

# Die Berechnung von Prämienreserven unter Benutzung der Formel von Gompertz-Makeham

Autor(en): **Albers, Gunther**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **48 (1948)**

PDF erstellt am: **21.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966894>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Die Berechnung von Prämienreserven unter Benutzung der Formel von Gompertz-Makeham

Von Gunther Albers, Hamburg

## I.

Die üblichen Verfahren zur Berechnung der Prämienreserve eines Versicherungsbestandes machen die Unterteilung des Bestandes in bestimmte Gruppen erforderlich, und zwar durchweg entweder in Gruppen mit gleichem erreichten Alter oder aber auch mit gleicher restlicher Versicherungsdauer. Es soll nun ein Verfahren gezeigt werden, das jedenfalls für die üblichen Versicherungsformen eine Gruppenbildung überflüssig macht, das also gestattet, die Gesamtreserve nach Summierung gewisser Werte in einem Rechnungsgang zu ermitteln. Es handelt sich hierbei im wesentlichen um die Anwendung eines Prinzips, das schon bei anderen Gelegenheiten mit Erfolg benutzt werden konnte <sup>1)</sup> und das sicher noch weitere Möglichkeiten — wie z. B. die Erfassung von Tilgungshypotheken — in sich birgt.

Voraussetzung ist hierfür, dass die gewünschte Ausscheideordnung dem Gesetz von Gompertz-Makeham folgt. Das bedeutet aber wohl kaum eine Einschränkung, da man durch eine geeignete Wahl der Konstanten die durch Beobachtung gewonnenen Werte in ausreichender Annäherung wiedergeben kann.

## II.

In der Formel für den Barwert der temporären Leibrente

$$a_{x:\overline{n}|} = 1 + v p_x + v^2 {}_2p_x + v^3 {}_3p_x + \dots + v^{n-1} {}_{n-1}p_x$$

ist bekanntlich gemäss der Formel von Gompertz-Makeham für die  $t$ -jährige Erlebenswahrscheinlichkeit  ${}_t p_x$  der Wert  $st g^{c^x(c^t-1)}$  einzusetzen.

<sup>1)</sup> «Ein vereinfachtes Verfahren der Lebensrückversicherung gegen natürliche Prämien» in Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 1947, S. 353, und «Die Erfassung der Beitragsvorauszahlungen für den Jahresabschluss» in Deutsche Versicherung 1944, Nr. 2, S. 68.

Wir erhalten dann

$$a_{x, \bar{n}} = 1 + vs g^{c^x(c-1)} + (vs)^2 g^{c^x(c^2-1)} + (vs)^3 g^{c^x(c^3-1)} + \dots + (vs)^{n-1} g^{c^x(c^{n-1}-1)}.$$

Der Wert  $g^{c^x(c^t-1)}$ , also die Erlebenswahrscheinlichkeit nach der Formel von Gompertz, lässt sich nun auf Grund der allgemeinen Beziehung

$$a^z = 1 + \frac{1}{1!} z \ln a + \frac{1}{2!} (z \ln a)^2 + \frac{1}{3!} (z \ln a)^3 + \dots$$

in folgende Reihe entwickeln:

$$g^{c^x(c^t-1)} = 1 + c^x(c^t-1) \ln g + \frac{1}{2!} [c^x(c^t-1) \ln g]^2 + \dots + \frac{1}{m!} [c^x(c^t-1) \ln g]^m + \dots$$

wobei

$$\frac{1}{m!} [c^x(c^t-1) \ln g]^m = \frac{1}{m!} c^{mx} (\ln g)^m \left[ c^{mt} - \binom{m}{1} c^{(m-1)t} + \binom{m}{2} c^{(m-2)t} - \dots \pm 1 \right]$$

Hieraus ergibt sich nun für den Leibrentenbarwert insgesamt

$$\begin{aligned} \underline{a_{x, \bar{n}}} &= 1 + c^x (vs)^0 (c^0 - 1) \ln g + \frac{1}{2!} c^{2x} (vs)^0 (\ln g)^2 [(c^0)^2 - 2c^0 + 1] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} c^{3x} (vs)^0 (\ln g)^3 [(c^0)^3 - 3(c^0)^2 + 3c^0 - 1] + \dots \\ &+ vs + c^x vs (c - 1) \ln g + \frac{1}{2!} c^{2x} vs (\ln g)^2 [c^2 - 2c + 1] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} c^{3x} vs (\ln g)^3 [c^3 - 3c^2 + 3c - 1] + \dots \\ &+ (vs)^2 + c^x (vs)^2 (c^2 - 1) \ln g + \frac{1}{2!} c^{2x} (vs)^2 (\ln g)^2 [(c^2)^2 - 2c^2 + 1] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} c^{3x} (vs)^2 (\ln g)^3 [(c^2)^3 - 3(c^2)^2 + 3c^2 - 1] + \dots \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ (vs)^{n-1} + c^x (vs)^{n-1} (c^{n-1} - 1) \ln g + \frac{1}{2!} c^{2x} (vs)^{n-1} (\ln g)^2 [(c^{n-1})^2 - 2c^{n-1} + 1] + \\ &\quad + \frac{1}{3!} c^{3x} (vs)^{n-1} (\ln g)^3 [(c^{n-1})^3 - 3(c^{n-1})^2 + 3c^{n-1} - 1] + \dots \end{aligned}$$

und weiter, wenn man die Klammern auflöst und die Glieder mit gleichen Faktoren der Art  $vsc^t$  zusammenfasst,

$$\begin{aligned} \underline{a_{x, \overline{n}|}} &= \sum_{t=0}^{n-1} (vs)^t \left\{ 1 + c^x(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^x(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^x(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &- \sum_{t=0}^{n-1} (vsc)^t [c^x(-\text{lng})] \left\{ 1 + c^x(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^x(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^x(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{t=0}^{n-1} (vsc^2)^t [c^x(-\text{lng})]^2 \left\{ 1 + c^x(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^x(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^x(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &- \dots + \dots \\ &+ (-1)^r \frac{1}{r!} \sum_{t=0}^{n-1} (vsc^r)^t [c^x(-\text{lng})]^r \left\{ 1 + c^x(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^x(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^x(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Prämienreserve ist nun nicht der Barwert der Leibrente für das Eintrittsalter  $x$ , sondern für das erreichte Alter  $(x + m)$  nach Ablauf von  $m$  Versicherungsjahren wichtig. Für diesen Wert erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{a_{x+m, \overline{n-m}|}} &= \frac{1 - (vs)^{n-m}}{1 - vs} \left\{ 1 + c^{x+m}(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &- \frac{1 - (vsc)^{n-m}}{1 - vsc} [c^{x+m}(-\text{lng})] \left\{ 1 + c^{x+m}(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{1 - (vsc^2)^{n-m}}{1 - vsc^2} [c^{x+m}(-\text{lng})]^2 \left\{ 1 + c^{x+m}(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &- \dots + \dots \\ &+ (-1)^r \frac{1}{r!} \frac{1 - (vsc^r)^{n-m}}{1 - vsc^r} [c^{x+m}(-\text{lng})]^r \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + c^{x+m}(-\text{lng}) + \frac{1}{2!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^2 + \frac{1}{3!} [c^{x+m}(-\text{lng})]^3 + \dots \right\} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Jetzt führen wir als neue Grössen das rechnungsmässige Geburtsjahr  $G$ , das Ablaufsjahr der Versicherung  $A$  und das Berechnungsjahr der Prämienreserve  $B$  ein durch die Beziehungen

$$x + m = B - G \quad \text{und} \quad n - m = A - B$$

Wenn wir weiter

$$\frac{1}{1 - vs} = a, \quad -\frac{1}{1 - vsc} = a', \quad +\frac{1}{2!} \frac{1}{1 - vsc^2} = a'',$$

$$(-1)^r \frac{1}{r!} \frac{1}{1 - vsc^r} = a^{(r)}$$

usw. setzen und  $(- \ln g)$  mit  $z$  bezeichnen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{a_{x+m, n-m}} &= a \left\{ 1 + zc^{-G}c^B + \frac{1}{2!} z^2 c^{-2G} c^{2B} + \frac{1}{3!} z^3 c^{-3G} c^{3B} + \dots \right\} \\ &- a(vs)^A \left\{ \left( \frac{1}{vs} \right)^B + zc^{-G} \left( \frac{c}{vs} \right)^B + \frac{1}{2!} z^2 c^{-2G} \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B + \frac{1}{3!} z^3 c^{-3G} \left( \frac{c^3}{vs} \right)^B + \dots \right\} \\ &+ a' \left\{ zc^{-G}c^B + z^2 c^{-2G} c^{2B} + \frac{1}{2!} z^3 c^{-3G} c^{3B} + \frac{1}{3!} z^4 c^{-4G} c^{4B} + \dots \right\} \\ &- a'(vsc)^A \left\{ zc^{-G} \left( \frac{1}{vs} \right)^B + z^2 c^{-2G} \left( \frac{c}{vs} \right)^B + \frac{1}{2!} z^3 c^{-3G} \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B + \frac{1}{3!} z^4 c^{-4G} \left( \frac{c^3}{vs} \right)^B + \dots \right\} \\ &+ a'' \left\{ z^2 c^{-2G} c^{2B} + z^3 c^{-3G} c^{3B} + \frac{1}{2!} z^4 c^{-4G} c^{4B} + \frac{1}{3!} z^5 c^{-5G} c^{5B} + \dots \right\} \\ &- a''(vsc^2)^A \left\{ z^2 c^{-2G} \left( \frac{1}{vs} \right)^B + z^3 c^{-3G} \left( \frac{c}{vs} \right)^B + \frac{1}{2!} z^4 c^{-4G} \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B + \frac{1}{3!} z^5 c^{-5G} \left( \frac{c^3}{vs} \right)^B + \dots \right\} \\ &+ \dots - \dots \\ &+ a^{(r)} \left\{ z^r c^{-rG} c^{rB} + z^{r+1} c^{-(r+1)G} c^{(r+1)B} + \frac{1}{2!} z^{r+2} c^{-(r+2)G} c^{(r+2)B} + \dots \right\} \\ &- a^{(r)}(vsc^r)^A \left\{ z^r c^{-rG} \left( \frac{1}{vs} \right)^B + z^{r+1} c^{-(r+1)G} \left( \frac{c}{vs} \right)^B + \frac{1}{2!} z^{r+2} c^{-(r+2)G} \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B + \dots \right\} \\ &+ \dots - \dots \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 \underline{a_{x+m, n-m}} &= a + c^B c^{-G} [a + a'] z + c^{2B} c^{-2G} \left[ \frac{1}{2!} a + a' + a'' \right] z^2 + \\
 &+ c^{3B} c^{-3G} \left[ \frac{1}{3!} a + \frac{1}{2!} a' + a'' + a''' \right] z^3 + \dots + c^{rB} c^{-rG} \left[ \frac{1}{r!} a + \frac{1}{(r-1)!} a' + \dots + a^{(r)} \right] z^r + \dots \\
 &- \left( \frac{1}{vs} \right)^B [(vs)^A (a + a' z c^{A-G} + a'' z^2 c^{2(A-G)} + a''' z^3 c^{3(A-G)} + \dots)] \\
 &- \left( \frac{c}{vs} \right)^B [z (vs)^A (a + a' z c^{A-G} + a'' z^2 c^{2(A-G)} + a''' z^3 c^{3(A-G)} + \dots)] c^{-G} \\
 &- \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B \left[ \frac{1}{2!} z^2 (vs)^A (a + a' z c^{A-G} + a'' z^2 c^{2(A-G)} + a''' z^3 c^{3(A-G)} + \dots) \right] c^{-2G} \\
 &- \dots
 \end{aligned}$$

Nachdem wir noch

$$\begin{aligned}
 [a + a'] z = f_1, \quad \left[ \frac{1}{2!} a + a' + a'' \right] z^2 = f_2, \quad \left[ \frac{1}{3!} a + \frac{1}{2!} a' + a'' + a''' \right] z^3 = f_3 \\
 \left[ \frac{1}{r!} a + \frac{1}{(r-1)!} a' + \dots + a^{(r)} \right] z^r = f_r
 \end{aligned}$$

sowie

$$(vs)^A (a + a' z c^{A-G} + a'' z^2 c^{2(A-G)} + a''' z^3 c^{3(A-G)} + \dots + a^{(r)} z^r c^{r(A-G)} + \dots) = F_{G, \bar{A}}$$

und

$$z = k_1, \quad \frac{1}{2!} z^2 = k_2, \quad \frac{1}{3!} z^3 = k_3, \quad \frac{1}{r!} z^r = k_r$$

eingeführt haben, erhalten wir endlich

$$\begin{aligned}
 \underline{a_{x+m, n-m}} &= a + c^B f_1 c^{-G} + c^{2B} f_2 c^{-2G} + \dots + c^{rB} f_r c^{-rG} + \dots \\
 &- \left( \frac{1}{vs} \right)^B F_{G, \bar{A}} - \left( \frac{c}{vs} \right)^B k_1 F_{G, \bar{A}} c^{-G} - \left( \frac{c^2}{vs} \right)^B k_2 F_{G, \bar{A}} c^{-2G} - \dots - \left( \frac{c^r}{vs} \right)^B k_r F_{G, \bar{A}} c^{-rG}
 \end{aligned}$$

Da die Zahlen  $A$ ,  $B$  und  $G$  für das praktische Rechnen zu gross sind, bleibt noch übrig, alle Werte auf ein festzusetzendes Jahr  $N$  (Normjahr) zu beziehen.

$$\begin{aligned} \underline{a_{x+m, \overline{n-m}|}} &= a + c^{B-N} f_1 c^{N-G} + c^{2(B-N)} f_2 c^{2(N-G)} + \dots + c^{r(B-N)} f_r c^{r(N-G)} + \dots \\ - \left( \frac{1}{vs} \right)^{B-N} F_{G, \overline{A}|} - \left( \frac{c}{vs} \right)^{B-N} k_1 F_{G, \overline{A}|} c^{N-G} - \left( \frac{c^2}{vs} \right)^{B-N} k_2 F_{G, \overline{A}|} c^{2(N-G)} - \dots - \left( \frac{c^r}{vs} \right)^{B-N} k_r F_{G, \overline{A}|} c^{r(N-G)} - \dots \end{aligned}$$

wobei jetzt

$$F_{G, \overline{A}|} = (vs)^{A-N} (a + a' z c^{A-G} + a'' z^2 c^{2(A-G)} + \dots + a^{(r)} z^r c^{r(A-G)} + \dots)$$

Hiermit haben wir den Barwert der Leibrente in eine Form gebracht, in der die während der Versicherungsdauer variablen Faktoren nur vom Berechnungsjahr  $B$  abhängen.

### III.

Wir sind also in der Lage, alle Werte zusammengefasst zu berechnen, die sich durch das Produkt einer Leibrente mit einer konstant bleibenden Grösse darstellen lassen. Dies trifft insbesondere für das riskierte Kapital zu, dessen Berechnung ja praktisch gleichbedeutend der der Prämienreserve ist. Für die Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall sowie für die Todesfallversicherung ist das gezillmerte riskierte Kapital bekanntlich

$${}_m R_{x, \overline{n}|} = \frac{1 + \alpha}{a_{x, \overline{n}|}} a_{x+m, \overline{n-m}|} \quad \text{bzw.} \quad {}_m R_x = \frac{1 + \alpha}{a_x} a_{x+m}$$

Für die Todesfallversicherung mit abgekürzter Beitragszahlungsdauer ergibt sich entsprechend

$${}_m R_{x, \overline{n}|} = d a_{x+m} + P_{x, \overline{n}|} a_{x+m, \overline{n-m}|}$$

wobei

$$P_{x, \overline{n}|} = (1 + \alpha - d a_x) : a_{x, \overline{n}|}$$

während wir für die Versicherung mit festem Auszahlungstag

$${}_m R_{x, \overline{n}|} = P_{x, \overline{n}|} a_{x+m, \overline{n-m}|}$$

mit

$$P_{x, \overline{n}|} = (v^n + \alpha) : a_{x, \overline{n}|}$$

erhalten. Bei der Versicherung mit festem Auszahlungstag ist allerdings für die Berechnung der Prämienreserve ausserdem noch der diskontierte Wert der Versicherungssumme erforderlich, dessen genaue Berechnung sich leider mit der des riskierten Kapitals nicht vereinigen lässt, da dieses eigentlich nach der Formel von Gompertz und mit dem Diskontierungsfaktor  $vs$  ermittelt wird, während die Versicherungssumme mit dem Faktor  $v$  diskontiert werden muss.

Bei Versicherungen gegen Einmalbeitrag ist das riskierte Kapital

$${}_m R_{x,n} = d a_{x+m, \overline{n-m}|} \quad \text{bzw.} \quad {}_m R_x = d a_{x+m}$$

#### IV.

Theoretisch wäre die gestellte Aufgabe hiermit gelöst, aber lässt sich das Verfahren auch praktisch anwenden? Es ist jedenfalls unmöglich, für jede Versicherung eine grosse Zahl von Hilfszahlen festzuhalten und diese über den ganzen Bestand zu summieren. Da die Reihen jedoch jedenfalls in den hauptsächlich für die Versicherung in Betracht kommenden Altern so schnell abnehmen, dass man die Entwicklung ohne einen beträchtlichen Fehler nach den Gliedern mit den Faktoren  $f_1$  bzw.  $k_1$  abbrechen kann, würde es aber ausreichend sein, wenn man für jede Versicherung 4 Hilfszahlen ermitteln würde. Zudem lassen sich die folgenden Glieder aus diesen Werten zumindest näherungsweise errechnen. Für eine Versicherung auf den Todes- und Erlebensfall hätte man dann z. B. folgende Hilfszahlen festzuhalten:

$$\begin{aligned} H_1 &= (1 + \alpha) : a_{x, \overline{n}|}, & H_2 &= H_1 c^{N-G}, \\ H_3 &= H_1 F_{G, A}, & H_4 &= H_3 c^{N-G} \end{aligned}$$

Wie leicht einzusehen ist, erübrigt der Wert  $H_1$  das besondere Berechnen der Nettoprämie. Das riskierte Kapital für den gesamten Bestand wäre hieraus zunächst

$$\Sigma_m R \sim a \Sigma H_1 + f_1 c^{B-N} \Sigma H_2 - \left( \frac{1}{vs} \right)^{B-N} \Sigma H_3 - \left( \frac{c}{vs} \right)^{B-N} k_1 \Sigma H_4$$

Bei einer probeweisen Ermittlung für einen grösseren Versicherungsbestand ergab sich, dass mit diesen Hilfszahlen etwa 98,3 % des riskierten Kapitals bestimmt werden konnten. Es liegt nun nahe, die weiteren Glieder näherungsweise zu berechnen als

$$\frac{(\Sigma H_2)^2}{\Sigma H_1} f_2 c^{2(B-N)}, \quad \frac{(\Sigma H_2)^3}{(\Sigma H_1)^2} f_3 c^{3(B-N)} \quad \text{usw.}$$



jedoch müssen diese Zahlen nach den bekannten Sätzen über Mittelwerte zu klein sein, und die ausgeführte Rechnung ergab, dass sie insgesamt nur etwas über 40 % der wahren Werte betragen. Man hätte immerhin noch mit einem Fehler in Höhe von 1 % zu rechnen. Es scheint also angebracht zu sein, einmalig oder doch nur in grösseren Zeitabständen den Versicherungsbestand getrennt nach Geburtsjahren zusammenzufassen und dann die Glieder mit den Faktoren  $f_2, f_3 \dots, k_2, k_3 \dots$  genau zu bestimmen. Hieraus ergeben sich dann Faktoren zur Korrektur der Näherungswerte, die solange Gültigkeit haben dürften, wie die Streuung des Bestandes bezüglich der Alter sich nicht wesentlich ändert. Bezeichnet man diese Faktoren mit  $K_2, K_3 \dots, K'_2, K'_3 \dots$ , so erhält man endgültig

$$\begin{aligned} \Sigma_m R = & a \Sigma H_1 + f_1 c^{B-N} \Sigma H_2 + f_2 K_2 c^{2(B-N)} (\Sigma H_2)^2 : (\Sigma H_1) + f_3 K_3 c^{3(B-N)} (\Sigma H_2)^3 : (\Sigma H_1)^2 + \dots \\ & - \left(\frac{1}{vs}\right)^{B-N} \Sigma H_3 - k_1 \left(\frac{c}{vs}\right)^{B-N} \Sigma H_4 - k_2 K'_2 \left(\frac{c^2}{vs}\right)^{B-N} (\Sigma H_4)^2 : (\Sigma H_3) - k_3 K'_3 \left(\frac{c^3}{vs}\right)^{B-N} (\Sigma H_4)^3 : (\Sigma H_3)^2 - \dots \end{aligned}$$

Bei der probeweisen Berechnung ergab sich z. B. für das Glied mit der Konstanten  $f_1$  ein mittleres Alter von 50,16 Jahren, für das nächste Glied (mit  $f_2$ ) von 54,03 Jahren, worauf weiter 58,72 Jahre folgten. Es ergab sich also hierbei

$$K_2 = c^{2(54,03-50,16)} = c^{7,74}, \quad K_3 = c^{3(58,72-50,16)} = c^{25,68}$$

Es darf in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen werden, dass bei Anwendung des Hollerith-Verfahrens die Lochung der Hilfszahlen für den Versicherungsbestand durchweg mechanisch mit Hilfe des Rechenlochers durchgeführt werden kann.

Versicherungen verbundener Leben müssen gesondert in derselben Weise erfasst werden. Der Diskontierungsfaktor  $vs$  ist hier durch  $vs^2$  zu ersetzen, und ausserdem ist auf Grund der Formel von Gompertz das Ersatzalter zu bestimmen.

Die Risikoprämie des Jahres wäre zu ermitteln nach der Rekursionsformel

$$\Sigma R P = \Sigma q_{x+m} (1 - {}_{m+1}V_x) = (\Sigma {}_m V_x + \Sigma P)(1 + i) - \Sigma {}_{m+1} V_x$$

Bei Benutzung kontinuierlicher Werte würden für die Grössen  $a^{(r)}$  die Formeln gelten

$$\begin{aligned} a &= -1 : \ln vs, & a' &= 1 : \ln vsc, \\ a'' &= -1 : (2! \ln vsc^2), & a^{(r)} &= (-1)^{r+1} : (r! \ln vsc^r). \end{aligned}$$