Erwägungen über abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten

Erwägungen über abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten

Von *Hans Wyss*, Zürich

1. Die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten nach Karup

Für eine im Jahre 1875 bekannt gewordene Untersuchung [4] [1]) hat *Karup* zur Darstellung bestimmter Vorgänge in Personengesamtheiten neuartige Masszahlen benützt, die er unabhängige Wahrscheinlichkeiten nennt. Damit löste er einen lebhaften Meinungsstreit aus, der seinen Abschluss erst durch eine mehr als 30 Jahre später erschienene Darstellung von *Spangenberg* [5] gefunden hat. Diese Abhandlung bringt eine eingehende Würdigung von Karups Auffassung und setzt sich mit den damals bekannten, zustimmenden und ablehnenden Äusserungen zur Streitfrage auseinander.

Nach einer Mitteilung von *Linder* [21] hat *Lambert* schon 110 Jahre vor Karup bei einer Untersuchung über die Pocken-Sterblichkeit mit unabhängigen Wahrscheinlichkeiten gerechnet, scheinbar ohne sich der allgemeinen theoretischen Bedeutung der für die besondere Aufgabe benützten Berechnungsmethode bewusst zu werden. Ähnlich verhält es sich mit den einige Jahre vor der Karupschen Arbeit veröffentlichten Untersuchungen von *Heym* [6] und *Zeuner* [8].

Der Haupteinwand, der gegen die Anwendung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten geäussert worden ist, scheint dahin zu gehen, dass Karup den neuen Begriff einzig deshalb eingeführt habe, um bei der Darstellung von Vorgängen in Personengesamtheiten den in der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie gültigen Satz über die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten benützen zu können. Der Widerstand gegen Karups Auffassung dürfte hauptsächlich auf den Umstand zurückzuführen sein, dass seine Kritiker ausschliesslich an Vorgänge in Personengesamtheiten denken, wo der Sterbefall das

[1]) Siehe Literaturverzeichnis am Schlusse.

endgültige Ausscheiden der betroffenen Person aus der Beobachtung zur Folge hat. In die allgemeine Betrachtung sind jedoch auch die Vorgänge einzubeziehen, wo das durch ein bestimmtes Ereignis getroffene Objekt selbst nicht zerstört wird, sondern der weiteren Beobachtung zugänglich bleibt. Beispielsweise wird in der Theorie der Versicherungen auf mehrere Leben das beobachtete Objekt durch eine bestimmte Personengruppe dargestellt, die als solche nach dem Ableben eines oder mehrerer Mitglieder weiter besteht. Ähnliche Beispiele liefert die Beobachtung von Schadenereignissen an Sachen, deren Existenz durch die Beschädigungen aus bestimmten Ursachen nicht erlischt.

Auch Karup selbst hat seine grundlegenden Betrachtungen anhand von Personengesamtheiten geschildert, bei denen die Masszahl der unabhängigen Wahrscheinlichkeit nicht ohne weiteres anschaulich gemacht werden kann. Zur Erläuterung bediente er sich einer Gedankenkonstruktion, wonach man sich vorstellen soll, jede wegen Todes aus der Beobachtung ausscheidende Person werde sofort durch eine andere gleichartige Person ersetzt, die gewissermassen als ihr Stellvertreter weiterhin unter dem Risiko der übrigen Abgangsursachen stehe. Diese — von manchen Autoren als gekünstelt empfundene Konstruktion — scheint das Verständnis der Karupschen Gedankengänge eher erschwert zu haben, obschon sie für diese keineswegs ausschlaggebend ist.

Nachdem *Spangenberg* in einer weiteren Arbeit [33] die Zusammenhänge zwischen den früher in der Statistik von Personengesamtheiten ausschliesslich benützten abhängigen Wahrscheinlichkeiten und den Karupschen unabhängigen Wahrscheinlichkeiten untersucht hat und die Frage im Jahre 1912 als Gegenstand eines Internationalen Kongresses für Versicherungs-Wissenschaft [9] gewählt worden ist, darf die heute fast unverständlich anmutende Streitfrage als abgeklärt betrachtet werden.

Immerhin fällt es auf, dass die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten weder in der *Enzyklopädie* [1] noch im Lehrbuch von *Czuber* [2] näher gewürdigt wird. In beiden Werken finden sich nur kurze Hinweise, die eher eine ablehnende Einstellung des Autors vermuten lassen.

Auch nach der Abklärung durch Spangenberg haben sich noch verschiedene Autoren mit Fragen aus dem Gebiet der unabhängigen

Wahrscheinlichkeiten beschäftigt. Eine Reihe von interessanten Abhandlungen über diesen Gegenstand ist in den Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker erschienen, [25] bis [33]. Unter diesen seien die folgenden Arbeiten besonders erwähnt: *Du Pasquier* [25] gibt — wie auch in seiner Kongressarbeit [9] — eine strenge Begründung der Karupschen Theorie. *Friedli* [22] und [26] erweitert die Methode, indem er die *unabhängige Ordnung* als Grundlage für die Darstellung der Vorgänge in Personengesamtheiten einführt. *Marchand* [24] und [27] bringt einen Nachweis, dass die Bildung der gesamten Verbleibenswahrscheinlichkeit als Produkt aus den unabhängigen Verbleibenswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Abgangsursachen gleichbedeutend ist mit der additiven Zerlegung der gesamten Ausscheideintensität in die Intensitäten für die einzelnen Ausscheideursachen.

Aus der Reihe von Arbeiten über die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, die in ausländischen Zeitschriften erschienen sind, seien lediglich die Abhandlungen von *Insolera* [17] und *Koeppler* [19] sowie die unter Leitung von *Riebesell* ausgearbeitete Dissertation von *Beutling* [20] erwähnt.

Obwohl die Karupsche Theorie längst klargestellt und ihre Ergebnisse erhärtet sind, begegnet man doch noch gelegentlich Auffassungen und Einwendungen, die Missverständnissen entspringen dürften. Daher mag es nicht als überflüssig erscheinen, der Frage der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten eine zusammenfassende Betrachtung zu widmen. Den folgenden Erwägungen sei vorausgeschickt, dass sie bewusst im mathematischen Gedankenmodell bleiben und somit auf die Frage nicht eintreten, ob bei Massenerscheinungen in Wirklichkeit völlig «unabhängige» Wahrscheinlichkeiten im streng mathematischen Sinne auftreten können oder nicht.

2. Benützte Bezeichnungen

I.

Eine Gesamtheit von $l^r(0)$ Objekten, die alle eine bestimmte Eigenschaft R besitzen, wird während der Zeit von 0 bis t beobachtet. Verliert ein Objekt die Eigenschaft R, so scheidet es aus der ursprünglichen Hauptgesamtheit aus. Zur Zeit t umfasst diese noch $l^r(t)$ Objekte.

Die Häufigkeit des Ausscheidens während der Zeit t, von 0 aus gerechnet, wird gemessen durch:

$$r(0,t) = \frac{l^r(0) - l^r(t)}{l^r(0)}$$

Besitzt die durch diese Masszahl dargestellte Häufigkeit die Eigenschaften, die an den Begriff der Wahrscheinlichkeit geknüpft werden — etwa im Sinne der «statistischen Wahrscheinlichkeit» nach *Anderson* [3] — so kann $r(0, t)$ als Wahrscheinlichkeit dafür aufgefasst werden, dass ein Objekt binnen der Beobachtungszeit von 0 bis t aus der Hauptgesamtheit ausscheidet, weil es die Eigenschaft R verliert. Die komplementäre Wahrscheinlichkeit des Verbleibens in der Hauptgesamtheit ist:

$$p^r(0,t) = 1 - r(0,t) = \frac{l^r(t)}{l^r(0)}$$

Denkt man sich die Beobachtungszeit in eine Anzahl — beispielsweise in t — gleichlange Intervalle unterteilt, so gilt:

$$r(0,t) = \sum_{i=0}^{t-1} p^r(0,i)\, r(i,1) = 1 - \prod_{i=0}^{t-1} p^r(i,1)$$

und

$$r(0,t) = r(0,i) + p^r(0,i)\, r(i, t-i)$$

Die Betrachtung könnte ohne weiteres auch auf Objekte ausgedehnt werden, die im Verlauf der Beobachtung die Eigenschaft R erhalten oder wieder gewinnen, wie es beispielsweise *Du Pasquier* [25] durch den Einbezug der Reaktivierungsintensität getan hat. In diesem Falle wäre $l(x)$ eine offene Gesamtheit, und an Stelle der «Abgangswahrscheinlichkeit» würde der von *Schärf* [32] geprägte Begriff der «Bestandesänderung» treten. Zur Vereinfachung der Darstellung wird im folgenden indessen auf diese Erweiterung der Betrachtung verzichtet.

II.

Die Ausscheidewahrscheinlichkeit für ein unendlich kleines Intervall wird dargestellt mit Hilfe der Intensitätsfunktion:

$$\varrho(x) \cdot dx = - \frac{\frac{d}{dx} l^r(x)}{l^r(x)}\, dx$$

Die Wahrscheinlichkeit, zwischen 0 und t auszuscheiden, ist in kontinuierlicher Darstellung bestimmt durch:

$$r(0, t) = \int_0^t \frac{l^r(x)}{l^r(0)} \varrho(x)\, dx = -\frac{1}{l^r(0)} \int_0^t \frac{d}{dx} l^r(x)\, dx = \int_0^t r'(0, x)\, dx$$

Ferner ist:

$$p^r(0, t) = e^{-\int_0^t \varrho(x)\, dx}$$

3. Gesamtheit mit mehreren Abgangsursachen

I.

Die Hauptgesamtheit umfasse Objekte, die sich sämtliche durch drei Eigenschaften A, B und C auszeichnen. Die Wahrscheinlichkeit, während der Zeit von 0 bis t die Eigenschaften A, B bzw. C zu verlieren, sei $a(0, t)$, $b(0, t)$ bzw. $c(0, t)$. Es sei zunächst vorausgesetzt, dass jedes Objekt, das bereits eine oder zwei charakteristische Eigenschaften verloren hat, weiterhin in unveränderter Weise der Beobachtung zugänglich bleibt. Im besonderen soll die Wirkung jeder einzelnen Abgangsursache vom Umstand unberührt bleiben, dass das Objekt bereits eine oder beide andern Eigenschaften verloren hat.

Der Vorgang lässt sich dann durch folgendes Schema darstellen. Nach Ablauf der Zeit t haben sich von der ursprünglich unter Beobachtung gestellten Hauptgesamtheit sieben Nebengesamtheiten abgespalten, so dass in ganzen acht Gesamtheiten bestehen, nämlich:

die Hauptgesamtheit, mit $l(t)$ Objekten, die alle drei Eigenschaften $A\,B\,C$ besitzen;

drei Nebengesamtheiten mit $L^{ab}(t)$, $L^{bc}(t)$ bzw. $L^{ca}(t)$ Objekten, die noch je zwei Eigenschaften $A\,B$, $B\,C$ bzw. $C\,A$ besitzen;

drei Nebengesamtheiten mit $L^a(t)$, $L^b(t)$ bzw. $L^c(t)$ Objekten, die nur je eine Eigenschaft A, B bzw. C besitzen;

und eine Nebengesamtheit mit $L^0(t)$ Objekten, die keine der betrachteten Eigenschaften mehr besitzen.

Bei Betrachtung von n Eigenschaften würden sich 2^n Gesamtheiten unterscheiden lassen, und zwar je $\binom{n}{m}$ Gesamtheiten von Objekten, die bereits m Eigenschaften verloren haben; ferner ebenso viele von Objekten, die noch m Eigenschaften besitzen. Nach den elementaren Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und bei Berücksichtigung der Festsetzung $l(0) = l^a(0) = l^b(0) = l^c(0)$ lässt sich der Umfang der einzelnen Gesamtheiten zur Zeit t ohne weiteres angeben. Es ist z. B.:

$$l(t) = l(0)\,[1 - a\,(0,t)]\,[1 - b\,(0,t)]\,[1 - c\,(0,t)] =$$

$$= l\,(0)\,p^a(0,t)\,p^b(0,t)\,p^c(0,t) = \frac{l^a(t)\,l^b(t)\,l^c(t)}{l\,(0)\,l\,(0)}$$

$$L^{ab}(t) = l\,(0)\,[1 - a\,(0,t)]\,[1 - b\,(0,t)]\,c\,(0,t) =$$

$$= l\,(0)\,p^a(0,t)\,p^b(0,t)\,c\,(0,t) = \frac{l^a(t)\,l^b(t)}{l\,(0)}\,c\,(0,t)$$

$$L^a(t) = l\,(0)\,[1 - a\,(0,t)]\,b\,(0,t)\,c\,(0,t) =$$

$$= l\,(0)\,p^a(0,t)\,b\,(0,t)\,c\,(0,t) = l^a(t)\,b\,(0,t)\,c\,(0,t)$$

$$L^0(t) = l\,(0)\,a\,(0,t)\,b\,(0,t)\,c\,(0,t)$$

womit zugleich die Bedeutung von $p^a(0,t)$, $p^b(0,t)$, $p^c(0,t)$, sowie $l^a(t)$, $l^b(t)$, $l^c(t)$, erläutert sei.

Für die verwandten Gesamtheiten von Objekten mit der gleichen Zahl verbliebener Eigenschaften gelten jeweilen die gleichen Formeln mit zyklischen Vertauschungen. Bei der Betrachtung von n Eigenschaften lässt sich der Umfang der Gesamtheit von Objekten, welche noch die Eigenschaften A bis J besitzen und die übrigen verloren haben, nach der symbolischen Darstellung bestimmen

$$L^{ab..i}(t) = l\,(0) \prod_{r=a}^{i} [1 - r\,(0,t)] \cdot \prod_{r=k}^{n} r\,(0,t)$$

Aus dieser Grundbeziehung lässt sich die technische Darstellung von Versicherungen auf mehrere Leben entwickeln. Als Objekt mit n Eigenschaften tritt dabei eine Personengruppe aus n Personen auf.

Dem Verlust einer bestimmten Eigenschaft entspricht das Ableben einer bestimmten Person aus der betrachteten Gruppe. Durch dieses Ausscheiden wird die weitere Beobachtung der betreffenden Personengruppe nicht abgebrochen, sofern vorausgesetzt werden darf, dass die Sterblichkeit der übriggebliebenen Personen der Gruppe durch das Ableben der Ausgeschiedenen nicht beeinflusst wird.

Die Vorgänge während der Beobachtungszeit können leichter überblickt werden, wenn diese in t gleiche Intervalle zerlegt wird. Für den als Beispiel betrachteten Fall mit drei Eigenschaften ergibt sich unter sinngemässer Anwendung der in Abschnitt 2 benützten Bezeichnungsweise folgendes Schema:

Gesamtheit der Objekte mit den Eigenschaften	Abgelaufene Zeiteinheiten			
	0	1	...	t
$A\ B\ C$	$L^{abc}(0)=l(0)$	$L^{abc}(1)=l(1)=l(0)-A_1-B_1-C_1$	...	$L^{abc}(t)=l(t)=l(0)-A_t-B_t-C_t$
$A\ B$	$L^{ab}(0)=0$	$L^{ab}(1)=C_1-A_1^c-B_1^c$	...	$L^{ab}(t)=C_t-A_t^c-B_t^c$
$B\ C$	$L^{bc}(0)=0$	$L^{bc}(1)=A_1-B_1^a-C_1^a$	...	$L^{bc}(t)=A_t-B_t^a-C_t^a$
$C\ A$	$L^{ca}(0)=0$	$L^{ca}(1)=B_1-C_1^b-A_1^b$	...	$L^{ca}(t)=B_t-C_t^b-A_t^b$
A	$L^{a}(0)=0$	$L^{a}(1)=B_1^c+C_1^b-A_1^{bc}$	...	$L^{a}(t)=B_t^c+C_t^b-A_t^{bc}$
B	$L^{b}(0)=0$	$L^{b}(1)=C_1^a+A_1^c-B_1^{ca}$	...	$L^{b}(t)=C_t^a+A_t^c-B_t^{ca}$
C	$L^{c}(0)=0$	$L^{c}(1)=A_1^b+B_1^a-C_1^{ab}$	...	$L^{c}(t)=A_t^b+B_t^a-C_t^{ab}$
keine	$L^{0}(0)=0$	$L^{0}(1)=A_1^{bc}+B_1^{ca}+C_1^{ab}$	...	$L^{0}(t)=A_t^{bc}+B_t^{ca}+C_t^{ab}$
Summe über alle Gesamtheiten	$l(0)$	$l(0)$	...	$l(0)$

Dabei bedeutet beispielsweise

A_i = Anzahl der Objekte, die bis zur Zeit (i) aus der Hauptgesamtheit l ausscheiden, weil sie die Eigenschaft A verlieren;

A_i^c = Anzahl der Objekte, die bis zur Zeit (i) aus der Nebengesamtheit L^{ab} ausscheiden, weil sie A verlieren;

A_i^{bc} = Anzahl der Objekte, die bis zur Zeit (i) aus der Nebengesamtheit L^a ausscheiden, weil sie A verlieren.

Sollen aus diesen Aufzeichnungen über den beobachteten Verlauf der Ereignisse sinnvolle Masszahlen für die Häufigkeit des Verlustes der betrachteten Eigenschaften abgeleitet werden, so liegen zwei verschiedene Wege nahe.

a) Betrachtung aller Gesamtheiten

Sollen die Vorgänge vollständig erfasst werden, so sind sämtliche beobachteten Gesamtheiten in Betracht zu ziehen. Zur Bildung einer Masszahl für die Häufigkeit des Verlustes von A wird man dann von der Gesamtzahl der Objekte ausgehen, die während des gewählten Beobachtungsabschnittes die Eigenschaft A verloren haben. Diese beträgt beispielsweise bis zum Ablauf des i-ten Intervalls:

$$A_i + A_i^c + A_i^b + A_i^{bc}$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für eines der $l(0)$ Objekte der Hauptgesamtheit zwischen der Zeit 0 und i die Eigenschaft A zu verlieren (gleichgültig, ob die betreffenden Objekte auch noch die Eigenschaften B oder C verloren haben oder nicht)

$$a(0, i) = \frac{A_i + A_i^c + A_i^b + A_i^{bc}}{l(0)}$$

b) Betrachtung der Hauptgesamtheit allein

Die Beobachtung kann aber auch beschränkt werden auf das Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit $l(t)$, wobei lediglich auf die drei Kategorien A_i, B_i und C_i von ausgeschiedenen Objekten abzustellen ist. Eine sinnvolle Masszahl ergibt sich, wenn diese Beobachtungsergebnisse bezogen werden auf den Anfangsbestand $l(0)$; also

$$\bar{a}(0, i) = \frac{A_i}{l(0)}$$

$\bar{a}(0, i)$ stellt für jedes zur Zeit 0 der Hauptgesamtheit angehörende Objekt die Wahrscheinlichkeit dar, bis zur Zeit i wegen Verlustes der Eigenschaft A aus der Hauptgesamtheit auszuscheiden oder, mit anderen Worten, als erste die Eigenschaft A zu verlieren.

c) Zusammenhang der beiden Masszahlen

Wegen der beiden Möglichkeiten zur Bestimmung von $l(t)$ besteht zwischen den nach Betrachtung a und b definierten Masszahlen bei n Abgangsursachen der Zusammenhang:

$$1 - \sum_{r=a}^{n} \bar{r}(0, t) = \prod_{r=a}^{n} [1 - r(0, t)] \tag{1}$$

Die einzelnen Gesamtheiten, die im Schema auf Seite 177 auftreten, können in geeigneter Weise zusammengefasst werden, beispielsweise zu einer Gesamtheit, die nach der Zeit t sämtliche Objekte umfasst, welche die Eigenschaft A noch besitzen:

$$l^a(t) = l(t) + L^{ab}(t) + L^{ca}(t) + L^a(t)$$

Werden aus dem Schema auf Seite 177 die Werte für die Nebengesamtheiten eingesetzt, so ergibt sich für

$$l^a(t) = l(0) - A_t - A_t^c - A_t^b - A_t^{bc}$$

da die Glieder mit B oder C sämtliche wegfallen. Die Ordnung $l^a(t)$ und die daraus hergeleitete Wahrscheinlichkeit $a(0, t)$ ist also unabhängig von der Zahl der Abgänge wegen Verlustes der übrigen Eigenschaften. Insofern ist die von Karup für solche Wahrscheinlichkeiten eingeführte Bezeichnung unabhängige Wahrscheinlichkeiten sinnvoll, obwohl aus andern Gesichtspunkten auch andere Bezeichnungen — z. B. Elementarwahrscheinlichkeiten; partielle oder einfache Wahrscheinlichkeiten und andere — begründet werden könnten. Das Schema auf Seite 177 zeigt ferner, dass die Anwendung des Produktensatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie in den betrachteten statistischen Aufgaben durchaus begründet ist, wenn es sich darum handelt, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass ein Objekt sowohl die eine als auch weitere bestimmte Eigenschaften verliert.

Die Masszahlen $\bar{a}(0, t)$, $\bar{b}(0, t)$, $\bar{c}(0, t)$ pflegt man als abhängige Wahrscheinlichkeiten zu bezeichnen. Die Betrachtung des Schemas auf Seite 177 lässt ohne weiteres erkennen, dass die Zahl der Abgänge aus der Hauptgesamtheit $l(t)$ wegen Verlustes der Eigenschaft A bei gleichbleibender Wirkung dieser Ursache davon abhängig ist, ob mehr oder weniger Objekte bereits vorher wegen Verlustes der übrigen Eigenschaften ausgeschieden sind. Insofern erscheint auch diese Bezeichnung als sinnvoll. Bei einer Beschränkung der Betrachtung auf die Vorgänge in der Hauptgesamtheit kann eine als Produkt gebildete Wahrscheinlichkeit nicht auftreten, da jedes Objekt ausscheidet, sobald es eine der beobachteten Eigenschaften verliert. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt innerhalb der Hauptgesamtheit sowohl die eine als auch weitere bestimmte Eigenschaften verliert, kann sich in diesem Falle überhaupt nicht stellen.

Ohne auf eine Diskussion der Benennung eintreten zu wollen, werden im folgenden zur Unterscheidung der beiden Masszahlen die Bezeichnungen abhängige und unabhängige Wahrscheinlichkeiten benützt. Das Symbol für die abhängige Wahrscheinlichkeit wird stets überstrichen.

II.

Auch bei kontinuierlicher Betrachtung zeigt sich die hervorgehobene Möglichkeit, für die Darstellung der Ausscheidewahrscheinlichkeit zwei Wege zu beschreiten.

a) Bezieht man alle Objekte, die in irgendeiner Gesamtheit während der Zeit von 0 bis t die Eigenschaft A verloren haben, auf den Anfangsbestand, so ergibt sich die Beziehung

$$a(0, t) = \int_0^t a'(0, x)\, dx = \frac{1}{l(0)} \int_0^t l^a(x)\, \alpha(x)\, dx \tag{2}$$

neben der auch die zyklischen Ansätze für $b(0, t)$ und $c(0, t)$ gelten.

Auch diese Beziehungen bestätigen, dass die unabhängige Wahrscheinlichkeit $a(0, t)$ ausschliesslich durch die Abgangsintensität $\alpha(x)$ und die daraus abgeleitete Ordnung $l^a(x)$ bestimmt, also von den Intensitäten der übrigen Abgangsursachen unabhängig ist.

b) Werden dagegen nur die wegen Verlustes der Eigenschaft A aus der Hauptgesamtheit $l(x)$ ausscheidenden Objekte auf den Anfangsbestand bezogen, so ergibt sich die Beziehung

$$\bar{a}(0, t) = \int_0^t \bar{a}'(0, x)\, dx = \frac{1}{l(0)} \int_0^t l(x)\, \alpha(x)\, dx \tag{3}$$

neben der die zyklisch gleichartigen Beziehungen für $\bar{b}(0, t)$ und $\bar{c}(0, t)$ gelten.

Diese Beziehungen lassen erkennen, dass die abhängige Wahrscheinlichkeit $\bar{a}(0, t)$ nicht nur von $\alpha(x)$, sondern auch von den Intensitäten der übrigen Abgangsursachen $\beta(x)$ und $\gamma(x)$ abhängig ist, da alle drei Intensitäten miteinander die zusammengesetzte Ordnung $l(x)$ bestimmen. Wegen

$$\frac{l(t)}{l(0)} = \frac{l^a(t)\, l^b(t)\, l^c(t)}{l(0)\, l(0)\, l(0)} = [1 - a(0, t)]\,[1 - b(0, t)]\,[1 - c(0, t)]$$

gilt auch

$$\bar{a}(0, t) = \int_0^t [1 - b(0, x)]\,[1 - c(0, x)]\,\frac{l^a(x)}{l(0)}\,\alpha(x)\,dx$$

$$= \int_0^t a'(0, x)\,dx - \int_0^t b(0, x)\,a'(0, x)\,dx - \int_0^t c(0, x)\,a'(0, x)\,dx + \\ + \int_0^t b(0, x)\,c(0, x)\,a'(0, x)\,dx$$

sowie entsprechende Beziehungen für $\bar{b}(0, t)$ und $\bar{c}(0, t)$.

Nach Durchführung passender partieller Integrationen ergibt sich

$$\bar{a}(0, t) = a(0, t) - a(0, t)\,b(0, t) + \int_0^t a(0, x)\,b'(0, x)\,dx - c(0, t)\,a(0, t) + \\ + \int_0^t a(0, x)\,c'(0, x)\,dx + a(0, t)\,b(0, t)\,c(0, t) - \\ - \int_0^t a(0, x)\,b(0, x)\,c'(0, x)\,dx - \int_0^t a(0, x)\,c(0, x)\,b'(0, x)\,dx$$

$$\bar{b}(0, t) = b(0, t) - c(0, t)\,b(0, t) + \int_0^t b(0, x)\,c'(0, x)\,dx - \int_0^t a(0, x)\,b'(0, x)\,dx + \\ + \int_0^t c(0, x)\,a(0, x)\,b'(0, x)\,dx$$

$$\bar{c}(0, t) = c(0, t) - \int_0^t a(0, x)\,c'(0, x)\,dx - \int_0^t b(0, x)\,c'(0, x)\,dx + \\ + \int_0^t a(0, x)\,b(0, x)\,c'(0, x)\,dx$$

Eine Addition dieser drei Ausdrücke führt auf die Grundbeziehung (1).

III.

Die beiden für die Herleitung der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten beschrittenen Wege finden eine Parallele in den beiden Lösungswegen, die für die grundlegende Differentialgleichung

$$\mu(x) = \sum_{\varrho=a}^{\nu} \varrho(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)}$$

bestehen.

a) Die direkte Integration beider Seiten führt auf die unabhängige Wahrscheinlichkeit:

$$p(0,t) = e^{-\int_0^t \mu(x)\,dx} = \prod_{\varrho=a}^{\nu} e^{-\int_0^t \varrho(x)\,dx} = \prod_{r=a}^{n} [1 - r(0,t)]$$

b) Die Integration von

$$l(x)\,\mu(x) = l(x) \sum_{\varrho=a}^{\nu} \varrho(x) = -l'(x)$$

führt zur abhängigen Wahrscheinlichkeit:

$$p(0,t) = 1 - \frac{1}{l(0)} \int_0^t l(x)\,\mu(x)\,dx = 1 - \frac{1}{l(0)} \sum_{\varrho=a}^{\nu} \int_0^t l(x)\,\varrho(x)\,dx = 1 - \sum_{r=a}^{n} \bar{r}(0,t)$$

Diese Erwägungen zeigen übrigens, dass nicht die additive Zerlegung der Intensität $\mu(x)$ in die Komponenten $\varrho(x)$ für den Begriff der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten von ausschlaggebender Bedeutung ist, da diese Zerlegung ebenfalls auf die Darstellung der abhängigen Wahrscheinlichkeiten führen kann.

IV.

Für die bisherigen Betrachtungen ist die Beobachtungszeit in t gleiche Intervalle zerlegt worden. Es besteht kein Hindernis, die Intervalle ganz beliebig lang zu wählen. Beispielsweise kann man sich die Beobachtungszeit derart zerlegt denken, dass in jedem einzelnen Intervall bei der Hauptgesamtheit ausschliesslich Abgänge wegen Verlustes ein und derselben Eigenschaft eintreten.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich folgendes Schema, wobei zur Vereinfachung der Darstellung lediglich zwei Eigenschaften (Abgangsursachen) unterschieden werden:

Abgelaufene Zeit	Gesamtheit der Objekte mit den Eigenschaften AB	A	B	0
0	$l(0)$	$L^a(0)=0$	$L^b(0)=0$	$L^0(0)=0$
τ_1	$l(1)=l(0)-A_1$	$L^a(1)=0$	$L^b(1)=A_1$	$L^0(1)=0$
τ_2	$l(2)=l(1)-B_1$	$L^a(2)=B_1$	$L^b(2)=A_1-B_1^a$	$L^0(2)=B_1^a$
τ_3	$l(3)=l(2)-[A_2-A_1]$	$L^a(3)=B_1-A_2^b$	$L^b(3)=A_2-B_1^a$	$L^0(3)=B_1^a+A_2^b$
τ_4	$l(4)=l(3)-[B_2-B_1]$	$L^a(4)=B_2-A_2^b$	$L^b(4)=A_2-B_2^a$	$L^0(4)=B_2^a+A_2^b$

usw.

Da sich in den einzelnen Intervallen die Abgänge A_i und B_i nicht stören, lassen sich bei dieser Zerlegung der Beobachtungszeit die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten ausschliesslich auf Grund der Beobachtungen in der Hauptgesamtheit — unbekümmert um die Vorgänge in den Nebengesamtheiten — bestimmen.

Es ist

$$a(0,\tau_1)=\frac{A_1}{l(0)} \qquad b(0,\tau_1)=0$$

$$a(\tau_1,\tau_2-\tau_1)=0 \qquad b(\tau_1,\tau_2-\tau_1)=\frac{B_1}{l(1)}$$

$$a(\tau_2,\tau_3-\tau_2)=\frac{A_2-A_1}{l(2)} \qquad b(\tau_2,\tau_3-\tau_2)=0$$

$$a(\tau_3,\tau_4-\tau_3)=0 \qquad b(\tau_3,\tau_4-\tau_3)=\frac{B_2-B_1}{l(2)}$$

usw.

Daraus folgt:

$$p^a(0,t)=p^a(0,\tau_1)\,p^a(\tau_2,\tau_3-\tau_2)\,p^a(\tau_4,\tau_5-\tau_4)\ldots$$

$$p^b(0,t)=p^b(\tau_1,\tau_2-\tau_1)\,p^b(\tau_3,\tau_4-\tau_3)\,p^b(\tau_5,\tau_6-\tau_5)\ldots$$

Auf diese Möglichkeit der unmittelbaren Bestimmung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten auf Grund einer Beobachtung der Abgänge aus der Hauptgesamtheit hat bereits *Böhmer* [10] aufmerksam gemacht.

Die unmittelbare Ableitung der unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Periode aus den Beobachtungen bei einer Gesamtheit mit mehreren Abgangsursachen ist also nur möglich, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

entweder müssen die Abgänge aus der betreffenden Ursache auch über sämtliche Nebengesamtheiten verfolgt werden können, so dass sich die Gesamtzahl der von einer Abgangsursache in der Haupt- und den Nebengesamtheiten getroffenen Objekte feststellen lässt;

oder die zeitliche Verteilung der Abgänge aus der Hauptgesamtheit nach den verschiedenen Ursachen muss bekannt sein.

Die zweite Voraussetzung ist auch erfüllt, wenn der analytische Ausdruck für den Verlauf der Ausscheidewahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit bekannt ist. Beide Voraussetzungen laufen darauf hinaus, dass für die Ermittlung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten auch die zeitliche Abwicklung der Vorgänge innerhalb der Beobachtungsperiode (Durchlaufen der Nebengesamtheiten, Reihenfolge oder Verteilungsfunktion) eine Rolle spielt; im Gegensatz zu den abhängigen Wahrscheinlichkeiten, für deren Bestimmung die Kenntnis des Anfangsbestandes und der Gesamtabgänge aus der Hauptgesamtheit nach den verschiedenen Ursachen genügt, wobei die Reihenfolge oder zeitliche Verteilung der Fälle ohne Bedeutung ist.

4. Abbruch der Beobachtung nach dem Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit

Für die Betrachtungen in Abschnitt 3 wurde vorausgesetzt, dass der Verlust einer Eigenschaft auf die Ursachen, die zum Verlust der verbleibenden Eigenschaften führen, keinen Einfluss ausübe. Die Beobachtung konnte daher ohne weiteres auch über alle Nebengesamtheiten zu Ende geführt werden.

Nun ist noch der Fall in Betracht zu ziehen, wo die primäre Beobachtung der Objekte abgebrochen werden muss, sobald sie aus der Hauptgesamtheit ausscheiden, weil der Verlust einer Eigenschaft eine Änderung für die Einwirkung der übrigen Abgangsursachen zur Folge hat. Als Beispiel sei erwähnt, dass streng genommen eine Sterblichkeitsmessung bei Ehepaaren nach dem Tode eines Ehegatten abgebrochen werden muss, weil eine verwitwete Person erfahrungsgemäss einer anderen Sterblichkeit unterworfen ist als eine verheiratete. Der Tod eines Ehegatten beeinflusst somit die Sterblichkeit des überlebenden Ehegatten.

In andern häufig vorkommenden Fällen kann sich der Verlust einer Eigenschaft so weitgehend auswirken, dass eine weitere Beobachtung des betreffenden Objektes zwangsläufig aufhören muss. Werden beispielsweise in einer Hauptgesamtheit von aktiven Personen die Aktiven-Sterblichkeit und die Invaliditätshäufigkeit gemessen, so kann wohl bei den Invaliden die Sterblichkeit weiter beobachtet werden, doch handelt es sich dabei nicht mehr um die gesuchte Aktiven-Sterblichkeit, sondern um die davon unter Umständen stark verschiedene Invaliden-Sterblichkeit. Für die Messung der Aktiven-Sterblichkeit muss — wie im vorigen Beispiel — die Beobachtung nach der Invalidierung abgebrochen werden. Verliert jedoch ein der Beobachtung unterstellter Aktiver das Leben, so hört jede weitere Beobachtung über seine Invaliditätshäufigkeit naturgemäss auf. Ähnlich verhält es sich, wenn ein beobachtetes Objekt aus irgendeinem andern Grunde aus der Beobachtung ausscheidet. Dieser Fall liegt beispielsweise vor bei der Sterblichkeitsmessung in einem Personenbestand (z. B. Versicherten), in dem Austritte (Auflösung der Versicherung) zu verzeichnen sind.

In all diesen Fällen werden die Nebengesamtheiten, wie sie im Schema auf Seite 177 dargestellt sind, gewissermassen imaginär. Das hindert indessen keineswegs, dass sie in der mathematischen Darstellung beibehalten werden dürfen.

Freilich wird in diesen Fällen eine tatsächliche Beobachtung der Abgänge aus den Nebengesamtheiten und damit eine direkte Bestimmung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungen verunmöglicht — es sei denn, die genaue Reihenfolge der Abgänge aus der Hauptgesamtheit wäre bekannt. Weil die Fälle, die ihrer Natur nach den Abbruch der Beobachtung nach dem Ausscheiden des Objektes aus der Hauptgesamtheit verlangen, in der Praxis häufig vorkommen, entsteht das Bedürfnis, geeignete Methoden für die Bestimmung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungen in der Hauptgesamtheit — d. h. aus den abhängigen Wahrscheinlichkeiten — auszubilden.

5. Versicherungsformen auf Grund von abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Die einfachsten Versicherungsformen knüpfen die Auszahlung der Leistung an den Eintritt des Versicherungsfalles, der aus einer einzigen bestimmten Ursache herbeigeführt wird. Nicht selten treten aber auch Versicherungsformen auf, die Versicherungsleistungen in Aussicht stellen für verschiedene Versicherungsfälle, die aus mehreren bestimmten Ursachen eintreten können.

Zur beliebigen Zeit x wirke die Ursache R mit der Intensität $\varrho(x)$; für die aus der Ursache R in der Zeit x bis $x + dx$ eintretenden Schadenfälle werde die einmalige Zahlung $R(x)$ — oder eine periodische Leistung mit diesem Barwert — fällig. Das entsprechende gilt für alle von der Versicherung erfassten Schadenursachen A bis N.

Bei einer Versicherungsform mit mehreren Schadenursachen kann die Leistungspflicht in verschiedener Weise geordnet sein. Als Extremfälle — zwischen denen verschiedene Kombinationsmöglichkeiten liegen — interessieren die beiden folgenden:

a) Versicherungsform auf Grund von abhängigen Wahrscheinlichkeiten

Ist die Leistungspflicht derart geregelt, dass nur ein einziges Mal eine Auszahlung stattfindet, nämlich beim Eintritt des ersten Schadens, gleichgültig aus welcher der n Ursachen er sich einstellt, so bestimmt sich der Betrag der fälligen Versicherungsleistungen in einem Bestand von $l(x)$ versicherten Personen oder Objekten auf Grund der abhängigen Wahrscheinlichkeiten.

Als Barwert sämtlicher Versicherungsleistungen für die Zeit von 0 bis t ergibt sich bei diskontinuierlicher Betrachtung, wenn angenommen wird, die während eines Versicherungsjahres ausgelösten Leistungen seien stets am Ende des betreffenden Jahres zahlbar:

$$\overline{W}(0, t) = \sum_{x=0}^{t-1} v^{x+1}\, l(x) \sum_{a}^{n} \bar{r}(x, 1)\, R(x) \quad ^{1})$$

[1]) Hier und im folgenden soll die vereinfachte Schreibweise andeuten, dass über alle Glieder, die sich für die n Ursachen ergeben, zu summieren ist.

Bei kontinuierlichem Verlauf der Ereignisse und sofortiger Auszahlung lässt sich der Barwert darstellen durch

$$\overline{W}(0, t) = \int_0^t e^{-\delta x}\, l(x) \sum_a^n \varrho(x)\, R(x)\, dx$$

In diesen Beziehungen ist auch der Fall eingeschlossen, wo beim Eintritt eines bestimmten Versicherungsfalles (z. B. freiwilliger Rücktritt) die Versicherung erlischt, ohne dass eine Leistungspflicht entsteht. Für die betreffende Ursache G ist dann $G(x) = 0$.

b) Versicherungsform auf Grund von unabhängigen Wahrscheinlichkeiten

Ist die Leistungspflicht aus einer Versicherung nicht auf den zuerst eintretenden Fall beschränkt, sondern erstreckt sie sich auf sämtliche infolge der n Ursachen während der Versicherungsdauer eintretenden Versicherungsfälle, so wird für eine Versicherung unter Umständen mehrmals eine Leistung fällig. Die Versicherung wird für ein bestimmtes Objekt erst gegenstandslos, wenn alle n versicherten Fälle eingetreten sind. Bei dieser Ordnung der Leistungspflicht sind die Fälligkeiten auf Grund der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Die Barwerte sämtlicher Versicherungsleistungen für die Zeit 0 bis t betragen:

$$W(0, t) = \sum_{x=0}^{t-1} v^{x+1} \sum_a^n l^r(x)\, r(x, 1)\, R(x)$$

oder

$$W(0, t) = \int_0^t e^{-\delta x} \sum_a^n l^r(x)\, \varrho(x)\, R(x)\, dx$$

Je nach der Regelung der Prämienzahlung treten ähnliche Unterschiede in der Darstellung des Barwertes der Prämieneinnahme auf.

Die mitgeteilten Ansätze könnten vielleicht geeignet sein als Ausgangspunkt für eine systematische Darstellung von Renten- und Todesfallversicherungen auf mehrere Leben, etwa im Sinne von *Berger* [12, 13] und *Vajda* [15].

c) Versicherungsformen auf Grund beider Arten von Wahrscheinlichkeiten

Zum Schlusse sei nur andeutungsweise darauf hingewiesen, dass auch Mischungen zwischen den beiden unter a und b dargestellten

Fällen auftreten können. Die Leistungspflicht würde dann derart geordnet, dass sie nach Erledigung eines Schadenfalles aus den Ursachen $A, B, \ldots$ oder H vollständig erlischt, nach dem Eintritt anderer bestimmter Schadenfälle aus den Ursachen $J, K, \ldots$ oder N jedoch für weitere Fälle bestehenbleibt. In den Rahmen dieser Kombinationen gehören auch der von *Berger* [12, 13] behandelte «symmetrische Fall», wenn keines der verbundenen Leben vor den andern ausgezeichnet ist, und der «unsymmetrische Fall», wenn auch die Reihenfolge des Ausscheidens der betrachteten Personen von Bedeutung ist.

Im übrigen sind solche gemischte Versicherungsformen auch im Gebiete der Sachversicherung denkbar.

d) Die Mutualitätsordnung

Nach *Cantelli* [14] lässt sich das Deckungskapital darstellen durch

$$V(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \sum_{x=0}^{t-1} r^{t-x} X(x)\, \lambda(x)$$

wo $L(t-1)\, X(t-1)$ die im Jahre $(t-1)$ bis t aus dem Versicherungsbestand $L(t-1)$ insgesamt eingehende Prämieneinnahme und $Y(t-1)\, V(t)$ die am Ende des gleichen Jahres insgesamt zur Auszahlung gelangende Versicherungsleistung bedeutet. Die «Mutualitätsordnung» wird charakterisiert durch

$$\lambda(t) = \lambda(0) \prod_{v=0}^{t-1} \psi(v)$$

wo

$$\psi(v) = \frac{Y(v)}{L(v)} + \frac{L(v+1)}{L(v)}$$

ist. Eine ähnliche Beziehung ergibt sich bei kontinuierlicher Darstellung der Vorgänge:

$$V(t) = \int_0^t \frac{\lambda(x)}{\lambda(t)}\, e^{\delta(t-x)} X(x)\, dx$$

wo die «Mutualitätsordnung» die Form annimmt:

$$\lambda(t) = L(0)\, e^{\int_0^t \left[\frac{L'(x)}{L(x)} + \frac{Y(x)}{L(x)}\right] dx}$$

Nur andeutungsweise sei erwähnt, dass die «Mutualitätsordnung» — oder die Funktion ψ — verschieden zu interpretieren ist, je nachdem, ob die in Frage stehende Versicherungsform auf Grund von abhängigen oder von unabhängigen Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt der n eingeschlossenen Versicherungsereignisse dargestellt wird.

Ist beispielsweise die Leistungspflicht aus einer Versicherung im Sinne der Ausführungen unter Abschnitt a nach dem ersten Schadenfall erschöpft, so bedeutet:

$$\bar{\psi}(v) = 1 - \sum_a^n \bar{r}(v, 1)\,[1 - R(v)]$$

oder bei kontinuierlicher Darstellung:

$$\bar{\lambda}(t) = l(t)\, e^{\int_0^t \sum_a^n \varrho(x) R(x)\, dx}$$

Handelt es sich jedoch um eine Versicherungsform, die im Sinne von Abschnitt b auf Grund der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten dargestellt wird, so bedeutet

$$\psi(v) = \frac{1 + \sum_a^n p^r(v)\, r(v, 1)\, R(v) - \prod_a^n r(0, v + 1)}{1 - \prod_a^n r(0, v)}$$

oder bei kontinuierlicher Darstellung:

$$\lambda(t) = l(0)\left[1 - \prod_a^n r(0, t)\right] e^{\int_0^t \frac{\sum_a^n p^r(0, x)\varrho(x) R(x)}{1 - \prod_a^n r(0, x)}\, dx}$$

Cantelli hat seine Untersuchungen auf Versicherungsformen beschränkt, bei denen auf die abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten abzustellen ist. Die Ausdehnung seiner Theorie der Mutualitätsordnung auf Versicherungsformen, die auf Grund der unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten darzustellen sind, mag als Hinweis darauf dienen, dass die beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe für die Theorie und die Praxis nicht nur gleiche Berechtigung haben, sondern einander in sinnvoller Weise ergänzen.

6. Beziehungen zwischen den abhängigen und den unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Generell sind die Zusammenhänge zwischen den beiden Arten von Wahrscheinlichkeiten festgelegt durch die Grundbeziehung (1). Diese vermag indessen noch nichts auszusagen über den Zusammenhang zwischen der unabhängigen Wahrscheinlichkeit $a(0, t)$ und der entsprechenden abhängigen $\bar{a}(0, t)$.

Um solche Beziehungen herzustellen, muss versucht werden

$$a(0, t) \text{ als Funktion von } \bar{a}(0, x),\ \bar{b}(0, x) \text{ und } \bar{c}(0, x)$$

oder $$\bar{a}(0, t) \text{ als Funktion von } a(0, x),\ b(0, x) \text{ und } c(0, x)$$

darzustellen. Dies ist auf verschiedenen Wegen möglich; am einfachsten scheinen folgende Erwägungen zum Ziele zu führen.

A. Unabhängige Wahrscheinlichkeit als Funktion der abhängigen

Wird in der Identität

$$\alpha(x) = \frac{\alpha(x)\, l(x)}{l(x)}$$

für die linke Seite eingesetzt

$$\alpha(x) = -\frac{d}{dx} \ln l^a(x)$$

und für den Nenner auf der rechten Seite

$$l(x) = l(0)\left[1 - \bar{a}(0, x) - \bar{b}(0, x) - \bar{c}(0, x)\right]$$

so ergibt sich nach einer Integration zwischen 0 und t

$$a(0, t) = 1 - e^{-\int\limits_0^t \frac{\bar{a}'(0, x)\cdot dx}{1 - \bar{a}(0, x) - \bar{b}(0, x) - \bar{c}(0, x)}}$$

Die entsprechenden Beziehungen für $b(0, t)$ und $c(0, t)$ ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Grössen.

Da die abhängigen Wahrscheinlichkeiten in allen Fällen unmittelbar aus der Hauptgesamtheit beobachtet werden können, gibt diese Beziehung grundsätzlich die Möglichkeit, die unabhängigen

Wahrscheinlichkeiten auf Grund der Beobachtungen aus der Hauptgesamtheit — ohne Kenntnis der Nebengesamtheiten — zu berechnen. Immerhin genügt dazu nicht die Kenntnis der für die gesamte Beobachtungszeit festgestellten abhängigen Wahrscheinlichkeit $\bar{a}(0, t)$, sondern es muss ihr zeitlicher Verlauf $\bar{a}(0, x)$ für x von 0 bis t bekannt sein.

B. Abhängige Wahrscheinlichkeit als Funktion der unabhängigen

Aus

$$\bar{a}(0, t) = \int_0^t \frac{l(x)}{l(0)} \alpha(x)\, dx = \int_0^t \frac{l^a(x)\, l^b(x)\, l^c(x)}{l(0)\, l(0)\, l(0)} \alpha(x)\, dx$$

ergibt sich

$$\bar{a}(0, t) = \int_0^t [1 - b(0, t)]\,[1 - c(0, t)]\, a'(0, x)\, dx$$

Diese Beziehung ist bekannt; beispielsweise leitet sie *Berger* [11] — allerdings auf Grund anderer Erwägungen — ab.

C. Beziehung für den Unterschied zwischen der unabhängigen und abhängigen Wahrscheinlichkeit

Der Unterschied zwischen der abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeit, infolge einer bestimmten Ursache auszuscheiden, rührt davon her, dass aus der beobachteten Hauptgesamtheit ausserdem eine Anzahl von Objekten infolge anderer Abgangsursachen wegfallen. Diese Objekte stehen dann nicht mehr in der Hauptgesamtheit unter dem Risiko, von der ersten Abgangsursache getroffen zu werden. Diese Störung in bezug auf die Auswirkung der ersten Abgangsursache lässt sich erfassen durch die Beziehung

$$a(0, t) - \bar{a}(0, t) = \int_0^t [\bar{b}'(0, x) + \bar{c}'(0, x)]\, a(x, t - x)\, dx$$

Dieser Ansatz ist — beschränkt auf zwei Abgangsursachen — verschiedentlich verwendet worden für die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit bei einem Personenbestand mit Ein- und Austritten; beispielsweise von *Insolera* [17] und *Koeppler* [19].

D. Zusammenfassung

Damit sind drei direkte Beziehungen zwischen einer unabhängigen und der zugehörigen abhängigen Abgangswahrscheinlichkeit gewonnen, die sich für n Abgangsursachen wie folgt darstellen lassen:

$$(4^*) \qquad a(0,t) = 1 - e^{-\int\limits_0^t \frac{\bar{a}'(0,x)\,dx}{1-\sum\limits_{r=a}^{n} \bar{r}(0,x)}}$$

$$(4^{**}) \qquad \bar{a}(0,t) = \int\limits_0^t \prod_{r=b}^{n} [1 - r(0,x)]\, a'(0,x)\, dx$$

$$(4^{***}) \qquad a(0,t) = a(0,t) + \int\limits_0^t a(x, t-x) \sum_{r=b}^{n} \bar{r}'(0,x)\, dx$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich die entsprechenden Beziehungen für die übrigen Abgangswahrscheinlichkeiten.

Die drei Gleichungen (4) sind lediglich verschiedene Ausdrucksformen für ein und dieselbe Beziehung. Beispielsweise ergibt sich aus (4*) in etwas veränderter Schreibweise

$$\ln[1 - a(0,x)] = -\int\limits_0^x \frac{\bar{a}'(0,z)}{p(0,z)}\, dz$$

und durch Differentiation nach x

$$\bar{a}'(0,x) = -\frac{p(0,x)}{1-a(0,x)} \frac{d}{dx}[1 - a(0,x)] = \frac{p(0,x)}{1-a(0,x)}\, a'(0,x)$$

Durch Integration zwischen 0 und t entsteht Beziehung (4**). Nach zweckmässiger Umformung und partieller Durchführung der Integration kann auch (4***) in (4**) übergeführt werden. Ferner stellt das Ergebnis von Abschnitt 8 einen Zusammenhang zwischen den drei Beziehungen (4) her.

7. Auswertung der Beziehungen zwischen abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten auf Grund einfacher Hypothesen

Die Beziehungen (4) sind genau gültig für jeden beliebigen Verlauf der auftretenden Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und t. Praktisch lassen sie sich indessen nur auswerten, wenn die unter dem

Integral auftretenden Wahrscheinlichkeiten durch Funktionen dargestellt sind, die eine Lösung des Integrals zulassen. Für einige bestimmte Annahmen über die Gestalt dieser Funktionen ergibt sich eine besonders einfache Auswertung.

Solche Annahmen sind bei der Behandlung des Problems einer Sterblichkeitsmessung in Personenbeständen mit Ein- und Austritten von verschiedenen Autoren benützt worden. *Linder* [21] würdigt die wichtigsten von diesen Untersuchungen. Im folgenden werden einige einfache Hypothesen für den Fall von drei Abgangsursachen behandelt.

Annahme A

Die Abgänge aus der Hauptgesamtheit nach den drei Ursachen seien über die Beobachtungszeit von 0 bis t gleich verteilt; die Verteilung selbst kann ganz beliebig sein. Somit gilt mit beliebigem Verlauf von $\varphi(x)$, das stets anwächst zwischen dem Anfangswert $\varphi(0) = 0$ und dem Endwert $\varphi(t) = 1$,

$$\frac{\bar{a}(0, x)}{\bar{a}(0, t)} = \frac{\bar{b}(0, x)}{\bar{b}(0, t)} = \frac{\bar{c}(0, x)}{\bar{c}(0, t)} = \varphi(x)$$

Wird diese Hypothese in der Beziehung (4*) berücksichtigt, so entsteht:

$$\ln[1 - a(0, t)] = \frac{\bar{a}(0, t)}{\bar{a}(0, t) + \bar{b}(0, t) + \bar{c}(0, t)} \int_0^t \frac{-[\bar{a}(0, t) + \bar{b}(0, t) + \bar{c}(0, t)]\, \varphi'(x)}{1 - [\bar{a}(0, t) + \bar{b}(0, t) + \bar{c}(0, t)]\, \varphi(x)}\, dx$$

Das Integral lässt sich lösen, so dass gilt:

$$(5) \qquad a(0, t) = 1 - [1 - \bar{a}(0, t) - \bar{b}(0, t) - \bar{c}(0, t)]^{\frac{\bar{a}(0,t)}{\bar{a}(0,t) + \bar{b}(0,t) + \bar{c}(0,t)}}$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich entsprechende Beziehungen für die übrigen unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. Dieses bekannte Ergebnis [6], [21], [22], das stets abgeleitet worden ist aus der Annahme, die Abgänge seien gleichmässig verteilt (d. h. die abhängigen Wahrscheinlichkeiten $\bar{a}(0, x)$ und $\bar{b}(0, x)$ verlaufen linear), gilt also auch für die allgemeinere Annahme «gleicher Verteilung» der Abgänge. Die Beziehung (5) erfüllt die Grundbeziehung (1).

Für die praktische Auswertung kann eine Annäherung getroffen werden, wenn der Exponential-Ausdruck in eine Reihe entwickelt wird und die Glieder mit höheren als quadratischen Exponenten weggelassen werden. Dann wird die Näherungsbeziehung erreicht:

$$a(0,t) \approx \bar{a}(0,t)\left[1+\frac{1}{2}\left(\bar{b}(0,t)+\bar{c}(0,t)\right)\right] \tag{6}$$

Infolge der getroffenen Näherung (Wegfall der höheren Glieder der Reihe) erfüllt dieses Ergebnis die Grundbeziehung (1) nicht mehr.

Annahme B

Die drei unabhängigen Wahrscheinlichkeiten verlaufen proportional (Gegenstück zu Annahme A), so dass gilt:

$$\frac{a(0,x)}{a(0,\mathrm{t})}=\frac{b(0,x)}{b(0,t)}=\frac{c(0,x)}{c(0,t)}=\psi(x)$$

Wird diese Hypothese in (4**) berücksichtigt, so ergibt sich:

$$a(0,t)=a(0,t)\int_0^t \psi'(x)\,dx-a(0,t)\left[b(0,t)+c(0,t)\right]\int_0^t \psi(x)\,\psi'(x)\,dx+$$
$$+a(0,t)\,b(0,t)\,c(0,t)\int_0^t \psi^2(x)\,\psi'(x)\,dx$$

$$\bar{a}(0,t)=a(0,t)\left[1-\frac{1}{2}\left(b(0,t)+c(0,t)\right)+\frac{1}{3}\,b(0,t)\,c(0,t)\right] \tag{7}$$

Auch diese Beziehung ist stets abgeleitet worden aus der spezielleren Annahme, die beiden unabhängigen Wahrscheinlichkeiten weisen einen linearen Verlauf auf. Es ist zu beachten, dass die Beziehung (7) im Rahmen der ihr zugrunde gelegten Annahme im Gegensatz zu (6) genau ist und daher die Grundbeziehung (1) erfüllt.

Annahme C

Wittstein [7] hat bei der Behandlung des Problems der Sterblichkeitsmessung in einer offenen Personengesamtheit ebenfalls die Hypothese linearer Verteilung der Sterbefälle sowie der Ein- und Austritte benützt und gelangte zur Beziehung (6) für zwei Abgangsursachen. Daneben hat er einen anderen Fall mit zwei Abgangsursachen behandelt, ausgehend von der Hypothese, dass für die erste Ursache die unabhängige Wahrscheinlichkeit, für die zweite die abhängige Wahrscheinlichkeit linear verlaufe, so dass beim Ansatz $t = 1$ gilt:

$$a(0, x) = a(0, 1)\, x \quad \text{und} \quad \bar{b}(0, x) = \bar{b}(0, 1)\, x$$

Wird diese Annahme in (4***) eingeführt und

$$a(x, 1-x) = 1 - \frac{1 - a(0, 1)}{1 - a(0, 1)\, x}$$

berücksichtigt, so entsteht:

$$a(0, 1) = \bar{a}(0, 1) + \int_0^1 \left[1 - \frac{1 - a(0, 1)}{1 - a(0,1)\, x}\right] \bar{b}(0, 1)\, dx$$

$$= \bar{a}(0, 1) + \bar{b}(0, 1) + \bar{b}(0, 1) \frac{1 - a(0, 1)}{a(0, 1)} \ln\left[1 - a(0, 1)\right]$$

Nach Entwicklung des Logarithmus in eine Reihe wird

$$a(0, 1) = \bar{a}(0, 1) + \bar{b}(0, 1) \left[\frac{a(0, 1)}{2} + \frac{a^2(0, 1)}{2 \cdot 3} + \ldots\right]$$

Werden die Glieder mit quadratischen oder höheren Exponenten fallengelassen, so ergibt sich die Näherungsbeziehung

$$a(0, 1) \approx \frac{\bar{a}(0, 1)}{1 - \frac{1}{2}\bar{b}(0, 1)} \tag{8}$$

Dieses Resultat wird von verschiedenen Autoren übernommen. Seine Übertragung durch zyklische Vertauschung auf die unabhängige Wahrscheinlichkeit $b(0, 1)$ ist jedoch nicht möglich. Es ist nämlich zu beachten, dass die Annahme C, durch die der Verlauf von $a(0, x)$ und von $\bar{b}(0, x)$ festgelegt wird, eine symmetrische Behandlung des Problems für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $b(0, x)$ ausschliesst. Schon aus der Grundbeziehung (1) folgt ohne weiteres, dass nicht gleichzeitig alle vier Funktionen $a(0, x)$, $b(0, x)$, $\bar{a}(0, x)$, $\bar{b}(0, x)$

linear sein können. Da ein bestimmter Zusammenhang besteht zwischen einer abhängigen und der entsprechenden unabhängigen Wahrscheinlichkeit, dürfen überhaupt nicht beide Wahrscheinlichkeiten gleichzeitig beliebig festgelegt werden. Zyklische Lösungen können nur entstehen, wenn parallele Hypothesen entweder nur über den Verlauf der abhängigen Wahrscheinlichkeiten oder nur über den Verlauf der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten aufgestellt werden.

Für den Näherungswert (8) hat *Marchand* den Begriff «probabilitée corrigée» geprägt [27]. Diese Masszahl bildet nach seinen Ausführungen einen guten Näherungswert für die entsprechende unabhängige Wahrscheinlichkeit und lässt sich leicht aus den Beobachtungen in der Hauptgesamtheit ableiten.

Von der gleichen Näherungsbeziehung (8) geht auch *Schärf* [32] für seine Betrachtungen über partielle Bestandesänderungen aus, die ihm Anlass zur Untersuchung besonderer Integrationsprozesse geben.

Annahme D

Wittstein [7] gibt ferner für den Fall von zwei Ausscheideursachen eine Lösung an, ausgehend von der Annahme, $a(0, x)$ sei für gleichgrosse Intervalle konstant und $\bar{b}(0, x)$ verlaufe linear, so dass beim Ansatz $t = 1$ gilt:

$$\alpha(x) = \lambda \quad \text{und} \quad \bar{b}(0, x) = \bar{b}(0, 1)\, x$$

Aus dem ersten Ansatz folgt $1 - a(0, x) = e^{-\lambda x}$

und ferner $1 - a(x, 1 - x) = e^{-\lambda(1-x)} = [1 - a(0, 1)]^{1-x}$

Wird dieses Ergebnis in (4***) eingesetzt, so folgt

$$a(0, 1) = \bar{a}(0, 1) + \bar{b}(0, 1) + \bar{b}(0,1) \frac{a(0, 1)}{\ln[1 - a(0, 1)]}$$

Nach Entwicklung des logarithmischen Ausdruckes in eine Reihe und Durchführung der Division ergibt sich bei Weglassung der Glieder mit quadratischen oder höheren Exponenten wiederum die Näherungsbeziehung

$$a(0, 1) \approx \frac{\bar{a}(0, 1)}{1 - \frac{1}{2}\bar{b}(0, 1)} \tag{9}$$

Wittstein stellt anschliessend die Frage, welchen Verlauf $a(0, x)$ aufweisen muss, damit die Beziehung (9) genau stimmt. Er findet die Bedingung

$$a(x, 1-x) = a(0, 1)\,[1-x]$$

Mit dieser Hypothese in Verbindung mit der Annahme $\bar{b}(0, x) = \bar{b}(0, 1)x$ geht die Ausgangsgleichung (4***) tatsächlich über in (9). Obwohl dabei keine weiteren Annäherungen getroffen werden, kann daneben die zyklische Gleichung für $b(0, 1)$ nicht bestehen; sie würde mit (9) zusammen die Grundgleichung (1) nicht erfüllen.

Annahme E

Es ist zu erwarten, dass ein besser befriedigendes Resultat erreicht wird, wenn nur der erste Teil der soeben behandelten Hypothese von Wittstein auf alle auftretenden unabhängigen Wahrscheinlichkeiten übertragen wird.

Alle drei Abgangsintensitäten seien konstant:

$$\alpha(x) = \alpha; \quad \beta(x) = \beta; \quad \gamma(x) = \gamma$$

Daraus folgt

$$a(0, x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad \text{und} \quad a'(0, x) = \alpha\, e^{-\alpha x} = \alpha\, p^a(0, x)$$

Für b und c gelten die entsprechenden Beziehungen.

Werden die Ausdrücke in (4**) eingeführt, so entsteht:

$$\bar{a}(0, t) = \alpha \int_0^t e^{-(\alpha+\beta+\gamma)x}\, dx$$

$$a(0, t) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\,[1 - p(0, t)] \tag{10}$$

Diese Beziehung erfüllt mit den entsprechenden zyklischen die Grundbeziehung (1). Sie bestätigt das übrigens bei der getroffenen Annahme schon aus den Grundbeziehungen ablesbare Resultat:

$$\frac{\bar{a}(0, t)}{\alpha} = \frac{\bar{b}(0, t)}{\beta} = \frac{\bar{c}(0, t)}{\nu}$$

Annahme F

Zeuner geht in seiner Untersuchung [8] über die Sterblichkeitsmessung in einem durch Ein- und Austritte gestörten Personenbestand von folgenden — in die für die vorliegende Darstellung benützte Schreibweise übertragenen — Annahmen aus:

a) Die Austritte verlaufen proportional der unabhängigen Absterbeordnung:

$$l(0)\,\bar{b}'(0,x) = m\,l^a(x)$$

b) Die unabhängige Absterbeordnung verlaufe linear, so dass gilt:

$$\int_0^t l^a(x)\,dx = \frac{l(0) + l^a(t)}{2}\cdot t = \frac{1 + p^a(0,t)}{2}\,l(0)\,t$$

Nach diesen Ansätzen besteht

$$l(0)\,\bar{b}(0,t) = \int_0^t m\,l^a(x)\,dx = m\,\frac{1 + p^a(0,t)}{2}\,l(0)\,t$$

Daraus folgt

$$m = \frac{2\,\bar{b}(0,t)}{[1 + p^a(0,t)]\,t}$$

Wird die Annahme *a* in (4***) eingeführt — wobei lediglich zwei Abgangsursachen berücksichtigt seien — so ergibt sich

$$\begin{aligned}
a(0,t) &= \bar{a}(0,t) + \bar{b}(0,t) - \int_0^t p^a(x, t-x)\,\bar{b}'(0,x)\,dx \\
&= a(0,t) + \bar{b}(0,t) - \int_0^t \frac{l^a(x)}{l(0)}\,m\,p^a(x, t-x)\,dx \\
&= a(0,t) + \bar{b}(0,t) - p^a(0,t)\,m\int_0^t dx \\
&= \bar{a}(0,t) + \bar{b}(0,t)\left[1 - \frac{2\,p^a(0,t)}{1 + p^a(0,t)}\right]
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich auswerten

$$p^a(0,t) = 1 - a(0,t) = \frac{\bar{a}(0,t) - \bar{b}(0,t)}{2} \pm \sqrt{1 - \bar{a}(0,t) - \bar{b}(0,t) + \left(\frac{\bar{a}(0,t) - \bar{b}(0,t)}{2}\right)^2} \tag{11}$$

Dieses von Zeuner in längerer Ableitung begründete Resultat erfüllt mit der zyklischen Beziehung zusammen die Grundbeziehung (1).

Den von Zeuner benützten Hypothesen kann auch in anderer Art Ausdruck verliehen werden:

Hypothese a bedeutet nichts anderes, als dass

$$l(0)\,\bar{b}'(0, x) = l(x)\,\beta(x) = m\,l^a(x)$$

daraus folgt

$$m = \frac{l(x)}{l^a(x)}\,\beta(x) = \frac{l^b(x)}{l(0)}\,\beta(x) = b'(0, x)$$

Die erste Hypothese deckt sich also mit der Annahme, dass die unabhängige Wahrscheinlichkeit der Austritte linear verlaufe.

Die zweite Hypothese ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass auch die unabhängige Sterbenswahrscheinlichkeit linear verlaufe. Da somit durch die Zeunerschen Hypothesen lediglich Festsetzungen über die auftretenden unabhängigen Wahrscheinlichkeiten getroffen werden, ist es auf Grund der bei Annahme C angefügten Erwägungen verständlich, dass die Grundbeziehung (1) erhalten bleibt.

Übrigens lässt sich bei Betrachtung von zwei Abgangsursachen das auf der gleichen Hypothese beruhende Ergebnis (7) zusammen mit der zyklischen Beziehung in die von Zeuner mitgeteilte Beziehung (11) überführen.

8. Behandlung der Integralgleichung (4***)

Die in Abschnitt 5 angegebene Beziehung (4***) ist im Zusammenhang mit dem Problem der Sterblichkeitsmessung bezogen auf zwei Abgangsursachen u. a. von *Insolera* [17] und von *Koeppler* [19] behandelt worden. Beide haben versucht, sie als Integralgleichung zu lösen.

Schulthess [23] hat bereits darauf hingewiesen, dass das von Insolera angegebene Resultat nicht zutreffend sein kann, weil die von Insolera ausgearbeitete allgemeine Lösungsmethode für eine spezielle Klasse von Kernfunktionen [16] auf den vorliegenden Fall nicht anwendbar sei.

Aber auch die von Koeppler angegebene Lösung, die er auf seine umfangreiche Untersuchung besonderer Typen von Volterraschen Integralgleichungen [18] stützt, ist abwegig; offenbar weil er die unter dem Integral auftretende Funktion $a(x, t - x)$ behandelt, als ob sie identisch wäre mit $a(0, x)$, was indessen nicht zulässig ist.

Bei genauerer Untersuchung zeigt sich, dass die auftretende Integralgleichung eine für die Lösung besonders einfache Gestalt aufweist und ohne Anwendung von Näherungen leicht gelöst werden kann. Die Ausgangsgleichung (4***) lautet:

$$a(0,t) = \bar{a}(0,t) + \int_0^t a(x, t-x) \sum_{r=b}^{n} \bar{r}'(0,x)\, dx$$

Abkürzend sei im folgenden gesetzt:

$$\sum_{r=b}^{n} \bar{r}(0,x) = \bar{A}(0,x) \quad \text{und} \quad 1 - \prod_{b}^{n} [1 - r(0,x)] = A(0,x)$$

Die Lösung der Gleichung

$$(12) \qquad a(0,t) = \bar{a}(0,t) + \int_0^x a(x, t-x)\, \bar{A}'(0,x)\, dx$$

kann auf zwei Wegen erreicht werden:

a) Lösung als Differentialgleichung

Durch Umformung von (12) entsteht wegen $\bar{A}(0, 0) = 0$

$$1 - p^a(0,t) = \bar{a}(0,t) + \bar{A}(0,t) - \int_0^t \frac{p^a(0,t)}{p^a(0,x)} \bar{A}'(0,x)\, dx$$

Wird zur Vereinfachung gesetzt

$$\frac{1}{p^a(0,t)} = \varphi(t)$$

so gilt:

$$(13) \qquad \varphi(t)\,[1 - \bar{a}(0,t) - \bar{A}(0,t)] - 1 = -\int_0^t \varphi(x)\, \bar{A}'(0,x)\, dx$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich

$$(14) \qquad \varphi'(t)\,[1 - a(0,t) - \bar{A}(0,t)] = \varphi(t)\, \bar{a}'(0,t)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t \frac{\bar{a}'(0,x)}{1-\bar{a}(0,x)-\bar{A}(0,x)} dx}$$

Da nach der oben eingeführten Schreibweise

$$a(0, t) = 1 - p^a(0, t) = 1 - \varphi^{-1}(t)$$

ist, erhält die Lösung schliesslich die Form

$$a(0, t) = 1 - e^{-\int\limits_0^t \frac{\bar{a}'(0, x)\, dx}{1 - \sum\limits_{r=a}^{n} r(0, x)}}$$

und stimmt überein mit der aus direkten Überlegungen in Abschnitt 5 abgeleiteten Beziehung (4*).

b) Lösung als Integralgleichung

Eine Volterrasche Integralgleichung kann stets in eine Differentialgleichung umgeformt werden. Falls diese praktisch lösbar ist, bietet die direkte Lösung der Integralgleichung nur mehr theoretisches Interesse. Da die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung eindeutig ist, muss auch der im folgenden beschrittene Weg zum gleichen Ergebnis führen wie die Lösung der Differentialgleichung (14), was weder für die von Insolera noch die von Koeppler angegebene Lösung zutrifft.

Die Beziehung (12) stellt noch keine Integralgleichung nach Volterra dar, weil $a(x, t-x)$ eine ganz andere Funktion ist als $a(0, x)$, die für $x = t$ in die freie Funktion $a(0, t)$ übergeht. Es empfiehlt sich daher, die Umformung, welche zu (13) führte, fortzusetzen. Unter Berücksichtigung von

$$1 - \bar{a}(0, t) - \bar{A}(0, t) = p(0, t)$$

entsteht:

$$\varphi(t) = \frac{1}{p(0, t)} - \int\limits_0^t \frac{1}{p(0, t)}\, \varphi(x)\, \bar{A}'(0, x)\, dx \tag{15}$$

Diese Beziehung stellt eine Volterrasche Integralgleichung II. Art dar, die in ihrer allgemeinen Form lautet:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_0^t K(t, x)\, \varphi(x)\, dx$$

Ihre iterierten Kerne heissen:

$$K_n(t, x) = \int_x^t K(t, z)\, K_{n-1}(z, x)\, dz$$

Dabei ist:

$$K_1(t, x) = K(t, x)$$

Die Resolvente ist bestimmt durch:

$$R(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(t, x)$$

Symbolisch lautet dann die Lösung der allgemeinen Gleichung:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^t R(t, x)\, f(x)\, dx$$

Für die praktische Lösung ist entscheidend, ob dieser formale Ansatz ausgewertet werden kann. Die Integralgleichung (15) besitzt die Form eines Spezialfalles, weil die Kernfunktion $K(t, x)$ als Produkt aus zwei Funktionen gebildet ist, von denen die eine nur von x, die andere nur von t abhängt. Es ist nämlich:

$$K(t, x) = \frac{1}{p(0, t)} \bar{A}'(0, x)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise sei gesetzt:

$$\frac{1}{p(0, z)} \bar{A}'(0, z) = M'(z)$$

Dann ergibt sich für die iterierten Kerne

$$K_n(t, x) = \frac{1}{p(0, t)} \bar{A}'(0, x) \frac{[M(t) - M(x)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

und für die Resolvente

$$R(t, x) = \frac{1}{p(0, t)} \bar{A}'(0, x)\, e^{\lambda [M(t) - M(x)]}$$

oder:

$$R(t, x) = \frac{1}{p(0, t)} \bar{A}'(0, x)\, e^{\lambda \int_x^t \frac{1}{p(0, z)} \bar{A}'(0, z)\, dz}$$

Somit lautet die Lösung:

$$\varphi(t) = \frac{1}{p(0,t)}\left[1 + \lambda\int_0^t \frac{1}{p(0,x)}\bar{A}'(0,x)\, e^{\lambda\int_x^t \frac{1}{p(0,z)}\bar{A}'(0,z)\,dz}\, dx\right]$$

Wird nun noch beachtet, dass $\lambda = -1$ und

$$\lambda\frac{1}{p(0,x)}\bar{A}'(0,x)\, e^{\lambda\int_x^t \frac{1}{p(0,z)}\bar{A}'(0,z)\,dz} = -\frac{d}{dx} e^{-\int_x^t \frac{1}{p(0,z)}\bar{A}'(0,z)dz}$$

so wird die Lösung erreicht:

$$\varphi(t) = \frac{1}{p(0,t)} e^{-\int_0^t \frac{1}{p(0,z)}\bar{A}'(0,z)dz}$$

Werden die ursprünglichen Werte für die eingeführten Symbole berücksichtigt, so nimmt die Lösung die Form an:

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t \frac{\bar{a}'(0,z)dz}{1-\sum\limits_{r=a}^{n}\bar{r}(0,z)}}$$

Wegen $a(0,t) = 1 - \varphi^{-1}(t)$ geht schliesslich die Lösung der Integralgleichung (15) in die Beziehung (4*) über.

Wird in die Ausgangsgleichung (12) die Beziehung

$$\bar{A}'(0,x) = p^a(0,x)\, A'(0,x)$$

eingeführt, so kann man direkt auf die Beziehung (4**) als Lösung der Integralgleichung gelangen. Damit ist der Integralgleichung (4***) eine zentrale Stellung zugewiesen, während die aus andern Überlegungen hervorgegangenen Beziehungen (4*) und (4**) als ihre Lösungen erkannt werden.

Literaturhinweise

[1] *Encyklopädie* der mathematischen Wissenschaften (Band I, zweiter Teil, S. 849, 1900—1904).

[2] *E. Czuber:* Wahrscheinlichkeitsrechnung (Teubner Leipzig, Berlin 1921).

[3] *O. Anderson:* Einführung in die mathematische Statistik (Wien, 1935).

[4] *J. Karup:* Gutachten der Gothaer Lebensversicherungsbank über Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse.
Ferner: Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Wittwen-Societät (Dresden, 1893).

[5] *P. Spangenberg:* Die Karupsche Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten. (Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft XX, 1911).

[6] *C. Heym:* Einige Betrachtungen über Sterblichkeit (Masius' Rundschau der Versicherung, Band III, 1853).

[7] *Th. Wittstein:* Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern (Archiv der Mathematik und Physik v. Grunert, 39. Teil, 1862).

[8] *G. Zeuner:* Über die Sterblichkeit in Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern (Abhandlungen zur mathematischen Statistik, 1869).

[9] *Siebenter Internationaler Kongress* für Versicherungs-Wissenschaft (Amsterdam, 1912).

[10] *P. E. Böhmer:* Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, siehe 9.

[11] *A. Berger:* Die Prinzipien der Lebensversicherungstechnik (Springer Berlin 1925).

[12] *A. Berger:* Über eine Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Versicherungsmathematik (Blätter für Versicherungs-Mathematik, Band 1).

[13] *A. Berger:* Zur Theorie der Berechnung von Versicherungswerten für mehrere verbundene Leben (Blätter für Versicherungs-Mathematik, Band 2).

[14] *F. P. Cantelli:* Genesi e costruzione delle tavole di mutualità (Bolletino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza, N. 3, 1914).

[15] *St. Vajda:* Über Wahrscheinlichkeiten in der Theorie der Versicherung verbundener Leben (Assekuranzjahrbuch, Band 54, 1935).

[16] *F. Insolera:* Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica (Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LX, 1927).

[17] *F. Insolera:* Sul calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi aperti di popolazione (Atti reale accad. scienze di Torino, Vol. LXII, 1926/27).

[18] *H. Koeppler:* Die Anwendung der Integralgleichungen von Volterra in der Lebensversicherung (Giornale di matematica finanziaria, Serie II, Vol. V, 1935).

[19] *H. Koeppler:* Zur Berechnung von abhängigen und unabhängigen Ausscheide- und Sterbenswahrscheinlichkeiten und über den Zusammenhang beider Arten von abhängigen Wahrscheinlichkeiten (Versicherungsarchiv 1937/38).

[20] *K. Beutling:* Die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten in der Versicherungsmathematik und ihr Verhältnis zu den abhängigen (Diss. Berlin 1938).

[21] *A. Linder:* Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln (Diss. Bern 1934).

[22] *W. Friedli:* Methodischer Beitrag zu den Grundlagen der Invalidenversicherung (Festgabe Moser, 1931).

[23] *H. Schulthess:* Volterra'sche Integralgleichungen in der Versicherungsmathematik (Diss. Bern 1935).

[24] *E. Marchand:* Probabilités dépendantes et probabilités indépendantes (L'Enseignement Mathématique, 1937).

In den Mitteilungen schweizerischer Versicherungsmathematiker:

[25] *G. Du Pasquier:* Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung (Heft 7, 1912).

[26] *W. Friedli:* Intensitätsfunktion und Zivilstand (Heft 21, 1926).

[27] *E. Marchand:* Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes (Heft 33, 1938).

[28] *W. Saxer:* Zur Frage des Beharrungszustandes (Heft 27, 1932).

[29] *J. Meier:* Zur Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten (Heft 29, 1939).

[30] *A. Linder:* Über die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ordnungen aus den Beobachtungszahlen (Heft 30, 1935).

[31] *P. Güttinger:* Eine versicherungsmathematische Beziehung bei Gesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen (Heft 36, 1941).

[32] *H. Schaerf:* Über partielle Bestandsänderungen und eine Klasse neuer Integrationsprozesse (Heft 44, 1944).

[33] *P. Spangenberg:* Die zahlenmässige Berechnung der «unabhängigen» Wahrscheinlichkeiten aus den «abhängigen» und der «abhängigen» Wahrscheinlichlichkeiten aus den «unabhängigen» (Heft 10, 1915).