Über die Zerlegung einer Versicherungskombination

Über die Zerlegung einer Versicherungskombination

Von *P. Nolfi*, Zürich

Im modernen Versicherungswesen werden häufig Versicherungen gegen verschiedene Ereignisse in einem einzigen Vertrag zusammengefasst. So decken bereits die einfachen Formen der Lebensversicherung das Erlebensfall- und das Todesfallrisiko. Viele Kombinationen gehen noch bedeutend weiter. Sie umfassen mehrere Risikogefahren, wie Invalidität, besondere Arten von Unfällen, Erkrankungen usw. Daneben gibt es verschiedene Ereignisse, welche die Kosten einer Versicherung beeinflussen, so der Rückkauf, die ganz oder teilweise Umwandlung. Aus allen diesen möglichen Vorfällen erwachsen dem Versicherungsträger unter Umständen Schäden, und es ist für ihn wichtig, deren finanzielle Auswirkung zu kennen. Ein solcher Überblick lässt sich meistens durch die Zerlegung einer Versicherungskombination in ihre Bestandteile gewinnen. Eine solche Aufteilung ist aber mitunter nicht durchführbar oder dann mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Das hat zur Folge, dass über die finanzielle Tragweite einzelner Bestandteile Unklarheit herrscht, was zu Fehlschlüssen in der Prämienkalkulation führen kann. Wir verweisen z. B. auf die Arbeit von Hardy und Ballenegger (Band 47 dieser Mitteilungen) «De l'influence d'une diminution de l'invalidité sur les primes et les réserves mathématiques des caisses de retraite.» Anhand von Beispielen wird hier gezeigt, wie leicht der Einfluss einer erhöhten Invalidierung auf eine Versicherungskombination falsch beurteilt wird. Solche Trugschlüsse können verhindert werden, sobald es möglich wird, die Versicherungskombination in unabhängige Bestandteile zu zerlegen oder sie so aufzubauen, dass eine solche Zerlegung durchgeführt werden kann.

Zweifellos handelt es sich hier um Probleme, die für den Aktuar besondere Bedeutung haben, man denke z. B., wie wichtig es ist, die Belastung der Invaliditätsversicherung einer Personalversicherung richtig beurteilen zu können. Erst damit gewinnt man eine zuverlässige Grundlage für die Prämienberechnung und in der Gruppenversicherung die Voraussetzungen für eine gerechte Bemessung der Gewinnanteile.

Die nachfolgenden Ausführungen mögen einen Beitrag zur praktischen Lösung dieser Probleme liefern. — Wir bezeichnen mit

$$\mu_i(\tau) \text{ mit } i = 1;\, 2;\, \ldots\, n$$

die Intensitäten derjenigen Ereignisse, die gleichzeitig mit ihrem Eintritt eine Auflösung des Versicherungsvertrages bedingen. Wir nennen sie Intensitäten erster Art. Mit

$$\nu_j(\tau);\ (j = 1;\, 2;\, \ldots\, m)$$

bezeichnen wir die Intensitäten derjenigen Ereignisse, die wohl einen Schadensfall verursachen, aber noch keine Auflösung des Versicherungsvertrages zur Folge haben, wie z. B. die Umwandlung einer Versicherung in eine prämienfreie. Wir nennen sie Intensitäten zweiter Art.

$A_i(\tau)$ bzw. $B_j(\tau)$ seien die Schadensummen, die bei Eintritt der betreffenden Ereignisse geschuldet werden. Unter den Grössen $B_j(\tau)$ figurieren auch allfällige Rentenzahlungen sowie die Gegenleistungen des Versicherten, die dann mit negativen Vorzeichen in die nachstehenden Formeln eingehen. $\delta(\tau)$ ist die Zinsintensität im Zeitpunkt τ.

Aus den Intensitäten lassen sich folgende Funktionen berechnen:

$$u_i(t;\,\tau) = \int_t^\tau \mu_i(\xi)\,d\xi \qquad \varrho(t;\,\tau) = \int_t^\tau \delta(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

Mit Hilfe dieser Werte lässt sich die Darstellung einer allgemeinen Versicherungskombination auf folgende Form bringen:

$$V(t) = \int_t^\omega e^{-[\Sigma u_i(t;\tau) + \varrho(t;\tau)]}\left[\Sigma\,\mu_i(\tau)\,A_i(\tau) + \Sigma\,\nu_j(\tau)\,B_j(\tau)\right] d\tau \tag{2}$$

In dieser Darstellung bedeutet $V(t)$ das Deckungskapital. Die Berechtigung zu dieser Bezeichnung folgt aus den nach folgenden Ausführungen. ω ist der höchstmögliche Wert, bei dem noch Leistungen versichert sind. Sofern die rechten Seiten von (1) und (2) als Lesbeguesche Integrale aufgefasst werden, erhält man eine sehr umfassende Darstellung einer Versicherungskombination. Dank der besonderen Beschaffenheit der Integralfunktionen bleibt $V(t)$ noch unter allgemeinen Voraussetzungen differenzierbar. Die Bildung der ersten Ableitung von $V(t)$ führt unmittelbar zur entsprechenden Thielschen Differentialgleichung für das Deckungskapital. — Im Jahre 1931 und 1932 hat A. Loewy in den Blättern für Versicherungsmathematik (2. Band, 1. Heft) mit Hilfe des Stieljeschen Integralbegriffes eine ähnliche Darstellung einer allgemeinen Versicherung gegeben, wobei jedoch im Gegensatz zu Formel (2) nur Intensitäten erster Art betrachtet werden.

Für die nachfolgenden Darlegungen ist Formel 2 deshalb besonders geeignet, weil sie einen guten Überblick über das Zusammenwirken der Bestimmungsgrössen einer Versicherung vermittelt. Der Integrand ist das Produkt einer Exponentialfunktion mit einem Polynom. Die Exponentialfunktion trägt der Bestandesänderung sowie der Zinswirkung Rechnung, und zwar in dem Sinne, dass eine Erhöhung der Intensitäten eine Verminderung des Deckungskapitals bewirkt. Anders verhält es sich mit dem zweiten Faktor. Eine Erhöhung der Intensitätsfunktion bewirkt hier, sofern die Versicherungsleistungen $A_i(\tau)$ und $B_i(\tau)$ positiv sind, eine Erhöhung des Deckungskapitals. Indessen besteht in dieser Hinsicht ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Einfluss, den die Intensitäten erster und zweiter Art ausüben. Bei einer Zunahme der Intensitäten *erster Art* wird die damit primär bedingte Kostenerhöhung zufolge des gleichzeitigen Auftretens dieser Grössen im Exponenten wieder vermindert. Diese Gegenwirkung kann so gross werden, dass insgesamt eine Verbilligung eintritt. Hierin liegt die Ursache, die zu den oben genannten Fehlschlüssen verleitet. Auf Grund der Formel (2) lassen sich leicht Fälle konstruieren, bei denen trotz Erhöhung der Risikogefahr die Versicherungskosten sinken. Dass dieser Fall in der Praxis auch öfters auftritt, ist eigentlich nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, dass die Intensitäten erster Art, wie die Zinsintensität, in die Exponentialfunktion eingehen und damit die gleiche Wirkung ausüben. Bekanntlich bewirkt eine Erhöhung des Zinsfusses namentlich bei Rentenversicherungen eine wesentliche Reduktion der Prämie.

Anders sind die Verhältnisse bei den Intensitäten *zweiter* Art. Diese treten nur im Polynom auf. Sie können deshalb auch keine Gegenwirkung ausüben. Je grösser sie gewählt werden, um so grösser wird auch die entsprechende Belastung. Hier sind Fehlschlüsse der oben angegebenen Art nicht möglich. Diese Feststellung ist wichtig für die nachstehenden Entwicklungen.

Aus Formel (2) folgt anderseits auch, dass eine Aufteilung einer Versicherungskombination in einzelne unabhängige Bestandteile im allgemeinen nicht möglich ist. Es ist nicht möglich, eine Darstellung zu finden, bei der das Deckungskapital als Summe von Einzelwerten erscheint, die jeweils nur von den für sie massgebenden Intensitäten abhängen. Eine solche Aufteilung ist nur dann durchführbar, wenn die Intensitäten erster Art überhaupt nicht auftreten. Nur in diesem speziellen Fall ist

$$V(t) = \int_t^\omega \Sigma \nu_i(\tau) B_i(\tau)\, d\tau = \int_t^\omega \nu_1(\tau) B_1(\tau)\, d\tau + \ldots + \int_t^\omega \nu_m(\tau) B_m(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

eine Zerlegung möglich, bei der die einzelnen Summanden jeweils nur von einer einzigen Intensität abhängen. Sobald aber die Intensitäten erster Art nicht verschwinden, lässt sich die rechte Seite von (2) lediglich in Ausdrücken von der Form zerlegen:

$$E_h(t) = \int_t^\omega e^{-[\Sigma u_i(t;\tau) + \varrho(t;\tau)]} \mu_h(\tau) A_h(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

beziehungsweise

$$E_k(t) = \int_t^\omega e^{-[\Sigma u_i(t;\tau) + \varrho(t;\tau)]} \nu_k(\tau) B_k(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

Sowohl in (4) als auch in (5) treten im Exponenten die Summenfunktionen sämtlicher Intensitäten erster Art auf. In beiden Fällen sind somit die Werte $E_h(t)$ bzw. $E_k(t)$ nicht nur von den ihnen zukommenden Intensitäten $\mu_h(\tau)$ bzw. $\nu_k(\tau)$, sondern von allen übrigen Intensitäten erster Art abhängig. Trotzdem besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen (4) und (5). Während in (4) die Intensität erster Art $\mu_h(\tau)$ auch im Exponenten auftritt und durch die damit bedingte Gegenwirkung die Kostenbeurteilung wesentlich erschwert, ist das bei (5) nicht mehr der Fall. Die Höhe der Einlage für die durch (5) ausgedrückte Teilversicherung ist mit den ihr zugeordneten Intensitäten $\nu_k(\tau)$ direkt proportional. Eine Verdoppelung der Werte $\nu_k(\tau)$ bedingt auch eine Verdoppelung der Einlage $E_k(t)$. Eine solche Abhängigkeit wollen wir homolog nennen. Wir stellen also fest, dass bei homologer Abhängigkeit die Kostenbeurteilung sich sehr einfach gestaltet, was bei nicht homologer Abhängigkeit nicht zutrifft. Aus diesem Grunde wird man beim mathematischen Aufbau einer Versicherung bestrebt sein, von den Intensitäten zweiter Art auszugehen.

Eine solche Möglichkeit ergibt sich erfreulicherweise hinsichtlich der Invaliditätsversicherung. Sie bedingt allerdings ein Aufgeben der Schärtlinschen Darstellung, weil letztere sich ausschliesslich auf die Intensitäten erster Art stützt. Indessen lässt sich ein solcher Schritt durchaus rechtfertigen, nicht nur wegen den damit nach den obigen Ausführungen erreichbaren Vorteilen, sondern weil die Einführung der Invalidisierungsintensität zweiter Ordnung der Natur der Sache besser entspricht. Das folgt aus der Feststellung, dass der Eintritt eines Invaliditätsfalles bei den üblichen Tarifkombinationen noch keine Beendigung der Versicherung bedingt. Letztere bleibt vielmehr bestehen. Oder anders ausgedrückt: Der Eintritt eines Invaliditätsfalles bedingt keine Änderung im Bestand der Lebenden, die unabhängig von der Invaliditätsversicherung noch für andere Leistung, z. B. Altersrenten, versichert sind. Das besagt aber nichts anderes, als dass die Invaliditätsintensitäten zweiter Art sind. Sie dürfen im Exponenten nicht auftreten.

Wir wollen nun zeigen, wie sich eine solche Darstellung gestaltet.

Um die Diskussion zu vereinfachen, beschränken wir uns auf den Fall einer Alters- und Invaliditätsversicherung. Damit wird die allgemeine Gültigkeit der Resultate nicht berührt. Betrachtet man also die Invaliditätsintensitäten als Grösse zweiter Art, so stellt sich die Darstellung der betrachteten Versicherungskombination wie folgt:

$$V(t) = \int_t^\omega e^{-[u(t;\tau)+\varrho(t;\tau)]} \left[\nu(\tau)\, B(\tau) + \nu_1(\tau)\, R(\tau) + \nu_2(\tau)\, P(\tau)\right] d\tau \qquad (6)$$

Das ist nun bereits die gesuchte Darstellung, und es verbleibt nur noch darzulegen, was unter den einzelnen Grössen, insbesondere unter $\nu(\tau)$ und $B(\tau)$ zu verstehen ist. Zunächst bedeutet hier $R(\tau)$ die Rente, welche an alle Lebenden zur Zeit τ in der Zeiteinheit ausgerichtet wird. Diese Leistungen werden auch an die lebenden Invaliden bezahlt. Hieraus folgt, dass $B(\tau)$ lediglich die eigentlichen Mehrleistungen, die durch die Invaliditätsversicherung verursacht werden, erfasst. Es sind das allfällige direkte Leistungen sowie die Aufwendungen für Prämienbefreiung.

$P(\tau)$ ist die Prämie, welche für die gesamte Versicherungskombination zu entrichten ist. $\nu_1(\tau)$ und $\nu_2(\tau)$ sind Intensitäten zweiter Art, sie nehmen in der Regel nur die Werte 0 oder 1 an und können dann auch, wie das nachstehend geschehen ist, weggelassen werden.

Bezeichnet man mit $P_A(t)$ die Teilprämie für die Altersrente und mit $P_J(t)$ die verbleibende Teilprämie der Invaliditätszusatzversicherung, so ermöglicht die Darstellung gemäss (6) zunächst eine vollständige Ausscheidung der reinen Rentenversicherung. Es wird:

$$V_A(t) = \int_t^\omega e^{-[u(t;\tau)+\varrho(t;\tau)]}\left[R(\tau) - P_A(\tau)\right] d\tau \qquad (7)$$

Man erhält also mit (7) die übliche Darstellung des Deckungskapitals einer Altersrentenversicherung. $V_A(t)$ ist unabhängig davon, ob neben der Rentenversicherung noch eine Invaliditätsversicherung besteht oder nicht. Für das Deckungskapital der Invaliditätsversicherung verbleibt dann noch der Ausdruck:

$$V_J(t) = \int_t^\omega e^{-[u(t;\tau)+\varrho(t;\tau)]}\left[\nu(\tau)\,B(\tau) - P_J(\tau)\right] d\tau \qquad (8)$$

Im Gegensatz zu $V_A(t)$ ist $V_J(t)$ nicht ganz unabhängig von den Bestimmungsgrössen der Mitversicherung. Die Sterbensintensitäten treten in (8) noch im Exponenten auf. Indessen ist, wie erwartet, die Abhängigkeit des Deckungskapitals von den Invaliditätsintensitäten in (8) eine homologe.

Die Höhe der Prämien lässt sich mit Hilfe des Äquivalenzprinzipes ohne weiteres berechnen. Nimmt man diese als zeitlich konstant an, so erhält man aus (8) für $P_J(\tau)$ den Ausdruck:

$$P_J = \frac{\int_0^\omega e^{-[u(0;\tau)+\varrho(0;\tau)]}\,\nu(\tau)\,B(\tau)\,d\tau}{\int_0^\omega e^{-[u(0;\tau)+\varrho(0;\tau)]}\,d\tau} \qquad (9)$$

Dieser Ausruck entspricht der äussern Form nach genau der üblichen Näherungsformel, wie sie von amerikanischen Mathematikern (Craig und Philips) aufgestellt und von M. Jakob, in einer Abhandlung erschienen in den Mitteilungen des zehnten Aktuarenkongresses in Rom, untersucht und als anwendbar befunden worden ist. Neuerdings ist man auch in der Schweiz zu einer neuen Tarifgestaltung unter Verwendung der soeben erwähnten Näherungsformel übergegangen. So wurden die «Technischen Grundlagen und Bruttotarife für Gruppenversicherungen» nach diesen Gesichtspunkten aufgestellt.

Indessen besteht zwischen der Formel (9) und der ihr entsprechenden Näherungsformel von Craig und Philips ein prinzipieller Unterschied. Im Gegensatz zur letzteren gibt (9) die exakte Lösung des Problems. Der Unterschied besteht darin, dass in (9) die Invaliditätsintensitäten zweiter Art auftreten, im Gegensatz zur Näherungsformel, in der die Intensitäten erster Art eingesetzt werden.

Zwischen den Intensitäten erster und zweiter Art besteht folgender Unterschied. Wie aus (6) ersichtlich ist, bedeutet $\nu(t)$ die Intensität, mit der ein Invaliditätsfall in einem Bestand von Lebenden eintritt, unabhängig von der vorhandenen Zahl der seit dem Zeitpunkt t eingetretenen Invaliditätsfälle. Ihre Bestimmung ist also eine Aufgabe der Statistik.

Es handelt sich z. B. bei der Berechnung von $\nu(t)$ zunächst um die Bestimmung der Zahl der Invaliden, die zurzeit t pro Zeiteinheit aus $l_{[x]+t}$ Personen, die zur Zeit $t = o$ noch aktiv waren, hervorgehen. Bedeutet also $l^a_{[x]+0}$ die Zahl der Aktiven im Zeitpunkt $t = 0$, dann setzt sich die Zahl der Lebenden $l_{[x]+t}$ zur Zeit t zusammen aus der Zahl der dannzumal noch lebenden Aktiven $l^a_{[x]+t}$ und der Zahl der inzwischen entstandenen noch lebenden Invaliden $l^{ii}_{[x]+t}$. Es ist also

$$l_{[x]+t} = l^a_{[x]+t} + l^{ii}_{[x]+t}$$

Nun ist $l^a_{[x]+t}\,\mu^a(x;\,t)$ die Zahl der Invaliden, die in der Zeiteinheit aus der Zahl der Aktiven $l^a_{[x]+t}$ hervorgehen, und anderseits ist $l_{[x]+t}\;\nu(x;\,t)$ die Zahl der Invaliden, die in der Zeiteinheit aus der Zahl der Lebenden $l_{[x]+t}$ entstehen. Da aus den bereits Invaliden keine neuen Invaliden entstehen können, müssen diese beiden Zahlen gleich sein. Es ist somit

$$l^a_{[x]+t} \cdot \mu^a(x;\,t) = l_{[x]+t}\,\nu(x;\,t) \tag{10}$$

Mit Gleichung (10) erhält man somit eine interessante Beziehung zwischen den Invaliditätsintensitäten erster und zweiter Art. Es zeigt sich, dass diese Beziehung verhältnismässig einfach ist. Sofern eine vollständige Tafel der Lebenden und der Aktiven vorliegt, können die gesuchten Intensitäten zweiter Art aus denjenigen erster Art berechnet werden. Die Formel lässt erkennen, dass die Intensitäten zweiter Art eine doppelt abgestufte Tafel bilden und immer kleiner sind als diejenigen erster Art. Die beiden Werte stehen zueinander im folgenden Verhältnis:

$$\nu(x;\,t) : \mu^a(x;\,t) = l^a_{[x]+t} : l^{al}_{[x]+t}$$

Da in den untern Altersstufen die Zahl der Invaliden verhältnismässig zur Zahl der Lebenden klein ist, ist auch der Unterschied zwischen $\mu^a(x;\,t)$ und $\nu(x;\,t)$ klein. Erst in den höheren Altersstufen, etwa vom 50. Altersjahr an, kann dieser Unterschied grösser werden. Er wird um so grösser, je grösser t ist. Setzt man also in Formel (9) statt die Invaliditätsintensitäten zweiter Art diejenigen erster Art ein, so wird damit die Gesamtbelastung überschätzt, und zwar um so mehr, je weiter weg der Zeitpunkt, über den sich die Berechnung erstreckt, liegt. D. h. nach der Näherungsformel von Craig und Philips rechnet man um so vorsichtiger, je langfristiger eine Versicherung ist. Das ist ein glücklicher Umstand, er entspricht durchaus den Grundsätzen einer vorsichtigen Prämienberechnung. Anderseits ist es auch so, dass nach gewissen Feststellungen die Invaliditätswahrscheinlichkeiten nicht nur vom Lebensalter, sondern von der Versicherungsdauer abhängen und mit dieser eine steigende Tendenz aufweisen. Durch die Näherungsformel wird also auch dieser Erscheinung Rechnung getragen. Schliesslich ist auch die Anwendung der Intensitäten erster Ordnung mit grossen Unsicherheitsfaktoren behaftet. Die Bestimmung dieser Grössen ist ja sehr weitgehend abhängig von der Invaliditätspraxis und den Besonderheiten des Materials.

Die hier aufgedeckten Zusammenhänge lassen in einfacher Weise erkennen, inwieweit die in Gebrauch stehende Näherungsformel für die Invaliditätszusatzversicherung der Wirklichkeit entspricht. Sie zeigen, welcher Art die Unterschiede gegenüber den genauen Werten sind, und gestatten, deren Grössenordnung zu berechnen bzw. abzuschätzen. Selbstverständlich können den aufgezeigten Abweichungen, nachdem man nunmehr ihre Beschaffenheit genau kennt, auch von Anfang an durch passende Wahl der Invaliditätstafel Rechnung getragen werden.