Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Über die Summationsformel von Euler

Autor: Kreis, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966890

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Summationsformel von Euler

Von *H. Kreis*, Winterthur

Die *Euler*sche Summationsformel stellt bekanntlich eine Beziehung zwischen dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ und der Summe $\sum f(a+\nu h)\,h$; $\nu = 0,1, \ldots n-1$; $nh = b-a$ her. Da die meisten Ableitungen dieser für die Versicherungsmathematik wichtigen Formel von der Differenzenrechnung ausgehen, soll, im Gegensatz dazu, in der vorliegenden Abhandlung eine einfache, zugänglichere Methode zur Anwendung kommen.

In dem Ausdruck

$$S = f(a)\,h + f(a+h)\,h + \ldots + f(a+(n-1)\,h)\,h \qquad (1)$$

entwickeln wir die Funktionen nach Potenzen von h und erhalten eine Summe, der die Form gegeben werden kann

$$S = \varphi_1(n)\,f(a)\,h + \varphi_2(n)\,f'(a)\,h^2 + \varphi_3(n)\,f''(a)\,h^3 + \ldots, \qquad (2)$$

in welcher die Koeffizienten

$$\varphi_1(n) = n$$

$$\varphi_2(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

allgemein

$$\varphi_k(n) = \frac{1^{k-1} + 2^{k-1} + \ldots + (n-1)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (3)$$

mit den *Jakob Bernoulli*schen Funktionen identisch sind. Da die $\varphi_k(n)$ reine Zahlenkoeffizienten, die nur von n, aber weder von der Funktion

$f(x)$ noch von a oder h abhängig sind, lassen sie sich ermitteln, indem wir für $f(x)$ und a eine willkürliche aber zweckmässige Wahl, etwa $f_1(x) = e^x$ und $a = 0$, treffen, so dass

$$f_1(0 + \nu h) = e^{\nu h}, \quad f_1^{(k)}(0 + \nu h) = e^{\nu h}$$

und

$$S_1 = 1 + e^h + e^{2h} + \ldots + e^{(n-1)h} = \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} \tag{4}$$

wird. Formel (2) geht dann über in

$$h \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1} = \varphi_1(n)\, h + \varphi_2(n)\, h^2 + \varphi_3(n)\, h^3 + \ldots \tag{5}$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleicher Potenzen von h können die Bernoullischen Funktionen bestimmt werden. Während aber definitionsgemäss n eine ganze, natürliche Zahl war, kann jetzt n in Gleichung (5) als stetiger, variabler Parameter aufgefasst werden.

Wenn insbesondere $n = 0$ gesetzt wird, so folgt

$$\varphi_k(0) = 0, \quad \text{für jedes } k. \tag{6}$$

Differenziert man ferner nach n, so folgt aus (5):

$$h \frac{h e^{nh}}{e^h - 1} = \varphi_1'(n)\, h + \varphi_2'(n)\, h^2 + \varphi_3'(n)\, h^3 + \ldots \tag{7}$$

und, falls e^{nh} aus (5) und (7) eliminiert wird, ergibt sich

$$\frac{h}{e^h - 1} = \varphi_1'(n) + (\varphi_2'(n) - \varphi_1(n))\, h + (\varphi_3'(n) - \varphi_2(n))\, h^2 + \ldots \tag{8}$$

Mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{h}{e^h - 1} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots \tag{9}$$

lassen sich aus Gleichung (8) und (9) folgende Grundgleichungen bilden:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(n) &= A_0, \\
\varphi_2'(n) &= \varphi_1(n) + A_1, \\
\varphi_3'(n) &= \varphi_2(n) + A_2, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k'(n) &= \varphi_{k-1}(n) + A_{k-1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Integriert man die einzelnen Beziehungen (10) zwischen 0 und n, so findet man, unter Berücksichtigung von Gleichung (6) $\varphi_k(0) = 0$, der Reihe nach:

$$\varphi_1(n) = \int_0^n A_0 \, dv = A_0 n,$$

$$\varphi_2(n) = \int_0^n (\varphi_1(v) + A_1) \, dv = A_0 \frac{n^2}{2} + A_1 n,$$

$$\varphi_3(n) = \int_0^n (\varphi_2(v) + A_2) \, dv = A_0 \frac{n^3}{3!} + A_1 \frac{n^2}{2} + A_2 n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_k(n) = \int_0^n (\varphi_{k-1}(v) + A_{k-1}) \, dv = A_0 \frac{n^k}{k!} + A_1 \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + A_{k-1} n.$$

Hieraus gelangt man zu folgenden Integraldarstellungen für die Koeffizienten $\varphi_k(n)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(n) &= \int_0^n A_0 \, dv, \\
\varphi_2(n) &= \int_0^n (A_0 v + A_1) \, dv, \\
\varphi_3(n) &= \int_0^n \left(A_0 \frac{v^2}{2} + A_1 v + A_2 \right) dv, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_k(n) &= \int_0^n \left(A_0 \frac{v^{k-1}}{(k-1)!} + A_1 \frac{v^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + A_{k-1} \right) dv.
\end{aligned} \tag{11}$$

Nach Einsetzung dieser Ausdrücke für $\varphi_k(n)$ in (2) und Ordnen der Reihe nach den Koeffizienten $A_0, A_1, A_2 \ldots$, erscheint S als Summe von Integralen in folgender Gestalt

$$S = A_0 \int_0^n \left(f(a) + vhf'(a) + \frac{v^2h^2}{2} f''(a) + \ldots \right) dv$$

$$+ A_1 h \int_0^n \left(f'(a) + vhf''(a) + \frac{v^2h^2}{2} f'''(a) + \ldots \right) dv$$

$$+ A_2 h^2 \int_0^n \left(f''(a) + vhf'''(a) + \frac{v^2h^2}{2} f^{(4)}(a) + \ldots \right) dv$$

$$+ \ldots\ldots$$

oder kürzer

$$S = A_0 \int_0^n f(a + vh)\, h dv + A_1 h \int_0^n f'(a+vh)\, h dv + A_2 h^2 \int_0^n f''(a + vh)\, h dv + \ldots$$

Durch Einführung der neuen Integrationsvariablen $x = a + vh$ findet man

$$S = A_0 \int_a^b f(x)\, dx + A_1 h \int_a^b f'(x)\, dx + A_2 h^2 \int_a^b f''(x)\, dx + \ldots$$

oder

$$S = A_0 \int_a^b f(x)\, dx + A_2 h\,(f(b) - f(a)) + A_4 h^2 (f'(b) - f'(a)) + \ldots \quad (12)$$

Zur Berechnung der auftretenden Koeffizienten A_k dient Gleichung (9), so dass z. B.

$$A_0 = 1; \quad A_1 = -\frac{1}{2}; \quad A_2 = -\frac{1}{12}; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = -\frac{1}{720}$$

ist. Dass sämtliche Koeffizienten von der Form A_{3+2m} verschwinden, erkennt man unmittelbar aus (9), denn

$$\frac{h}{e^h - 1} - 1 + \frac{h}{2} = A_2 h^2 + A_3 h^3 + A_4 h^4 + \ldots, \quad (13)$$

da aber

$$\frac{h}{e^h - 1} + \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{e^{\frac{h}{2}} + e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}}$$

eine gerade Funktion von h ist, so gilt das auch von der linken Seite von (13), so dass rechts die ungeraden Potenzen von h wegfallen müssen, also $A_{3+2m} = 0$ für $m = 0; 1; 2; \ldots$

Schliesslich lautet die Eulersche Summationsformel in der üblichen Form

$$f(a)h + f(a+h)h + \ldots + f(a+(n-1)h)h =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}(f(b) - f(a)) + \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) + \ldots$$

wo $b = a + nh$ zu setzen ist.

Für ganze rationale Funktionen $f(x)$ ist die aufgestellte Formel ohne weitere Bedingungen anwendbar; für beliebige Funktionen hingegen muss das Restglied der Reihe untersucht werden, worauf ich nicht eintreten und auf die Arbeiten von *Franel* [2], *Seliwanoff* [4] und die *Enzyklopädie* [1] hinweisen möchte.

Begnügt man sich mit dem linearen und quadratischen Glied von h, so hat man beispielsweise, unter Benützung der üblichen Bezeichnungen, für die Funktion $f(x) = l_x v^x \equiv D_x$ und $a = 40$; $b = 60$; $h = \frac{1}{4}$, also $n = 80$:

$$f'(x) = l'_x v^x + l_x v^x \ln v = -D_x \mu_x - D_x \delta,$$

$$\frac{1}{4}D_{40} + \frac{1}{4}D_{40\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}D_{40\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{4}D_{59\frac{3}{4}} =$$

$$= \bar{N}_{40} - \bar{N}_{60} - \frac{1}{8}(D_{60} - D_{40}) + \frac{1}{192}(D_{40}\mu_{40} + D_{40}\delta - D_{60}\mu_{60} - D_{60}\delta)$$

oder

$$\mathsf{a}^{(4)}_{40:20|} = \bar{\mathsf{a}}_{40:20|} + \frac{1}{8} + \frac{1}{192}(\mu_{40} + \delta) - \frac{D_{60}}{D_{40}}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{192}(\mu_{60} + \delta)\right).$$

Literaturverzeichnis

[1] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, erster Band, zweiter Teil, den Artikel: Differenzenrechnung von *D. Seliwanoff.*

[2] *J. Franel:* Sur la formule sommatoire d'Euler. (Math. Annalen, 47. Band.)

[3] *A. Henry:* Le calcul des différences finies et ses applications. (Traduit de l'anglais par A. Sallin; Paris 1932.)

[4] *D. Seliwanoff:* Lehrbuch der Differenzenrechnung. (Teubner, Leipzig 1904.)

[5] *Text-Book.* (Traduit de l'anglais par Amédée Bégault, Bruxelles 1894.)