Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Eine Bemerkung zu einer Arbeit von H. Hadwiger

Autor: Rohrbach, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966891

Eine Bemerkung zu einer Arbeit von H. Hadwiger

Von *Hans Rohrbach* in Mainz

Herr H. Hadwiger hat hier Formeln für die Anzahl A_n^ν der Permutationen von n Elementen abgeleitet [1]), die ν konsekutive Paare der Elemente enthalten. Seine Formeln lauten insbesondere:

$$A_n^\nu = \binom{n-1}{\nu} A_{n-\nu}^0 \tag{1}$$

und

$$A_n^0 = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + (n+1)(n-1)! \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!}. \tag{2}$$

Zum Beweise von (2) zieht Herr Hadwiger eine Rekursionsformel für A_n^0 sowie eine erzeugende Funktion von A_n^0 heran, die als Lösung einer elementaren Differentialgleichung bestimmt wird.

In einer gemeinsam von Herrn P. Armsen und mir veröffentlichten Arbeit [2]) haben wir die gleiche Aufgabe behandelt, wobei wir statt (2) die Formel

$$A_n^0 = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \binom{n-1}{\lambda} (n-\lambda)! \quad (n \geqq 2), \; A_1^0 = 1, \tag{3}$$

erhalten haben. Da mir Formel (3) für die praktische Berechnung von A_n^0 etwas einfacher zu sein scheint als (2), sei es gestattet, unseren Beweis für (3), der nur kombinatorische Hilfsmittel benutzt, hier mitzuteilen.

---

[1]) *H. Hadwiger*, «Eine Bemerkung über zufällige Anordnungen der natürlichen Zahlen», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker *46* (1946), 105—109.

[2]) *P. Armsen* und *H. Rohrbach*, «Sequenzen in Permutationen» (Auszug), Bericht über die Mathematikertagung in Tübingen 1946, S. 36/37.

Teilt man die Permutationen von $n+1$ Elementen in Klassen ein nach der Anzahl der in ihnen vorhandenen konsekutiven Paare, so folgt

$$(n+1)! = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n+1}^{\nu}$$

und hieraus nach (1)

$$(n+1)! = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} A_{n+1-\nu}^{0} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A_{i+1}^{0}. \tag{4}$$

Die Formel (3), die für $n=2$ richtig ist — dann haben beide Seiten den Wert 1 —, nehme man als bereits erwiesen an. Aus (4) folgt, indem man rechts den Summanden für $i=n$ abspaltet und (3) benutzt,

$$A_{n+1}^{0} = (n+1)! - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j} \binom{i}{j} (i+1-j)!. \tag{5}$$

Denkt man sich (3) für $n+1$ statt n geschrieben, so zeigt ein Vergleich mit (5), dass es für den Beweis von (3) durch den Schluss von n auf $n+1$ genügt, folgende Beziehung nachzuweisen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{j} \binom{i}{j} (i+1-j)! = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n+1-i)!. \tag{6}$$

Man bezeichne zur Abkürzung die linke Seite von (6) mit $L(n)$, die rechte mit $R(n)$ und setze $i=r-1$, $j=r-s$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} L(n) &= \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r-1} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r-1}{s-1} s! \\ &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} s! \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \binom{r-1}{s-1} \binom{n}{r-1}. \end{aligned}$$

Denn hier verschwinden für $r<s$ die Summanden der inneren Summe der ersten Reihe, so dass man die Summation über s beliebig weit (etwa bis n) erstrecken und dann die Reihenfolge der Summationen vertauschen kann. Ferner folgt für $n+1-i=s$

$$R(n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n-s} \binom{n}{s-1} s!,$$

also

$$R(n) - L(n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} s! \sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r+1} \binom{r-1}{s-1} \binom{n}{r-1}.$$

Bezeichnet man hier die innere Summe mit $M(s)$, so ist nur noch zu zeigen, dass $M(s)$ für $s = 1, 2, \ldots, n$ verschwindet. Dazu setze man $s-1 = i$ und $r-1 = j$ in $M(s)$. Dann folgt

$$M(s) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{j}{i}\binom{n}{j} = \frac{1}{i!}\sum_{j=i}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} j(j-1)\ldots(j-i+1) = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i(1-x)^n}{dx^i}\right]_{x=1} = 0.$$

Dies gilt für $i = 0, 1, \ldots, n-1$, also für $s = 1, 2, \ldots, n$. Damit ist (3) induktiv bewiesen.

Zum Schluss sei noch die Umrechnung von (2) und (3) ineinander mitgeteilt. Aus (3) folgt

$$\begin{aligned}
A_n^0 &= \sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda \frac{1}{\lambda!}\,[(n-1)!\,(n-\lambda)] \\
&= n!\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!} + (n-1)!\sum_{\mu=0}^{n-2}(-1)^\mu\frac{1}{\mu!} \\
&= n!\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!} + (n-1)!\left[\sum_{\mu=0}^{n-1}(-1)^\mu\frac{1}{\mu!} - (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right] \\
&= (n+1)\,(n-1)!\sum_{\lambda=0}^{n-1}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!} + (-1)^n \\
&= (n+1)\,(n-1)!\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!} + (-1)^n\left[1-(n+1)\frac{1}{n}\right] \\
&= (n+1)\,(n-1)!\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\frac{1}{\lambda!} + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$