

Bemerkungen zu den Sterbetafeln von J.H. Lambert

Autor(en): **Eisenring, M.E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **48 (1948)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966898>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bemerkungen zu den Sterbetafeln von J. H. Lambert

Von *M. E. Eisenring*, Zürich

Herrn a. Direktor Dr. C. Wiesmann, Zürich,
zum 70. Geburtstag vom Verfasser gewidmet

Es wäre interessant, die zahlreichen frühen Autoren auf dem Gebiet der Erforschung der Absterbeordnung einmal unter dem Gesichtspunkt der *Konzeption* zu gruppieren, mit der sie an das Problem herantraten. Etwas vergrößernd könnte man sagen, dass sich in den ersten beiden Jahrhunderten der Sterblichkeitsforschung — von *John Graunt* (1620—1674) bis *Ludwig Moser* (1839) — die Metaphysiker und die Statistiker gegenüberstanden, ohne dass sich allerdings ein besonders akzentuierter «Grundlagenstreit» entwickelt hätte. Als gläubige Schüler der rationalistischen Aufklärung suchten die «Metaphysiker» nach dem mathematischen Ausdruck des invariant vorausgesetzten «Naturgesetzes der Sterblichkeit» und schrieben Abweichungen des empirischen Zahlenmaterials von den gefundenen «Gesetzen» den mannigfaltigen und z. T. frühzeitig richtig erkannten theoretischen und praktischen Fehlern der Beobachtung zu. Die empirischen Statistiker behandelten das Problem schon damals unter Gesichtspunkten, die grundsätzlich noch heute Gültigkeit haben. Selbstredend aber gingen — vor allem in der Frühzeit der Forschung — auch noch andere Strömungen in die Entwicklung: etwa theologische bei *Caspar Neumann* (1648—1715) oder arbeitshypothetische bei *Abraham de Moivre* (1667—1754) u. a.

Wohl der modernste unter den «Statistikern» und einer der bedeutendsten Erforscher des Problems der Absterbeordnung war *Johann Heinrich Lambert* (1728—1777), der geniale Schweizer Universalgelehrte, dessen Werke sich in den letzten zwanzig Jahren steigender Beachtung erfreuen¹⁾. Auch Lamberts Leistungen für die

¹⁾ Wir erinnern insbesondere an die in Edition begriffenen und zurzeit bereits in Bd. I und II vorliegenden «Opera Mathematica», bei Orell-Füssli herausgegeben von *Andreas Speiser*.

Grundlegung und Förderung der Versicherungsmathematik sind mehrfach gewürdigt worden ¹⁾, so dass wir uns darauf beschränken dürfen stichwortartig daran zu erinnern, dass Lambert neben spezifischen Verdiensten um die Konstruktion von Sterbetafeln — auf die wir z. T. zurückkommen — die Autorschaft verschiedener Begriffe beanspruchen darf, die er teils eingeführt, teils erstmalig wissenschaftlich scharf gefasst hat: Lebenskraft, Sterbeintensität, Lebenserwartung, wahrscheinliche Lebensdauer. Lambert hat auch aus städtischen und ländlichen Beobachtungen eine Volkssterbetafel konstruiert und das schon von *Daniel Bernoulli* aufgegriffene Problem unabhängiger Ausscheideordnungen weiter geklärt und eine Absterbeordnung exklusive Pockensterbefälle berechnet ²⁾. Lambert hat sich auch eingehend mit Problemen befasst, die heute vorab in die Gruppenversicherung gehören ³⁾.

Wenden wir uns nun dem engeren Thema der Konstruktion von Sterbetafeln zu: Da ist einmal mit *Linder* ⁴⁾ festzuhalten, dass Lambert als erster erkannte, dass Sterberegister nur dann eine einwandfreie Grundlage zur Aufstellung von Absterbeordnungen darstellen, wenn die beobachtete Bevölkerung im natürlichen Beharrungszustand steht. Lambert stellte fest, dass die Zahl der jährlichen Sterbefälle in London während eines Jahrhunderts praktisch konstant (22 000 bis 24 000) blieb, und schloss daraus, dass die Sterberegister dieser Stadt die nötigen Voraussetzungen für seine Untersuchungen erfüllten ⁵⁾.

¹⁾ Vgl. insbesondere *E. Zwinggi* in Bd. 42, Heft 1, S. 77 ff., dieser Zeitschrift und das dort beigegebene Literaturverzeichnis, auf dessen Wiederholung wir hier verzichten dürfen.

²⁾ In nichtmedizinischen Kreisen ist heute vielfach vergessen, welche Geissel die «Blattern» im 18. und noch weit ins 19. Jahrhundert hinein bedeuteten. Nach den Lambertschen Untersuchungen («Die Tödlichkeit der Kinderblattern», *Beyträge III*, S. 568 ff.), die sich z. T. auf *Daniel Bernoulli*, auf das *Süssmilchsche* Material und auf Erhebungen in Winterthur und Im Haag stützten, betrug der Anteil der Pockentodesfälle an den Gesamtsterbefällen mindestens 8 %, in den besonders exponierten Altersklassen 3—10 gar 39 %. Sterblichkeitsuntersuchungen solcher Art wurden zu Lamberts Zeiten eifrig in den Streit für und wider die Pockenimpfung einbezogen.

³⁾ «Die Trennung der Ehen durch den Tod», *Beyträge III*, S. 513 ff.; «Anzahl der zweyten und folgenden Ehen», S. 547 ff.; «Anzahl der Kinder aus jeden Ehen», S. 551 ff.; «Die Ehen mit dem Alter beyder Personen verglichen», S. 557 ff.

⁴⁾ «Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln», Bern 1934.

⁵⁾ Lambert entging der vor allem für städtische Verhältnisse wichtige Einfluss der Wanderbewegung nicht; er widmet dieser Frage aus Anlass der Untersuchung der verschiedenen Sterblichkeiten von Stadt und Land interessante Bemerkungen.

In der Literatur zur Geschichte der Sterblichkeitsforschung ist vielfach etwas summarisch von «der» Lambertschen Tafel und «der» Lambertschen Absterbefunktion die Rede. Diese ungenaue Ausdrucksweise zusammen mit dem bezeichnenden Umstand, dass ein sehr gewichtiger Druckfehler in der bekannteren der Lambertschen Überlebensfunktionen 150 Jahre — und z. T. noch bis in die jüngste Zeit — mitgeführt wurde, veranlasst uns, die Dinge hier kurz klarzustellen: Im Band I der «Beyträge», Kap. «Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche» (§§ 67—73), verarbeitet Lambert ein sechsjähriges Beobachtungsmaterial zu einer Tafel, die wir in Anlehnung an heute gebräuchliche Bezeichnungen als «London 1753/58» einführen wollen. In dem umfangreicheren und öfter zitierten Kap. IX des Bandes III der «Beyträge», «Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen» stützt sich Lambert einmal auf das Material der Periode «London 1728/1757» und der ebenfalls aus *Süssmilch* (dort Tab. 23 und 24) entnommenen Statistiken der «17 Kirchspiele». Schliesslich vereinigt Lambert das Material «London 1728/57» mit «17 Kirchspiele» durch gewogene Mittelbildung zu dem, was Linder die «grosse Lambertsche Sterbetafel» nennt, eine Tafel, die, obwohl künstlich konstruiert, die Bedeutung einer englischen Volkssterbetafel hat, die wir im folgenden als «EB 1728/57» bezeichnen wollen. Lamberts Sterbetafel unter Ausschluss von Pockentodesfällen, die wir einfachheitshalber eine «Pocken-Grenztafel» nennen wollen, ist eine Kombination aus EB 1728/57 und einer aus *Süssmilch* übernommenen Statistik der Pockentodesfälle in einem Zeitraum von 15 Jahren aus Dem Haag; wir bezeichnen diese Tafel — die übrigens nur bis zum Alter 50 geführt wurde — mit «PG 1728/57».

Die Aufgabe, vor die sich Lambert gestellt sah, war in erster Linie eine solche der Interpolation, nachdem sich aus dem verwendeten Material die Zahl der Lebenden nur für die Jahre 0, 2, 5, 10, 20, . . . 80, 90 ergab. Lambert war zwar nicht historisch, aber publizistisch der erste ¹⁾, der die Folge der l_x als Ordinaten aufzeichnete. Sofort erkannte Lambert die beiden Möglichkeiten graphischer und funktionaler Interpolationen. Nach heutiger Terminologie glich Lambert die Werte von «London 1753/58» sowohl graphisch wie mechanisch und schliesslich auch noch analytisch aus. Als mechanische Ausgleichsmethode

¹⁾ *Huygens* hatte bereits 1669 eine solche Darstellung gewählt, die aber erst 1897 veröffentlicht wurde; vgl. *Loewy*, S. 281.

entwickelt er ein System von Parabelbögen 2. Grades, die sich jeweils an den Intervallgrenzen berühren. Zur analytischen Ausgleichung zieht er eine ganze rationale Funktion n -ten Grades heran, die er numerisch für $n = 5$ und den Kurventeil $x > 45$ durchführt. Die von Lambert aufgestellte Funktion ¹⁾ findet sich z. B. auch bei *Linder* (S. 27). Unseres Wissens wird in der Literatur — etwa mit Ausnahme von *Loewy* — nicht darauf hingewiesen, dass es sich bei dieser Funktion nur um eine Annäherung der l_x «London 1753/58» für Alter über 45 handelt und dass diese Funktion insbesondere mit der «Grossen Lamberttafel», unserer EB 1728/57, gar nichts zu tun hat; ebenso wenig übrigens wie die zweite und viel bekanntere Absterbefunktion.

Diese zweite und unzweifelhaft auch bedeutendere Funktion gleicht die Tafel «London 1728/57» aus; wir kommen darauf zurück, möchten hier aber der Vollständigkeit halber noch darauf hinweisen, dass die dritte Lambertsche Tafel, EB 1728/57, *graphisch* ²⁾ ausgeglichen ist. EB 1728/57 ist übrigens die einzige der Lambertschen Tafeln, die vollständig durchgerechnet von Jahr zu Jahr für alle Alter von 0 bis 103 vorliegt und in heutiger Bezeichnung folgende Kolonnen

enthält: x , d_x , l_x , $\sum_x^{\omega} l_x$, $\frac{1}{q_x}$, $x + \ddot{e}_x$, $x +$ wahrscheinliche Lebensdauer.

Ein Blick auf den durch unsere Figur illustrierten verschiedenen Verlauf der Lambertschen Tafeln der l_x lässt es gerechtfertigt erscheinen, ausdrücklich festzuhalten, dass die in der Literatur vielfach als «Lamberts Sterbetafel» bezeichnete EB 1728/57 mit der ebenso häufig als «Lamberts Funktion der Überlebenden» (vgl. u.) bekannten Formel *nichts* zu tun hat.

Uns interessiert hier in erster Linie die Tafel «London 1728/57» und die sie ausgleichende Lambertsche Funktion:

$$\bar{l}_x = a \left(\frac{b-x}{b} \right)^2 - c \cdot (e^{-\mu x} - e^{-\lambda x})$$

¹⁾ Beiträge I, S. 488.

²⁾ «Ich habe mir zu diesem Ende die Jahre des Alters als Abscissen, die Anzahl der Lebenden als Ordinaten einer krummen Linie vorgestellt, und diese auf einem halben Regalbogen so regulär gezeichnet, als es ohne von den Zahlen merklich abzuweichen geschehen konnte. Dadurch erhielt ich die Ordinaten für jede Jahre so, dass, da ich sie nach eben dem Massstabe in Zahlen bestimmte, an den Zahlen nur wenig zu ändern war, um die Unterschiede so viel möglich regulär zu machen.» Beiträge III, S. 494.

was wir zunächst aus Gründen der Übersichtlichkeit der Diskussion schreiben wollen:

$$\bar{l}_x = A(x) - K(x)$$

$A(x)$ stellt die erste approximierende Funktion für die l_x dar. $K(x)$ ist eine die Approximation verschärfende Korrekturfunktion, deren Natur — wie wir zeigen werden — allerdings $A(x)$ bis zu einem gewissen Grade präjudiziert. Lambert ist der erste, der zum Ausgleich einer Beobachtungsreihe logistische Funktionen heranzieht ¹⁾.

Die obige Funktion \bar{l}_x scheint uns unter zwei Gesichtspunkten beurteilt werden zu können: Einmal kann — was natürlich bereits durch Lambert geschehen ist — untersucht werden, wie weitgehend die von Lambert gefundene numerische Lösung die zugrunde liegende Tafel «London 1728/57» approximiert, und dann kann man sich fragen, wie weitgehend der funktionale Aufbau als solcher geeignet ist, eine Überlebenskurve auszugleichen. Dabei ist sofort auf zwei nicht unwichtige Umstände hinzuweisen: Erstens bemühte man sich zu Zeiten Lamberts — und noch wesentlich später — um Überlebensfunktionen, die möglichst den *ganzen* Verlauf von $x = 0$ bis $x = \omega$ darstellen sollten, was aus bekannten Gründen unüberwindlich scheinenden Schwierigkeiten begegnen muss, und dann wäre es, zweitens, abwegig, die frühen Überlebensfunktionen aus dem Gesichtspunkt der Handlichkeit für die moderne Versicherungstechnik beurteilen zu wollen.

Die Bestimmung der 5 Konstanten der Lambertschen Funktion reduziert sich alsbald auf eine solche von 3 Grössen: a ist offenbar $= l_0$, die Konstante b zwar nicht theoretisch, aber praktisch $= \omega$, so dass sich die Untersuchung auf die Konstanten von $K(x)$ beschränken kann. Lambert fand für seine Funktion:

$$a = 10\,000; b = 96; c = 6176; \kappa = \frac{1}{13,682} \text{ } ^2); \lambda = \frac{1}{2,43114}$$

Lambert fand, dass die Funktion «der Sache ziemlich Genüge tat» (Beyträge III, S. 483). In der Tat ist die Approximation von $x = 5$

¹⁾ Vgl. Lorey a. a. O. S. 423.

²⁾ In Lamberts Publikation findet sich nun eben unglücklicherweise ein Druckfehler, indem statt des obigen Nenners — mit dem Lambert tatsächlich rechnete — 31,682 steht, was Lambert 11 Jahre nach der Drucklegung der «Beyträge» in einem Brief an den Freiherrn v. Paccassi richtigstellte. Vgl. Lorey a. a. O. S. 422.

bis $x = 60$ recht befriedigend: Lamberts Funktion verläuft ab Alter 5 durchwegs unterhalb der beobachteten Werte, der Fehler hält sich in der Grössenordnung von 1 %¹⁾. Die Rechnung, die Lambert zu den erwähnten Werten führte, ist unseres Wissens nicht erhalten, wir mussten uns deshalb in den folgenden Rechnungen einer eigenen Methode bedienen, die zweckmässig erscheint.

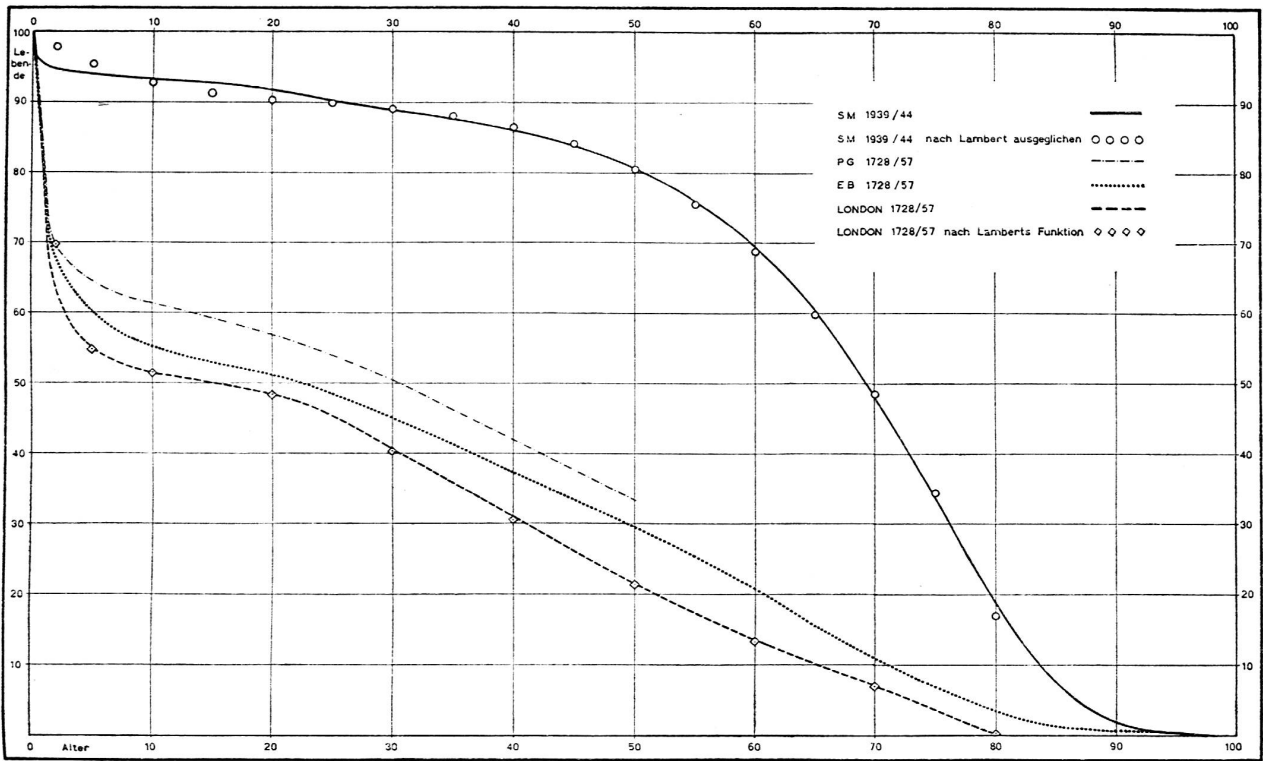
Um uns ein Bild darüber machen zu können, ob die Lambertsche Funktion auch *heutige* Überlebensordnungen noch anzunähern vermag, wollen wir sie auf die Tafel SM 1939/44 in Ansatz bringen. Die in unserer Figur eingezeichneten Lambertschen Überlebensordnungen und SM 1939/44 zeigen mit kaum zu übertreffender Deutlichkeit die tiefgreifenden Wandlungen, die sich in den letzten zwei Jahrhunderten in der Sterblichkeit und damit im *Altersaufbau* der Bevölkerung abgespielt haben. Sie lassen aber auch die Brauchbarkeit der Lambertschen Funktion auf den ersten Blick sehr fraglich erscheinen.

Die Funktion $K(x)$ lässt für positive x keinen Zeichenwechsel zu. Daraus folgt, dass $A(x)$ grundsätzlich auf der gleichen Seite — in unserem Ansatz oberhalb — der Punktefolge l_x zu bleiben hat, d. h. $A(x)$ darf nicht eine die l_x möglichst gut — also gegebenenfalls mit einer Anzahl Schnittpunkten — approximierende Parabel sein, sondern eine solche, die sich den l_x mit wachsendem x von oben nähert. Ein Blick auf die Kurve der l_x SM 39/44 zeigt, dass das Lambertsche $A(x)$ heute nicht mehr in Frage kommt²⁾. Andererseits zeigen etwas nähere Untersuchungen, dass eine Funktion $A(x) = l_0 - b \cdot x^4$ recht gute Dienste als erste Approximation leistet³⁾. Da mit $A(x)$ aus

¹⁾ Die Lambertsche Gegenüberstellung der berechneten und der beobachteten Werte (Beyträge S. 484) enthält nach unserer Kontrolle noch zwei Rechenfehler, indem «y calc.» für $x = 2$ nicht 6407, sondern 6965, und für $x = 40$ nicht 3099, sondern 3071 gibt.

²⁾ Sieht man, wie heute üblich, von den ersten Lebensjahren ab, so ist festzuhalten, dass die Kurve der l_x in zwei Jahrhunderten eine Entwicklung durchgemacht hat, die von einem konkaven Parabelbogen zu einem konvexen führte. Da dieser Übergang stetig vor sich ging, dürfte es eine Periode — Beginn des XIX. Jahrhunderts? — gegeben haben, in der die *de Moivresche* Gerade $l_x = l_0 \cdot (\omega - x)$: ω als erste Approximation durchaus berechtigt war.

³⁾ Wenn man für andere Zwecke, als hier zur Diskussion stehen, eine einfache erste rationale Approximation der Überlebensordnung SM 39/44 gebrauchen sollte, so würden wir die Funktion $l_x = 91500 - 0,0018 \cdot x^4$ in Vorschlag bringen, die für Alter von ca. 15 bis 75 eine brauchbare grobe Näherung der l_x liefert (mit vier Schnittpunkten bei ca. $x = 24, 47, 68, 71$ und einem durchschnittlichen Fehler von weniger als 1 %).



Gründen des Kurvenverlaufs im grossen nicht über $x = 85$ hinaus gegangen werden kann, ergibt sich bei $l_0 = 100\ 000$ $b = 0,0019157$ ¹⁾.

Bezeichnen wir die Reihe der Differenzen $\bar{l}_x - l_x = \Delta_x$, so sollte offenbar mit möglichster Genauigkeit erreicht werden: $K(x) \sim \Delta_x$. Nun enthält $K(x)$ drei Konstanten, so dass der Ansatz nahelegt, ein $K(x)$ zu determinieren, das durch drei zweckmässig ausgewählte Δ_x läuft. Eine solche algebraisch einwandfreie Methode trägt aber dem transzendenten Charakter des zu lösenden Gleichungssystems nicht Rechnung und führt in der überwiegenden Zahl der Ansätze zu komplexen Lösungen für \varkappa und λ . Man muss offenbar etwas vorsichtiger zu Werke gehen und zunächst nach einer Methode Umschau halten, die eine geschlossene Lösung eines Systems von drei Gleichungen $\Delta_x = K(x)$ liefert. Man sieht leicht ein, dass das gelingt, wenn man sich auf ein Wertetripel stützt, das auf einem einfachen, dem doppelten und dem dreifachen Alter basiert. Kürzen wir vorübergehend ab: $u = e^{-\varkappa x}$; $v = e^{-\lambda x}$, so lautet unser Gleichungssystem offenbar:

$$\Delta_x = c(u - v); \quad \Delta_{2x} = c(u^2 - v^2); \quad \Delta_{3x} = c(u^3 - v^3)$$

woraus:

$$c = \Delta_x^2 \cdot [4 \cdot \Delta_x \Delta_{3x} - 3 \cdot \Delta_{2x}^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{I})$$

$$u = \frac{c \cdot \Delta_{2x} + \Delta_x^2}{2 \cdot c \cdot \Delta_x}; \quad v = \frac{c \cdot \Delta_{2x} - \Delta_x^2}{2 \cdot c \cdot \Delta_x}$$

$$\varkappa = \frac{1}{x} \cdot [\ln 2 \cdot c \cdot \Delta_x - \ln (c \cdot \Delta_{2x} + \Delta_x^2)] \quad (\text{II})$$

$$\lambda = \frac{1}{x} \cdot [\ln 2 \cdot c \cdot \Delta_x - \ln (c \cdot \Delta_{2x} - \Delta_x^2)] \quad (\text{III})$$

Da nach unserer Wahl von $A(x)$ sämtliche Δ_x in dem in Frage kommenden Intervall positiv sind, erhalten wir aus (I) insbesondere folgende Bedingungs-Ungleichung für die Existenz einer reellen $K(x)$:

$$4 \cdot \Delta_x \Delta_{3x} - 3 \cdot \Delta_{2x}^2 > 0 \quad (\text{IV})$$

¹⁾ Trotz des approximativen Charakters der Rechnungen empfiehlt es sich, mit genügenden Ziffernanzahlen zu operieren, um den funktionalen Fehler mit genügender Schärfe zu erhalten.

Nun entspricht aber die Kurve der Δ_x nur im grossen dem Typus der zweiparametrischen (der Proportionalitätsfaktor c interessiert in diesem Zusammenhange nicht) Schar der $K(x)$, es wäre also wenig erfolgversprechend, einfach nach Wertetripeln $\Delta_x, \Delta_{2x}, \Delta_{3x}$ zu suchen, die der Ungleichung (IV) Genüge leisten und alsdann nach (I), (II) und (III) an die Bestimmung der Konstanten von $K(x)$ zu gehen. Vielmehr empfiehlt es sich, den allerdings etwas mühsamen Weg sukzessiver Approximationen in dem Sinne zu beschreiten, dass durch eine Anzahl versuchsweise angesetzter $K(x)$ die möglichen Positionen der übrigens bemerkenswert eng gebündelten Kurven eingegabelt werden. Da die Kurvenscharen insbesondere bei kleinen x nahe beieinander liegen, ist die Wahl von Δ'_x mit geringer Variationshöhe bald getroffen. Dabei verstehen wir unter Δ'_x jenen korrigierten Wert von Δ_x , der nach dem genannten Verfahren in Frage kommt und der natürlich innerhalb gewisser Grenzen willkürlich festgesetzt werden kann. Wir wählten $x = 25$ und anschliessend:

$$\Delta'_x = \Delta'_{25} = 9500; \quad \Delta'_{2x} = \Delta'_{50} = 7500; \quad \Delta'_{3x} = \Delta'_{75} = 5000$$

wobei $\Delta_{25} = 8854; \quad \Delta_{50} = 7373; \quad \Delta_{75} = 5632$

unter Einsetzung der Δ' in die Formeln (I), (II) und (III) erhielten wir:

$$c = 19\,572; \quad \varkappa = 0.018013; \quad \lambda = 0.075341$$

oder als gesuchte Lambertsche Approximation von SM 1939/44:

$$\gamma_x^{(SM\ 39/40)} = 100\,000 - 0.0019157 \cdot x^4 - 19\,572 (e^{-0.01801x} - e^{-0.07534x})$$

Die vorgenannte Approximation erhebt in keiner Weise den Anspruch, eine optimale Näherung der Überlebenskurve von SM 1939/44 zu sein. Um ein solches Optimum — immer nach dem Lambertschen Ansatz — zu erreichen, müssten praktisch sehr umfangreiche Rechnungen vorgenommen werden; theoretisch dürfte die Aufgabe ohnehin nicht lösbar sein. Der Zweck unserer Skizze ist denn auch nicht in der Aufstellung einer Näherungsfunktion für SM 39/44 zu suchen ¹⁾, sondern im vorab historisch orientierten Versuch eines Nachweises,

¹⁾ Im Hinblick auf den Charakter der Kurve der Δ_x würden wir sonst die Korrekturfunktion heute nicht mehr als eine Summe logistischer, sondern als eine solche trigonometrischer Funktionen ansetzen.

dass das von Lambert in Ansatz gebrachte funktionale Instrument zum Ausgleich von Sterbetafeln grundsätzlich tauglich war.

Unsere Figur zeigt u. a. auch die Kurve der l_x nach SM 1939/44 und von 5 zu 5 Jahren die Werte von \bar{l}_x . Wie bei fast allen Ausgleichsfunktionen hat auch beim Lambertschen Modell das Streben nach möglichst befriedigender Näherung in den versicherungspraktisch wichtigen Altern zur Folge, dass die ersten 1—2 Jahrzehnte mehr oder weniger aus dem Rahmen fallen; in dieser Beziehung lagen die Verhältnisse vor zweihundert Jahren noch eher günstiger (vgl. Fig.). Immerhin befriedigt die Approximation im Intervall von ca. 25 bis gegen 80 Jahren. Die durchschnittliche Abweichung der \bar{l}_x von den l_x im Intervall $25 \leq x \leq 75$, gemittelt aus den durch 5 teilbaren Altern, beträgt ca. 0,4 % von l_0 .

Eine andere brauchbare Probe der Güte der Approximation dürfte die temporäre Lebenserwartung sein. Wir erhalten z. B.:

$$\bar{e}_{30:\overline{30}|} = \frac{1}{\bar{l}_{30}} \cdot \int_{30}^{60} \bar{l}_x dx = \underline{27,74} \text{ nach unserer Funktion}$$

$$\bar{e}_{30:\overline{30}|} = \ddot{e}_{30:\overline{30}|} - \frac{1}{2}(1 - {}_{30}p_{30}) = \underline{27,75} \text{ nach SM 39/44}$$