>0$$

$$\sum_{t=1}^{k}(2s_t-r)\sum_{i=t+1}^{n}s_i>0\,.$$

Daraus erhalten wir schliesslich die Ungleichung:

$$\frac{r^2}{16}(n-k)^2<1+\left(\frac{4-r}{4}\right)rk\,. \tag{11}$$

Diese Ungleichung lösen wir nun nach $(n - k)$ auf und erhalten endlich:

$$n - k < \frac{4}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{4 - r}{4}\right) r k} \, . \tag{12}$$

Daraus folgen die Sätze:

Satz 4. Übertrifft die Versicherungsdauer $(n + 1)$ einer gemischten Versicherung die ganze Zahl k um nicht mehr als

$$\frac{4}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{4 - r}{4}\right) r k}$$

so nimmt die Prämie $P_{\overline{n+1}|}$ mit steigendem Zinsfuss in jedem Falle ab.

Satz 5. Übertrifft die Versicherungsdauer $(n + 1)$ einer gemischten Versicherung die ganze Zahl k um mehr als

$$\frac{4}{r} \sqrt{1 + \left(\frac{4 - r}{4}\right) r k}$$

so sind Absterbeordnungen denkbar, für welche die Prämie $P_{\overline{n+1}|}$ mit steigendem Zinsfuss zunimmt.

Diese kritische Zahl, die darüber entscheidet, ob $\frac{\partial P}{\partial i}$ unter allen Umständen negativ oder ob auch der gegenteilige Fall denkbar ist, ist von der Zahl k und in geringem Masse vom Zinsfuss abhängig.

Die folgende Tabelle enthält die zahlenmässige Auswertung der Ungleichung (12) für die beiden Zinsfüsse 0 % und 5 %:

k	Max. n		k	Max. n	
	$i = 0\%$	$i = 5\%$		$i = 0\%$	$i = 5\%$
0	4	3	16	30	29
1	6	6	17	31	31
2	8	8	18	33	32
3	10	9	19	34	34
4	12	11	20	36	35
5	13	13	21	37	36
6	15	15	22	38	38
7	17	16	23	40	39
8	18	18	24	41	40
9	20	19	25	42	42
10	21	21	26	44	43
11	23	22	27	45	44
12	24	24	28	46	46
13	26	25	29	47	47
14	27	27	30	49	48
15	29	28			

Wenn wir diese Tabelle richtig würdigen wollen, müssen wir uns bewusst sein, dass sie für den denkbar ungünstigsten Fall berechnet wurde, nämlich für den Fall,

$$\text{dass für alle } t \leqslant k \quad s_t = {}_tE_x = \frac{r}{2}$$

$$\text{und für alle } t > k \quad s_t = {}_tE_x = \frac{r}{4}$$

gewählt wurde. In der Wirklichkeit werden die Verhältnisse bedeutend günstiger sein. Aber schon für diesen unwahrscheinlichen Fall zeigt uns die Tabelle, dass die Versicherungsdauer um mindestens 4 Jahre (für $k = 30$, sogar um 19 Jahre) grösser sein darf als k, bevor zu befürchten ist, dass die Prämien mit steigendem Zinsfuss auch zunehmen. Dabei ist k nur für die höchsten Alter gleich null.