Quelques remarques sur les réserves mathématiques de l'assurance à terme fixe et de l'assurance d'annuités

Autor(en): **Jéquier, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **49 (1949)**

PDF erstellt am: **27.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-555009

Quelques remarques sur les réserves mathématiques de l'assurance à terme fixe et de l'assurance d'annuités

Par *Ch. Jéquier*, Pully

L'assurance mixte étant de toutes les combinaisons la plus importante, il peut être intéressant d'établir des formules qui expriment la réserve mathématique d'autres combinaisons en fonction de celle de l'assurance mixte. Dans cet exposé nous nous occuperons de l'assurance à terme fixe et de l'assurance d'annuités.

Partant d'une table de mortalité qui suppose les décès payables en fin d'année nous avons:

$$_kV_{x:\overline{n|}} = 1 - \frac{a_{x':\overline{n'|}}}{a_{x:\overline{n|}}} \qquad \text{où} \qquad \begin{aligned} x' &= x + k \\ n' &= n - k, \end{aligned}$$

k désignant le nombre de primes payées.

Rappelons également la formule analogue pour l'assurance épargne:

$$_kV_{\overline{n|}} = 1 - \frac{a_{\overline{n'|}}}{a_{\overline{n|}}}$$

L'assurance à terme fixe. La réserve mathématique d'une assurance à terme fixe de 1 franc est donnée par la formule:

$$_kV_x^n = v^{n'} - P a_{x':\overline{n'|}} \qquad \text{où} \qquad P = \frac{v^n}{a_{x:\overline{n|}}}$$

On a alors:

$$_kV_x^n = v^{n'} - \frac{v^n}{a_{x:\overline{n|}}} a_{x':\overline{n'|}} = v^{n'} - \frac{a_{x':\overline{n'|}}}{a_{x:\overline{n|}}} v^n$$

Dans un article intéressant [1]) paru dans notre Bulletin — N° 41, octobre 1941 — le Dr Christen a eu l'idée de remplacer le rapport $\frac{a_{x':\overline{n'|}}}{a_{x:\overline{n|}}}$ par l'expression $1 - {}_kV_{x:\overline{n|}}$. Après quelques transformations on arrive à la formule suivante:

Terme fixe: $${}_kV_x^n = v^n\,{}_kV_{x:\overline{n|}} - (v^n - v^{n'}) \tag{1}$$

Ainsi a-t-on exprimé la réserve mathématique de l'assurance à terme fixe en fonction de celle de l'assurance mixte. Le Dr Christen fait remarquer qu'un parallélisme existe dans l'évolution de la réserve mathématique des 2 combinaisons. Des tables qui donnent de fortes réserves mathématiques pour l'assurance mixte conduisent aussi à de fortes réserves mathématiques pour l'assurance à terme fixe et réciproquement.

Supposons que, pour le même taux technique, on calcule la réserve mathématique avec 2 tables de mortalité différentes — les tables I et II (par exemple MWI et SM 1921/30). En appliquant la formule (1) on a successivement:

$${}_kV_x^{n\,\mathrm{I}} = v^n\,{}_kV^{\mathrm{I}}_{x:\overline{n|}} - (v^n - v^{n'})$$

$${}_kV_x^{n\,\mathrm{II}} = v^n\,{}_kV^{\mathrm{II}}_{x:\overline{n|}} - (v^n - v^{n'})$$

d'où $${}_kV_x^{n\,\mathrm{I}} - {}_kV_x^{n\,\mathrm{II}} = v^n\,{}_k\Delta_{x:\overline{n|}} \tag{2}$$

en posant $${}_k\Delta_{x:\overline{n|}} = {}_kV^{\mathrm{I}}_{x:\overline{n|}} - {}_kV^{\mathrm{II}}_{x:\overline{n|}}$$

Généralement les réserves mathématiques de l'assurance mixte sont toutes calculées. On connaît donc la différence ${}_k\Delta_{x:\overline{n|}}$ qui peut être positive ou négative.

La formule (2) montre combien la différence des réserves mathématiques dans l'assurance à terme fixe est plus faible que la différence correspondante ${}_k\Delta_{x:\overline{n|}}$. Ainsi, à $3\frac{1}{2}$ % pour $n = 20$, durée courante, on a $v^{20} \sim 0{,}5$; dans l'assurance à terme fixe la différence des réserves mathématiques est donc égale dans ce cas particulier à la moitié de la différence des réserves de l'assurance mixte.

---

[1]) «Eine Bemerkung zum Thema: das Deckungskapital der gemischten und der terme-fixe-Versicherung bei Änderung der Sterblichkeit.»

L'assurance d'annuités. Passons maintenant à une assurance d'annuités de 1 franc dont la prime unique est donnée par la formule:

$$H_{x:\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$$

La première rente sera payée à la fin de l'année du décès de l'assuré, la dernière une année avant l'échéance.

On a pour la prime annuelle:

$$h_{x:\overline{n}|} = \frac{H_{x:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}} - 1, \qquad \text{d'où} \qquad 1 + h_{x:\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}$$

Quant à la réserve mathématique après k primes payées elle est donnée par la formule:

$${}_kV(H_{x:\overline{n}|}) = H_{x':\overline{n'}|} - h_{x:\overline{n}|}\, a_{x':\overline{n'}|} = a_{\overline{n'}|} - a_{x':\overline{n'}|} - h_{x:\overline{n}|}\, a_{x':\overline{n'}|}$$

Par transformations successives et en posant ${}_kV(H_{x:\overline{n}|}) = {}_kK$ pour abréger l'écriture, on arrive à la formule suivante:

$${}_kK = a_{\overline{n'}|} - \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}\, a_{x':\overline{n'}|} = a_{\overline{n'}|} - \frac{a_{x':\overline{n'}|}}{a_{x:\overline{n}|}}\, a_{\overline{n}|}$$

Appliquant ici le procédé du Dr Christen nous remplaçons le quotient

$$\frac{a_{x':\overline{x'}|}}{a_{x:\overline{n}|}}$$

par la différence $1 - {}_kV_{x:\overline{n}|}$. Il vient alors, après transformation:

$${}_kK = a_{\overline{n}|}\, {}_kV_{x:\overline{n}|} - (a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n'}|}) \tag{3}$$

Nous avons donc exprimé la réserve mathématique de l'assurance d'annuités en fonction de celle de l'assurance mixte.

Il est intéressant de comparer cette formule à celle de l'assurance à terme fixe que nous reproduisons ci-après:

Terme fixe: $\quad {}_kV_x^n = v^n\, {}_kV_{x:\overline{n}|} - (v^n - v^{n'})$

Si, dans cette dernière relation, apparaît le facteur d'escompte v^n, c'est qu'il s'agit d'une prestation unique de 1 franc due par la compagnie; au contraire, dans l'assurance d'annuités il s'agit de prestations échelonnées, ce qui explique la présence de la rente certaine $a_{\overline{n}|}$.

Une autre différence est la suivante: dans le terme fixe on a $v^n < v^{n'}$ puisque $n > n'$; la différence $v^n - v^{n'}$ est donc négative et $-(v^n - v^{n'})$ est positive, tandis que dans la formule (3) $a_{\overline{n}|} > a_{\overline{n'}|}$; il faut donc retrancher un montant souvent important du premier terme du 2e membre. Il résulte de ce fait que la réserve mathématique de l'assurance d'annuités peut être *négative*. On a ${}_kK < 0$ quand

$$a_{\overline{n}|}\,{}_kV_{x:\overline{n}|} < a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n'}|}$$

ou que

$${}_kV_{x:\overline{n}|} < 1 - \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

ou enfin que

$${}_kV_{x:\overline{n}|} < {}_kV_{\overline{n}|}$$

Ainsi la réserve mathématique de l'assurance d'annuités de 1 franc est négative toutes les fois que, pour les mêmes caractéristiques, la réserve mathématique de l'assurance mixte de 1 franc est plus petite que la réserve mathématique de l'assurance épargne de 1 franc, ce qui arrive souvent.

Comme précédemment envisageons maintenant 2 tables de mortalité différentes — les tables I et II; le taux technique étant pareil, on a, en appliquant la formule (3):

$${}_kK^{\mathrm{I}} = a_{\overline{n}|}\,{}_kV^{\mathrm{I}}_{x:\overline{n}|} - (a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n'}|})$$

$${}_kK^{\mathrm{II}} = a_{\overline{n}|}\,{}_kV^{\mathrm{II}}_{x:\overline{n}|} - (a_{\overline{n}|} - a_{\overline{n'}|})$$

d'où

$${}_kK^{\mathrm{I}} - {}_kK^{\mathrm{II}} = a_{\overline{n}|}\,{}_k\Delta_{x:\overline{n}|} \tag{4}$$

${}_k\Delta_{x:\overline{n}|}$ ayant la même signification que précédemment. Ainsi la différence des réserves mathématiques dans l'assurance d'annuités est égale, pour les mêmes caractéristiques, à ${}_k\Delta_{x:\overline{n}|}$ multipliée par la rente certaine $a_{\overline{n}|}$ *qui ne dépend pas de* k. Il est intéressant de comparer cette formule (4) à la formule (2) de l'assurance à terme fixe.

Il arrive que pour les diverses valeurs de k l'on connaisse la réserve mathématique ${}_kK^{\mathrm{II}}$ comptée avec une certaine table de mortalité; si l'on désire obtenir les réserves mathématiques successives de la même assurance d'annuités avec une autre table — table I par exemple — on peut utiliser la formule suivante, tirée de la formule (4).

$${}_kK^{\mathrm{I}} = a_{\overline{n}|}\,{}_k\Delta_{x:\overline{n}|} + {}_kK^{\mathrm{II}}$$

Reprenons la formule (3) et divisons les 2 membres par $a_{\overline{n}|}$. Il vient:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,{}_kK = {}_kV_{x:\overline{n}|} - \left(1 - \frac{a_{\overline{n'}|}}{a_{\overline{n}|}}\right)$$

que l'on peut écrire:

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,{}_kK = {}_kV_{x:\overline{n}|} - {}_kV_{\overline{n}|} \tag{5}$$

Ainsi, si la rente au lieu d'être 1 franc est $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ franc, la réserve mathématique de l'assurance d'annuités s'obtient simplement par la différence des réserves mathématiques de l'assurance mixte et de l'assurance épargne de 1 franc.

Cette formule (5) conduit d'ailleurs à la suivante:

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = {}_kV_{\overline{n}|} + \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,{}_kK$$

Mais

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = P_{\overline{n}|} + d,$$

ce qui donne

$${}_kV_{x:\overline{n}|} = {}_kV_{\overline{n}|} + (P_{\overline{n}|} + d)\,{}_kK$$

formule connue.