Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Neue technische Mittel zur Behandlung mathematischer Probleme

Autor: Lattmann, Max

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966889

B. Wissenschaftliche Mitteilungen

Neue technische Mittel zur Behandlung mathematischer Probleme

Vortrag gehalten an der Jahresversammlung des Vereins schweizerischer Versicherungsmathematiker am 6. November 1947 in Luzern

Von *Max Lattmann*, Zürich

Die Verwendung mechanisch arbeitender Rechenmaschinen zur Vereinfachung von arithmetischen Berechnungen ist nicht eine Entwicklung allerneuesten Datums. Bereits im Jahre 1642 wurde durch Blaise Pascal die erste Addiermaschine konstruiert und gebaut. Diese zeigte erstmals rotierende Wellen, die den einzelnen Stellen einer Zahl zugeordnet waren. Die Welle einer Stelle höherer Ordnung wurde dabei um eine Zahl weitergeschaltet, wenn diejenige nächst niedriger Ordnung vom Wert 9 zum Wert 0 überging. Dieses Prinzip lebt heute noch weiter in den meisten mechanisch arbeitenden Rechenmaschinen unserer Zeit, in den bekannten Addier- und Saldiermaschinen, den Holerithmaschinen und ähnlichen Hilfsmitteln im modernen Bürobetrieb.

Das gleiche Grundprinzip findet wiederum Anwendung bei den neuesten grossen Rechenmaschinen, wie sie zur Zeit in Amerika, England und Frankreich in Entwicklung begriffen sind resp. bereits in Betrieb genommen wurden. Als Beispiele seien zwei amerikanische Maschinen angeführt, diejenige der Harvard Universität (Cambridge, Mass.), genannt «automatic sequence controlled calculator», und diejenige der Universität von Pennsylvania, die ENIAC, was eine Abkürzung ist für Electronic numerical Integrator and Computer.

Ausser diesen numerischen, d. h. mit Ziffern und Stellen rechnenden Maschinen kennen wir noch eine andere Kategorie von Rechengeräten, bei welchen der Funktionswert nicht in Zahlenwerten dargestellt wird, sondern als einheitliche Grösse bei mechanisch arbeitenden Geräten beispielsweise als Drehwinkel einer Welle, bei elektrisch arbeitenden in Form einer elektrischen Spannung oder eines Stromes erscheint. Auch dieses Prinzip hat in modernen Rechenmaschinen Anwendung gefunden, das grösste Gerät dieser Art dürfte wohl der Differentialanalysator am Mass. Institut of Technology in Cambridge in den Vereinigten Staaten sein.

Das gleiche Prinzip liegt verschiedenen militärischen Geräten, hauptsächlich im Gebiete der Fliegerabwehrartillerie, zugrunde, weil Geräte dieser Art eine sehr gedrängte Bauweise erfordern, was bei numerisch rechnenden Maschinen nicht möglich ist. Auch in unserem Lande wurden derartige Rechengeräte, die teils auf mechanischer, teils auf elektrischer Grundlage arbeiten, entwickelt und gebaut, auf die ich später noch zurückkommen werde.

I.

Am Beispiel der beiden erwähnten amerikanischen Rechenmaschinen möchte ich zunächst auf die numerisch rechnenden Geräte näher eintreten. Eine solche Maschine besteht im wesentlichen aus Zählwerken, und die mathematischen Operationen, welche damit bewältigt werden können, sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Die Addition wird ausgeführt durch entsprechende Weiterschaltung des Zählwerkes. Die Subtraktion kann bei jeder addierenden Maschine beispielsweise so erreicht werden, dass die Ergänzungszahl zur höchsten Ziffer der Maschine bestimmt wird, die dann ihrerseits zur gegebenen Grösse addiert werden kann. Die Multiplikation kann als stellenweise vielfache Addition aufgefasst werden, und die Division beruht auf einer Folge von Multiplikationen und Subtraktionen.

Falls nun einige dieser Operationen unter Verwendung eines Resultates, welches früher berechnet worden ist, durchgeführt werden sollen, so ist ein sogenanntes Register notwendig, welches einen Zahlenwert zu speichern und nach Bedarf wieder abzuliefern imstande ist. Sowie es sich um die Lösung komplizierterer mathematischer Probleme handelt, etwa die Berechnung von Funktionen, die Lösung von Differentialgleichungen und ähnlichen Aufgaben, so ist die einfache Rechenmaschine nur noch imstande, Einzelrechnungen zu bewältigen, die Bestimmung der Reihenfolge und Art der Rechnung bleibt jedoch Aufgabe des Menschen. Der wesentliche Sprung von den bekannten einfachen mechanischen Rechenmaschinen zu den grossen amerikanischen Geräten besteht darin, dass es die neuen Maschinen ermöglichen, eine bestimmte Folge von algebraischen Grundoperationen automatisch durchzuführen. Jedes mathematische Problem wird bei diesen Maschinen auf eine Reihe von Additionen, Multiplikationen usw. zurückgeführt. Am Beispiel einer sehr einfachen Differentialgleichung soll diese Zerlegung in die Grundoperationen kurz erläutert werden. Es sei die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y$$

gesucht. Eine numerisch arbeitende Rechenmaschine ist nicht imstande, die Lösung

$$y = k \cdot e^x$$

in geschlossener Form oder als kontinuierliche Kurve zu liefern. Die Maschine berechnet die Funktion schrittweise, indem sie von der Differenzengleichung

$$\Delta y = y \cdot \Delta x$$

ausgeht. Wenn wir die Anfangswerte x_0 und y_0 als gegeben betrachten, so wird die Maschine nach entsprechender Vorbereitung die folgenden Rechnungen automatisch hintereinander ausführen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ \Delta y_0 &= y_0 \cdot \Delta x \\ y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ x_2 &= x_1 + \Delta x \\ \Delta y_1 &= y_1 \cdot \Delta x \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 \end{aligned}$$

usw.

Hierbei bedeuten Δx der Schritt von einem Rechenpunkt zum andern im Argument und Δy der entsprechende Schritt im Funktionswert.

Es ist leicht einzusehen, dass für diese fortlaufende Berechnung der Funktion y drei Zählwerke oder Register notwendig sind, mit welchen zeitlich hintereinander je eine Addition, eine Multiplikation und wieder eine Addition durchgeführt werden. Die genaue Berechnung einer Gleichung oder Funktion nach diesem schrittweisen numerischen Verfahren erfordert naturgemäss eine hohe Zahl der einfachen Grundoperationen. Damit ein Problem in relativ kurzer Zeit gelöst werden kann, ist es notwendig, dass jede Einzeloperation sehr rasch vor sich geht. Eine automatische Rechenmaschine soll natürlich für die verschiedensten Probleme verwendbar sein, daher müssen die verschiedenen Zählwerke und Register in mannigfaltiger Weise nach einem durch das zu lösende Problem vorgegebenen zeitlichen Programm zusammengekuppelt werden können. Diese letzte Forderung ist mit rein mechanischen Mitteln kaum lösbar. Bei den modernen Rechenmaschinen stehen daher die Resultate der Zählwerke und die Angaben über das Rechenprogramm in Form von elektrischen Signalen zur Verfügung, so dass die Verbindung der Zählwerke untereinander eine rein elektrische sein kann.

In bezug auf die «Elektrifizierung» sind die Erbauer der beiden grossen amerikanischen numerischen Rechenmaschinen verschieden weit gegangen.

Die Rechenmaschine der Harvarduniversität in Cambridge ist noch relativ konservativ, da sie als Zählwerke mechanisch angetriebene Kontaktvorrichtungen besitzt, die im Prinzip einem Telephonwähler nicht unähnlich sind. Die Zählwerke werden über Kupplungen kurzzeitig angetrieben, wodurch entsprechend der Länge dieser Kupplungsimpulse die einzelnen Stellen der Zählwerke weitergeschaltet werden.

Einen Gesamteindruck der riesigen Rechenmaschine vermittelt Fig. 1. In diesem Bild, das die Frontwand des Gerätes darstellt, ist links ein Abteil sichtbar, in dem 60 Register für je 23stellige Zahlen untergebracht sind. Es folgen 72 Zählwerke ebenfalls für 23stellige Zahlen, welche für Addition und Subtraktionen sowie als Register verwendet werden können. Anschliessend folgt eine Abteilung mit speziellen zur Multiplikation und Division vorgesehenen Einheiten, welche ebenfalls 23stellige Zahlen zu verarbeiten imstande sind. Weiter links, auf diesem Bilde kaum sichtbar, sind Aggregate untergebracht, welche gegebene Funktionen in den Rechenprozess einzuführen gestatten. Diese Funktionen, beispielsweise Sinusfunktionen, e-Funktionen oder Logarithmen, sind als Lochstreifen auf Papierbänder gelocht.

Die daran anschliessende Abteilung stellt das eigentliche Herz der Maschine dar, indem sie entsprechend dem vorgegebenen mathematischen Problem die zeitliche Folge der verschiedenen Operationen der Maschine steuert, wobei auch hier wiederum ein gelochtes Papierband als Programmgeber verwendet wird. In Fig. 2 ist dieses Steuerorgan im Bild dargestellt. Das Resultat der Maschine erscheint einesteils auf Lochkarten gedruckt, wie sie bei den Maschinen der International Business Machines Corp. üblich sind, anderseits sind zwei automatisch arbeitende Schreibmaschinen vorgesehen, welche die Übersetzung dieser Lochkarten-Resultate in Klarschrift fortlaufend vornehmen. In Fig. 3 sind diese Schreibmaschinen und der Lochkarten-Übersetzer abgebildet. Die Lochbänder, auf denen ganze Funktionen aufgezeichnet sind, haben eine beträchtliche Länge und sind daher, wie aus Fig. 4 ersichtlich ist, über mehrere Rollen geführt. Mit dieser Anordnung ist es möglich, zyklische Funktionen kontinuierlich in den Prozess einzuführen. Da die Zahl der auf einem Papierband registrierbaren Werte im Vergleich mit der 23stelligen Genauigkeit der Gesamtmaschine relativ klein ist, ist dafür gesorgt, dass die Funktionen interpoliert werden können. Die Herstellung der Lochbänder erfolgt mittels einer speziellen Schreibmaschine, wie sie in Fig. 5 dargestellt ist. Die nachherige Abtastung der Lochbänder in der Rechenmaschine erfolgt durch feine elektrische Kontakte.

Die ganze Rechenmaschine ist ca. 17 Meter lang und ca. 2,5 m hoch. Sie enthält 3300 Relais und ca. 175 000 Lötstellen. Bei einem so komplizierten Mechanismus ist immer mit einer gewissen Störanfälligkeit zu rechnen. Zum Zwecke der sofortigen Aufdeckung allfälliger Fehlresultate ist daher die Maschine so eingerichtet, dass grundsätzlich von jedem Resultat, das von der Schreibmaschine gedruckt wird, eine Kontrollrechnung ausgeführt wird.

Von besonderem Interesse ist die Geschwindigkeit, mit der ein Rechenvorgang vor sich geht, weil, wie wir gesehen haben, die Berechnung einer Funktion oder Gleichung in unzähligen schrittweisen Einzelrechnungen durchgeführt wird. Ein Additionsvorgang nimmt ca. $^1/_3$ Sekunde in Anspruch, die Multiplikation für 23stellige Zahlen 5,7 Sek. und die Division 15,3 Sek. Die Berechnung der e-Funktion, wie sie eingangs als Beispiel angeführt wurde, nähme für 100 Schritte des Argumentes daher ca. 10 Minuten in Anspruch. Aus diesen Zahlen erkennt man, dass für kompliziertere Funktionen, wenn sie mit grösserer Genauigkeit berechnet werden sollen, eine erhebliche Zeit benötigt wird. Die Zeitersparnis gegenüber einer Berechnung von Funktionen mittelst normaler handbetätigter Rechenmaschinen kommt natürlich erst bei komplizierteren Problemen reichlich zum Ausdruck, im Mittel dürfte sich der Zeitbedarf auf etwa einen Hundertstel reduzieren.

Es war dem Vortragenden möglich, im vergangenen Herbst die Maschine im Betrieb zu besichtigen. Zu dieser Zeit war sie damit beschäftigt, die Besselfunktionen J_0 und J_1 vom Argumentwert 0 bis 25 auf 18 Stellen genau und für $^1/_{1000}$ Schritte des Argumentes zu berechnen. Die Maschine lieferte für diese Rechenoperation etwa eine Resultatzahl pro Minute und war Tag und Nacht in Betrieb. Die Resultate wurden fortlaufend mit der Schreibmaschine gedruckt, so dass keine Ablesefehler vorkommen konnten. Die Tabellierung dieser Besselfunktionen J_0 und J_1 nahm ca. einen Monat in Anspruch. An jedem Freitag wurde die Maschine geprüft und allfällige Störungen behoben, eine Tätigkeit, die in Anbetracht der Kompliziertheit der Maschine offenbar notwendig ist.

Die Herstellungskosten dieser Rechenmaschine wurden mit ca. 1 Million Dollar angegeben, zwei weitere gleiche Maschinen sollen zur Zeit im Bau sein. Es ist anzunehmen, dass die Zahl der genau tabellierten Funktionen in den nächsten Jahren in ungeahntem Masse ansteigen wird, da diese Maschinen imstande sind, Funktionen zu liefern, deren Berechnung früher das Lebenswerk eines Mathematikers bedeutet hätte.

Die zweite grosse numerische Rechenmaschine, welche unter dem Namen ENIAC bekannt ist, wurde unabhängig von dieser ersten Maschine an der Universität von Pennsylvania entwickelt. Sie benutzt ebenfalls addierende Zählwerke im Dezimalsystem, verschieden von der ersten Maschine sind jedoch die dabei verwendeten Elemente, indem hier beim Rechenvorgang auf alle mechanisch bewegten Teile verzichtet wird und sämtliche elektrischen Schaltvorgänge mit Elektronenröhren durchgeführt werden. Dies bringt den enormen Vorteil mit sich, dass die einzelnen Rechenvorgänge mit unerhörter Geschwindigkeit vor sich gehen können. Auch bei dieser Maschine wird jede Funktion oder Gleichung schrittweise angenähert. Jede Rechnung, auch Differentiationen und Integrationen, werden zurückgeführt auf die elementaren arithmetischen Operationen, nämlich Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und im speziellen noch Quadrat-

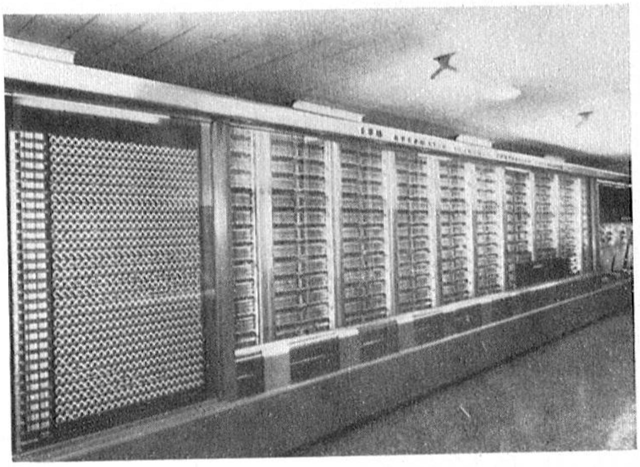


Fig. 1 – Frontwand der Rechenmaschine «the automatic sequence controlled calculator» (Harvarduniversität Cambridge, Mass.)

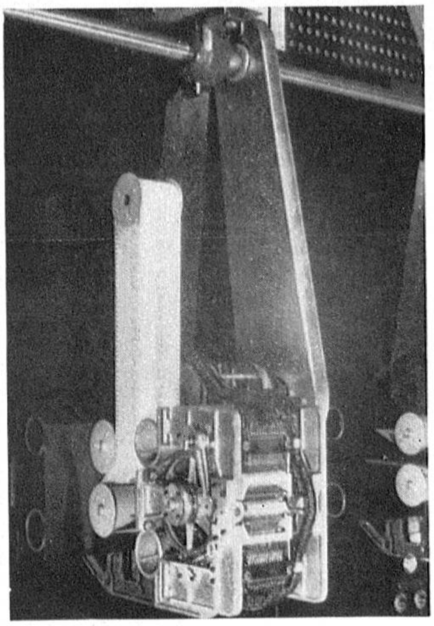


Fig. 2 – Programmgeber mittels gelochtem Papierband

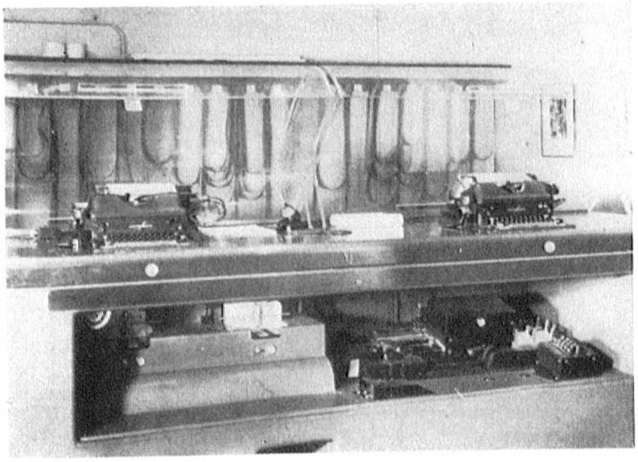


Fig. 3
Automatische Schreibmaschinen und Lochkartenübersetzer für die Resultataufzeichnung

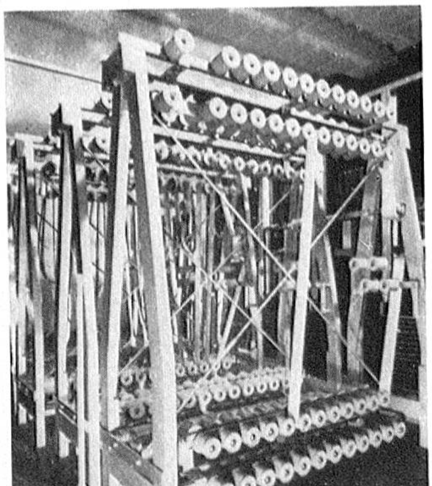


Fig. 4
Anordnung der Lochbänder für die Einführung beliebiger Funktionen in den Rechenprozess

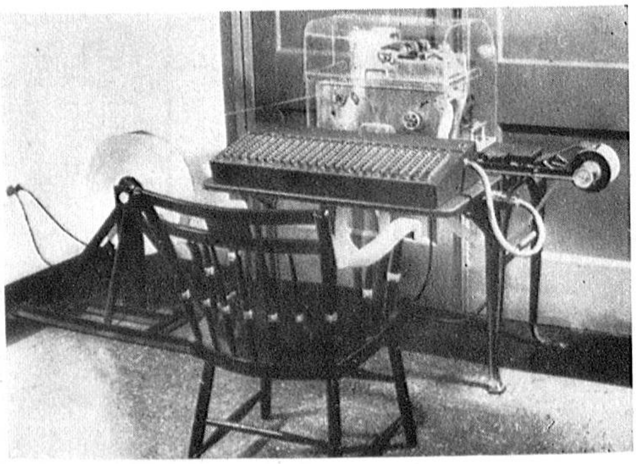


Fig. 5 – Maschine zum Lochen der Lochbänder

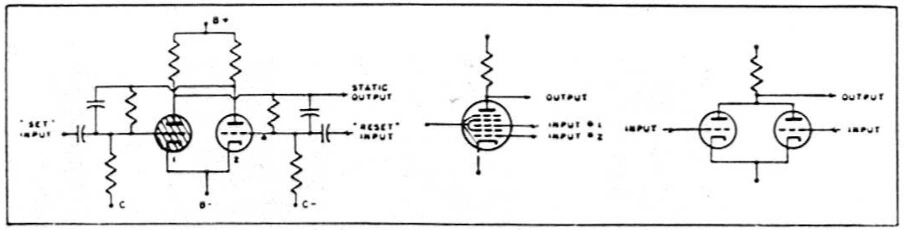


Fig. 6 – Links: Kallirotronschaltung für Dezimalregister
Mitte: Mehrgitterröhre als elektrischer Schalter
Rechts: Röhrenschaltung für die Addition zweier Impulse

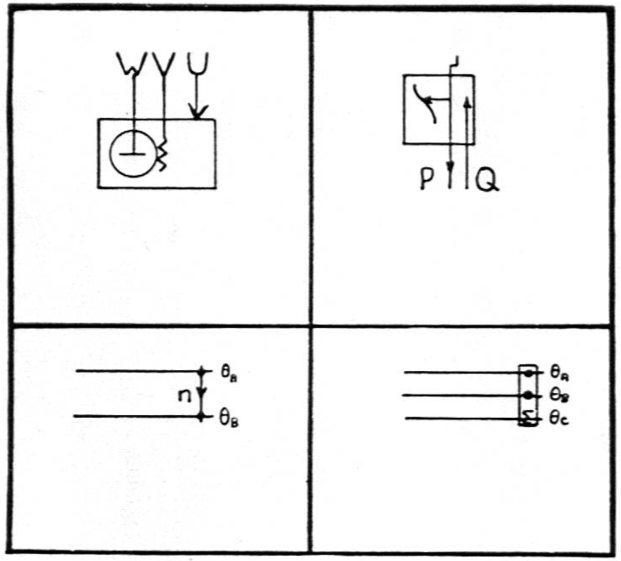


Fig. 9 – Erklärung der Symbole in den Getriebeschemata
Oben links: Integrator $W = k \int U dV$
Oben rechts: Vorgegebene Funktion $P = F(Q)$
Unten links: Verbindung zweier Wellen mit der Übersetzung n
Unten rechts: Verbindung über Differentialgetriebe

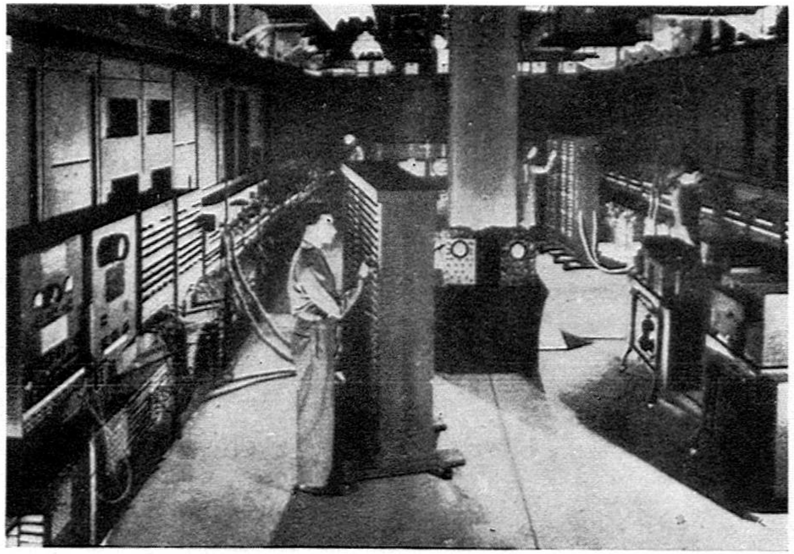


Fig. 7 – Gesamtansicht der ENIAC-Rechenmaschine

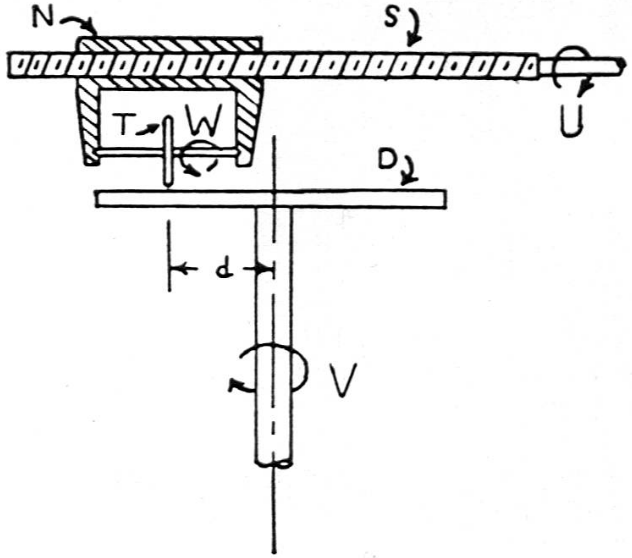


Fig. 8 – Prinzip eines mechanischen Integrators

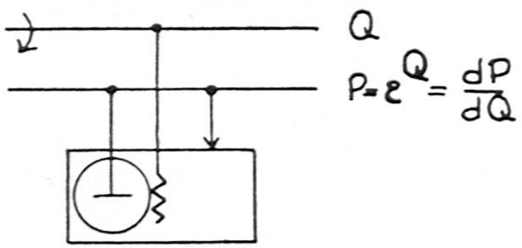


Fig. 10
Lösung der Differentialgleichung
$$\frac{dP}{dQ} = P = e^Q$$

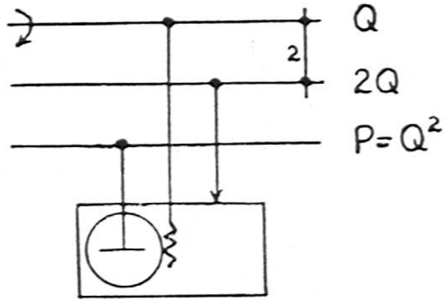


Fig. 11
Bildung des Quadrates $P = Q^2$

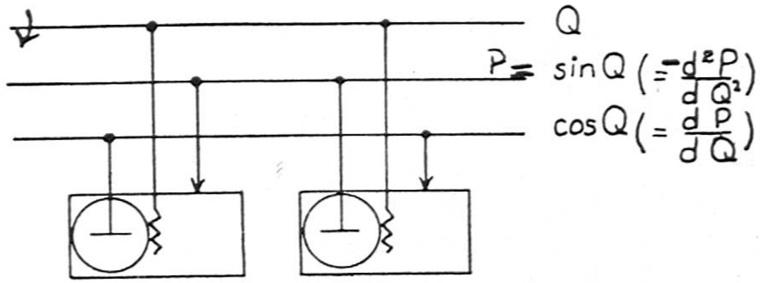


Fig. 12
Bildung von Sinus- und Cosinusfunktionen

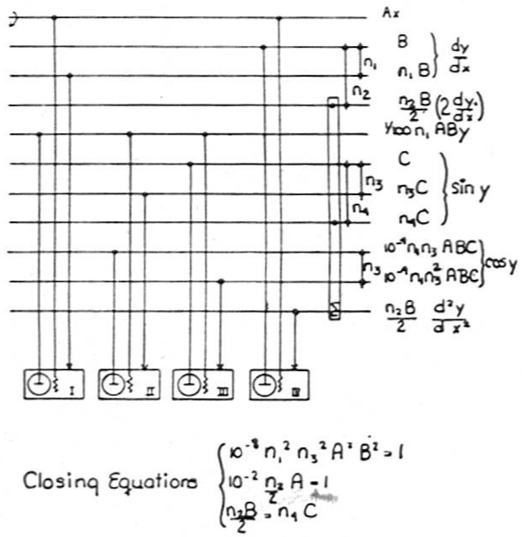


Fig. 13 – Lösung der Differentialgleichung
$$\frac{d^2 y}{d x^2} + 2\,\frac{d y}{d x} + \sin y = 0$$

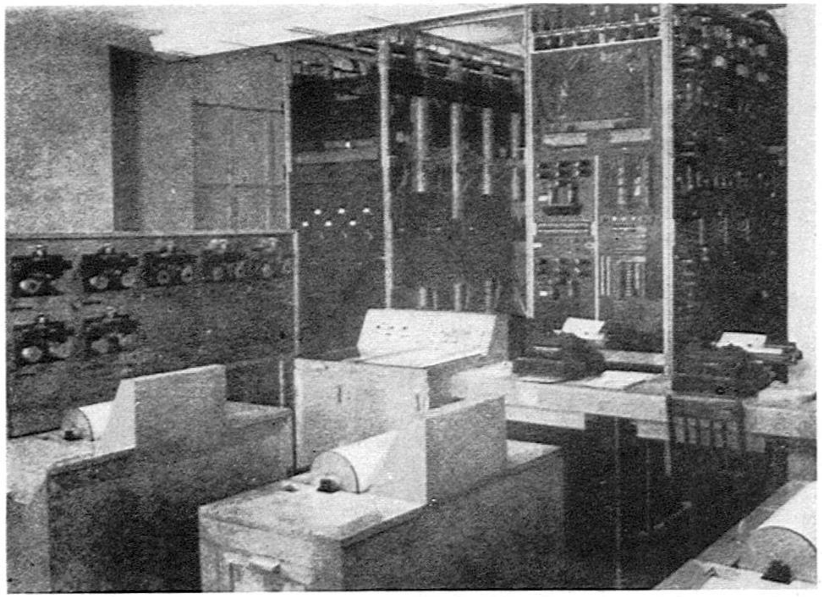


Fig. 14 – Gesamtansicht des Differential-Analyzer vom Mass. Institut of Technology, Cambridge

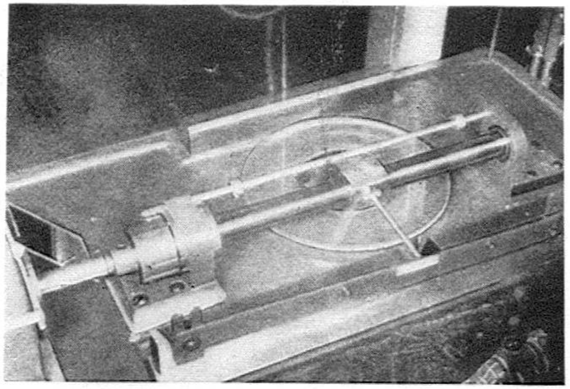


Fig. 15 – Integratorscheibe von oben gesehen

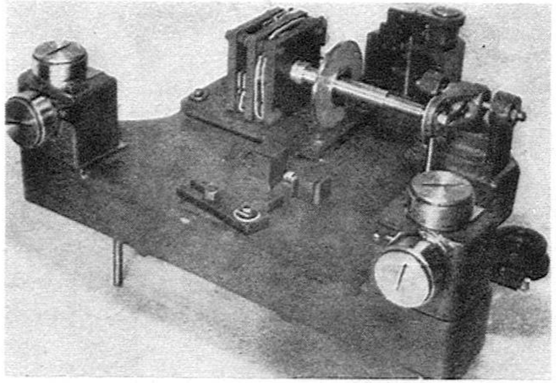


Fig. 16 – Schlitten mit Integratorrädchen

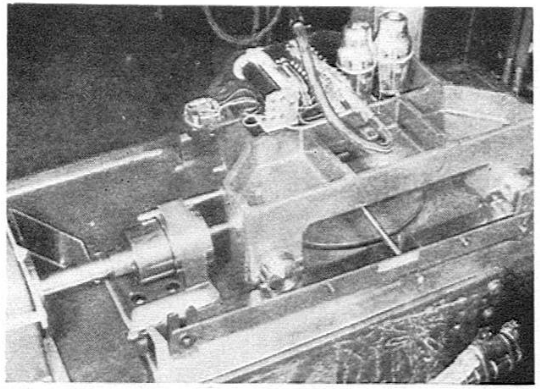


Fig. 17 – Gesamtansicht des Integrators

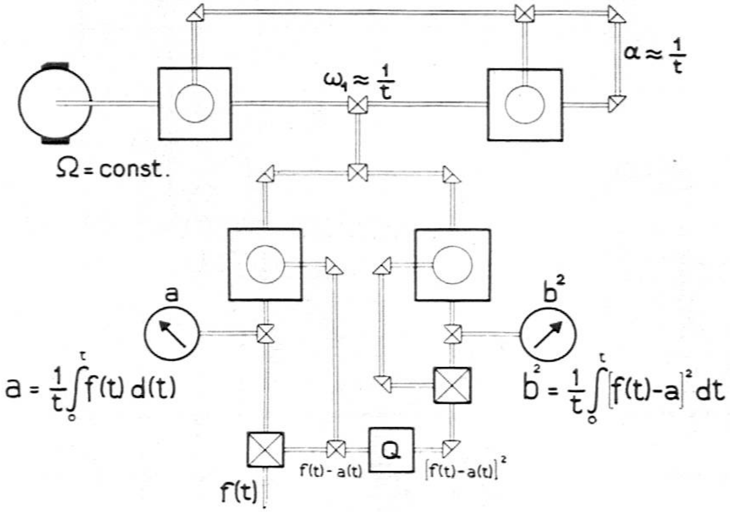


Fig. 18 – Getriebeschema zum Mittelwertbildner

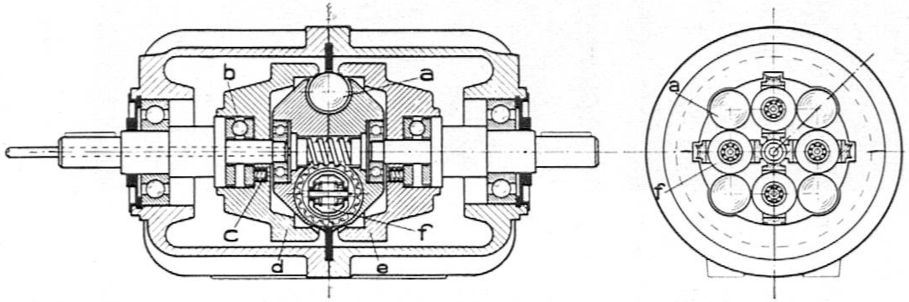


Fig. 19 – Schnitt durch einen Kugelgetriebeintegrator

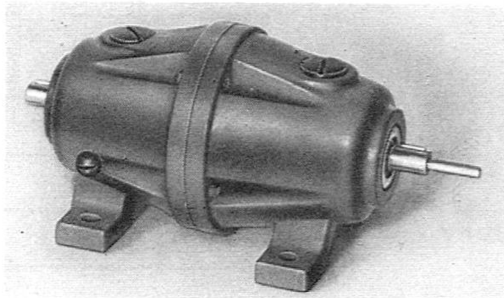


Fig. 20 – Ansicht des Kugelgetriebes

wurzelziehung. Ausserdem sind natürlich Register vorhanden für die Speicherung von gegebenen oder von berechneten Zahlenwerten. Es sind im ganzen 20 addierende Zählwerke, die auch als Register dienen können, vorhanden, eine spezielle Einheit zur raschen Ausführung von Multiplikationen, eine Einheit zur Division und eine Einheit zur Wurzelziehung, ausserdem drei Funktionstafeln, welche die Einführung dreier verschiedener Funktionen in den Rechenprozess gestatten, und eine Steuertafel, auf der die Folge der von der Maschine auszuführenden Operationen eingestellt werden kann.

Gegebene Zahlenwerte werden auch dieser Maschine durch Lochkarten des IBM-Systems zugeführt, ebenso werden die Resultate auf Lochkarten gedruckt und nachher durch einen Übersetzer in Schreibmaschinen-Klarschrift umgewandelt. Die Einführung von Zahlenwerten mit dem Lochkartensystem und die Bildung des Resultates auf Lochkarten sind mechanische Vorgänge und nehmen eine im Vergleich zu der eigentlichen Rechengeschwindigkeit grosse Zeit in Anspruch. Da sich jedoch ein Resultat aus verschiedenen Einzeloperationen zusammensetzt, so wird bei komplizierteren Problemen die Geschwindigkeit der Resultatbildung trotzdem durch die Einzeloperationen bestimmt.

Das Hauptelement der ENIAC-Maschine ist der Dezimalzähler. Während dies bei der vorher beschriebenen Maschine ein mechanisch bewegtes wählerartiges Gebilde war, so tritt bei der ENIAC an Stelle dieses Schaltwerkes eine Serie von 10 Röhrenschaltungen. Jeder Ziffer ist ein Röhrenpaar zugeordnet. Dieses Röhrenpaar bildet im Prinzip eine sogenannte Kallirotronschaltung, in welcher zwangsläufig eine der beiden Röhren stromführend ist, wogegen die andere den Strom unterbricht. Durch einen äusseren Impuls auf das Gitter der stromführenden Röhre kann diese unterbrochen werden, wodurch automatisch die andere Röhre stromführend wird. Von den 10 zu einer Dezimale gehörenden Kallirotronstufen befindet sich immer eine im eingeschalteten Zustand, während alle 9 übrigen ausgeschaltet sind. Die Weiterschaltung dieses Zählers um einen Schritt erfolgt derart, dass auf sämtliche 10 Kallirotronstufen gleichzeitig ein Impuls gegeben wird. Auf die ausgeschalteten Kallirotronstufen hat dieser Impuls keinen Einfluss, die bereits eingeschaltete wird jedoch durch den Impuls zum Ausschalten gebracht, und sie bringt mit diesem Vorgang die nächstfolgende zum Einschalten. Mit Hilfe von Neonlampen, die mit diesen

Kallirotronröhren gekuppelt sind, kann von aussen her die Stellung eines Zählers kontrolliert werden. In Fig. 6 ist links das Schaltbild einer solchen Kallirotronstufe aufgezeichnet. Durch einen Impuls am linken Eingang kann die Röhre 1 unterbrochen werden, durch einen Impuls von der rechten Seite wird die Röhre 2 unterbrochen. Die Figur zeigt zwei weitere Bauelemente der Rechenmaschine, nämlich eine Mehrgitterröhre, die als Schalter wirkt, indem durch Steuerung des Eingangsgitters 1 die Wirksamkeit eines Eingangssignales des Eingangs 2 gesperrt oder geöffnet werden kann, und ganz rechts ist ein Kreis für die Addition zweier Vorgänge aufgezeichnet. Zur Durchführung sämtlicher Schaltvorgänge werden ca. 18 000 Elektronenröhren benötigt.

Die Steuerimpulse folgen sich in Abständen von 10 Mikrosekunden, d. h. eine Addition ist in 100 Mikrosekunden oder $^1/_{10}$ Millisekunde beendet. Eine ebenso lange Zeit wird benötigt, um das Resultat der Zählung auf ein Register oder auf einen zweiten Zähler überzuführen. Wenn wir diese Rechengeschwindigkeit, die also für eine vollständige Addition mit ca. $^1/_{5000}$ Sekunde angegeben werden kann, vergleichen mit der Zeit, die bei der vorher beschriebenen Maschine benötigt wurde, so sehen wir, dass die Rechengeschwindigkeit hier rund 1000mal grösser ist. Für die Multiplikation von 10stelligen Zahlen benötigt die ENIAC-Maschine ca. $^1/_{400}$ Sekunde, und für die Berechnung der *e*-Funktion mit 100 Funktionswerten würde die ENIAC 0,06 Sekunden als eigentliche Rechenzeit benötigen. In Wirklichkeit nimmt das Drucken des Resultates ca. 60 Sekunden in Anspruch. Fig. 7 zeigt eine Gesamtansicht der Rechenmaschine. Im Vordergrund sind die Steuereinheiten, die den Rechenvorgang vorschreiben und die von Hand eingestellt werden, sichtbar. Das Gestell in der Mitte besteht aus einzelnen Drehknöpfen, an denen 100 Werte einer vorgegebenen Funktion auf 10 Dezimalen genau eingestellt werden können. Dieses Funktionenregister übernimmt hier die Rolle des Papierbandregisters der vorhergehenden Maschine. Ein Papierband zur Einführung der Funktionen wäre infolge der grossen Rechengeschwindigkeit nicht brauchbar. Aus dem Register können die Zahlen in Zeitintervallen von 200 Mikrosekunden in den Rechenprozess eingeführt werden. Anschliessend sind die Zähler für die Additionen sichtbar und weitere zwei Schalttafeln für die Einstellung von Funktionen. Am rechten

Ende sind die Lochkartendruckmaschinen und die Schreibmaschinen für die Resultataufzeichnung sichtbar. Zusammenfassend ist über die ENIAC zu sagen, dass sie in bezug auf Rechengenauigkeit dem Automatic sequence controlled calculator der Harvarduniversität wesentlich nachsteht, indem nur 10stellige Zahlen verarbeitet werden und indem vorgegebene Funktionen nur für 100 Argumentwerte eingestellt werden können. Dafür hat diese Maschine den Vorteil, dass sie eine komplizierte Berechnung etwa 1000mal rascher durchführen kann, so dass z. B. auch langsam konvergierende Reihen oder komplizierte Differentialgleichungen in kürzester Zeit ausgewertet werden. Immerhin ist zu sagen, dass zur Lösung eines mathematischen Problems mit Hilfe einer solchen Rechenmaschine teilweise lange mathematische Vorarbeiten notwendig sind, um das Problem der Maschine anzupassen. Ein erstes Einrichten der Maschine kann Tage in Anspruch nehmen und lohnt sich daher nur für Rechenaufgaben, die mit einfacheren Mitteln schwer zu lösen sind. Wenn jedoch für ein Problem die Vorbereitungen einmal gemacht sind, so ist es nachher ein leichtes, die Maschine ein zweites Mal das gleiche oder ähnliche Probleme rechnen zu lassen.

Man kann sich fragen, warum ein so grosser Wert auf die hohe Rechengeschwindigkeit gelegt wurde. Das mag damit zusammenhängen, weil die nicht nach dem numerischen Prinzip rechnenden Differentialanalysatoren imstande sind, das Resultat einer Differentialgleichung sozusagen augenblicklich oder in wenigen Sekunden zu liefern. Wenn es sich zum Beispiel darum handelt, ein Stabilitätsproblem zu untersuchen, wobei verschiedene Koeffizienten einer Differentialgleichung derart bestimmt werden müssen, dass daraus eine annehmbare stabile Lösung resultiert, so müssen nacheinander eine grosse Zahl von Lösungen der Gleichung betrachtet werden. Ein Differentialanalysator, wie ich ihn in der Folge noch beschreiben werde, kann diese Resultate in kürzester Aufeinanderfolge liefern, wogegen eine numerisch rechnende Maschine für jede Kurve eine geraume Zeit benötigt. Bei der ENIAC ist diese Zeit nun so klein geworden, dass sie praktisch mit einem Differentialanalysator konkurrieren kann, sie hat aber dann ausserdem gegenüber jenem den Vorteil, dass sie infolge ihrer grossen Genauigkeit auch für beliebige andere algebraische Rechnungen verwendet werden kann.

II.

Bei der zweiten Gruppe von Rechenmaschinen, welche nicht nach dem numerischen Prinzip arbeiten, sondern bei denen der Funktionswert selbst als Grösse verarbeitet wird, gibt es ebenfalls mechanische und elektrische Lösungen.

Bei den mechanischen Geräten wird der Funktionswert beispielsweise als Drehung einer Welle dargestellt. In diesem Fall können Additionen und Subtraktionen leicht mit Hilfe von Differentialgetrieben durchgeführt werden. Die Ausführung von Multiplikationen bietet grössere Schwierigkeiten. Es sind mechanisch arbeitende Rechengeräte bekannt, bei denen mit Hilfe von Hebelgetrieben oder mit Hilfe von Kurvenkörpern Multiplikationen durchgeführt werden. Die mechanische Verbindung mehrerer solcher Multiplikationsgetriebe ist jedoch umständlich, so dass die Umstellung einer solchen Maschine auf eine neue Aufgabe praktisch einer Neukonstruktion gleichkommt. Ein weiteres Element, das insbesondere zur Bewältigung von Differentialgleichungen benötigt wird, ist ein Differentiator oder Integrator. Es kann leicht gezeigt werden, dass es mit Hilfe zweier Integratoren auch möglich ist, eine Multiplikation durchzuführen. Wenn ein Element zur Integration bekannt ist, so lassen sich daher mit diesem und unter Zuhilfenahme von Differentialgetrieben und veränderlichen Übersetzungen die meisten mathematischen Probleme lösen.

Am Mass. Institut of Technology in Cambridge in den Vereinigten Staaten wurde ein solches Rechengerät, genannt Differential-Analyzer, gebaut. Es ist imstande, eine Folge von Additionen, Multiplikationen und Integrationen in beliebiger Kombination durchzuführen und wurde im Auftrage der amerikanischen Marine insbesondere zur Lösung ballistischer Probleme hergestellt. Die Genauigkeit, mit der diese Maschine arbeitet, ist naturgemäss nicht so gross wie diejenige der numerisch arbeitenden Geräte. Sie liegt in der Grössenordnung von 0,1—0,5 ‰. Die Maschine enthält keine Differentiatoren, da es technische Schwierigkeiten bereitet, mechanische Differentiatoren genügend hoher Genauigkeit herzustellen. Jedes Problem muss daher zuerst so umgeformt werden, dass es mit Hilfe von Integrationen, Additionen und Multiplikationen gelöst werden kann. Das lässt sich bei einer beliebigen Differentialgleichung im allgemeinen leicht durchführen. Eine gegebene Differentialgleichung von der Form

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

wird nach der Ableitung höchster Ordnung aufgelöst, was in den meisten Fällen möglich ist.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f_1\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}, \ldots \frac{dy}{dx}, y, x\right).$$

Da jede Ableitung niedriger Ordnung durch Integration aus der Ableitung höherer Ordnung gewonnen werden kann, so erkennt man leicht, dass die rechte Seite sich in Form von Integralen der linken Seite darstellen lässt.

Fig. 8 zeigt das Prinzip eines mechanischen Integrators, wie er in dieser amerikanischen Rechenmaschine Anwendung gefunden hat. Die Scheibe D wird gedreht, wobei der Drehwinkel proportional der freien Variabeln V ist. Auf dieser Scheibe rollt ein kleines Rädchen, ähnlich wie bei einem Planimeter. Der Abstand dieses Rädchens von der Mittelachse kann verstellt werden. Man erkennt leicht, dass zwischen dem Drehwinkel des Rädchens und den Drehwinkeln der beiden Eingangsbewegungen V und U der folgende Zusammenhang besteht:

$$dw = U \cdot dV, \quad W = \int U dV.$$

Ausser diesem Rechenelement enthält die Maschine noch Differentiale, welche zur Addition dienen. Ein spezielles Element zur Multiplikation ist nicht vorhanden, denn die bekannten mechanischen Mittel, um eine Multiplikation herzustellen, sind sehr unbequem. Die Maschine löst daher Multiplikationsprobleme unter Verwendung der eben beschriebenen Integratoren nach der bekannten Gleichung für die partielle Integration.

$$P \cdot Q = \int QDP + \int PDQ.$$

Wie man sieht, sind für eine Multiplikation zwei Integratoren notwendig.

Anhand der mechanischen Schaltbilder Fig. 10—13 soll gezeigt werden, wie die einzelnen Rechenelemente zu mechanischen Rechennetzwerken zusammengeschaltet werden, so dass sie für die verschiedensten Rechenaufgaben dienlich sind. In Fig. 9 sind die in den folgenden Schaltbildern vorkommenden symbolischen Bezeichnungen erläutert. Es bedeuten das oberste linke Bild einen Integrator, das rechte die Funktion einer Variabeln, wie sie beispielsweise mit Hilfe einer Kurvenscheibe oder eines Kurvenlineals erzeugt werden kann, die horizontalen Striche in den unteren Figuren bedeuten Verbindungswellen, die vertikalen Striche sollen Verbindungen zwischen diesen Wellen andeuten, wobei das Übersetzungsverhältnis durch Zahlen angeschrieben wird. Ein Differentialgetriebe wird in der unten rechts gezeichneten Art dargestellt, wobei das Summenzeichen angibt, dass diese Welle als Resultat der Additionen der beiden oberen Wellen aufzufassen ist. In Fig. 10 ist die einfache Schaltung der Maschine dargestellt, wenn sie für die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dP}{dQ} = P$$

verwendet wird. Es wird hierbei nur ein einziger Integrator verwendet, und das Einrichten der Maschine auf dieses einfache Problem nimmt nur geringe Zeit in Anspruch, im Gegensatz zu der früher erwähnten numerisch rechnenden Maschine, bei der das Einrichten der Maschine im Vergleich zur Einfachheit des Problems in keinem Verhältnis steht. Fig. 11 zeigt, wie mit Hilfe eines Integrators aus einer linearen Bewegung eine quadratische erzeugt werden kann. In analoger Weise ist es möglich, mit Hilfe von zwei Integratoren Sinus- und Cosinusfunktionen zu erzeugen, ebenfalls die hyperbolischen Funktionen (Fig. 12). In Fig. 13 ist die Schaltung für eine transzendente Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt. Hierbei werden, trotzdem das Problem nur zweiter Ordnung ist, vier Integratoren benötigt, weil die im Problem enthaltene Sinusfunktion als Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt wird.

Wie aus diesen Schaltschematas ersichtlich ist, lassen sich mit den zwei Einzelelementen Integrator und Differential eine Unmenge von Problemen lösen, sofern es möglich ist, diese beiden Elemente beliebig in verschiedenen Übersetzungsverhältnissen miteinander zu verbinden. Mit rein mechanischen Mitteln wäre das Problem der Verbindung der Einzelelemente kaum zu lösen. Die Rechenmaschine arbeitet daher mit elektrischen Synchronübertragungen zwischen den verschiedenen einzelnen Integratoren und Differentialen. Um die richtigen Übersetzungsverhältnisse wählen zu können, sind Getriebekasten vorhanden, die es gestatten, mit Hilfe elektromagnetischer Kupplungen wahlweise Übersetzungen herzustellen.

Eine Gesamtansicht der Maschine vermittelt Fig. 14. In den beiden grossen Gestellen sind 18 Integratoren untergebracht, ausserdem Differentiale, Getriebekasten und Servosysteme, welche die Übertragung der Drehwerte von einem Element zum andern besorgen. Die beiden Schreibmaschinen schreiben automatisch das Resultat auf, es ist daher ein Übersetzer vorhanden, welcher die an und für sich kontinuierliche Bewegung der Resultatwelle in Dezimalzahlen überträgt.

Im Vordergrund sind Rollen sichtbar, auf denen das Resultat automatisch in Kurvenform aufgezeichnet wird. Zwei dieser Walzen können auch für die manuelle Einführung von Funktionen in den Rechenprozess gebraucht werden. In Fig. 15 ist die Scheibe des Integrators, eine genau plan polierte Glasplatte, abgebildet. Auf dieser Glasplatte ist ein beweglicher Wagen angebracht, der das Integratorrädchen enthält. Fig. 16 zeigt diesen Wagen und das Rädchen in einer Ansicht von unten. Der gesamte Integrator ist in Fig. 17 dargestellt.

Die Umstellung der Maschine auf ein neues Problem nimmt viel weniger Zeit in Anspruch als bei den numerischen Maschinen, und im allgemeinen sind keine grossen mathematischen Vorarbeiten notwendig, weil die Maschine die Differentialgleichung resp. Integralgleichung als solche löst. Die Maschine benötigt im Mittel ca. 15 Minuten für die Berechnung und Aufzeichnung einer Resultatreihe, d. h. z. B. einer Lösungskurve.

Die Entwicklung des Differential-Analyzer wurde im Jahre 1937 begonnen, und die Maschine konnte im Jahre 1943 dem Betrieb übergeben werden und bewährt sich seither für die verschiedensten Zwecke. Sie wird im allgemeinen vermietet, wobei als Entschädigung ca. $1\frac{1}{2}$ Dollar pro Stunde verwendetem Integrator verlangt werden. Im Mittel ergibt das eine Einnahme von ca. 250 Dollar pro Tag.

Als ein weiteres Beispiel für ein mit mechanischen Integratoren arbeitendes Rechengerät soll noch kurz eine schweizerische Neuentwicklung Erwähnung finden. Es handelt sich dabei nicht um eine Rechenmaschine für verschiedene Verwendungszwecke, sondern um ein Gerät, das speziell für militärischen Gebrauch gebaut wurde.

Die Fliegerabwehrtruppe hat zur Zeit Messgeräte in Verwendung, die in Form einer Papierstreifenregistrierung die Fehler, welche beim Telemetrieren eines Flugzeuges auftreten, angeben. Es besteht nun der Wunsch, aus diesen vermessenen Kurven den arithmetischen Mittelwert zu berechnen und den sogenannten Schwankungswert, der als quadratischer Mittelwert aufgefasst werden kann, d. h. es sind die Integrale zu ermitteln:

$$\text{Arithmetischer Mittelwert } a = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi\, dt,$$

$$\text{Quadratischer Mittelwert } b^2 = \frac{1}{t}\int_0^t (\varphi - a)^2 dt.$$

Fig. 18 stellt ein mechanisches Getriebeschema dar, welches die vorhin genannten Integrale zu berechnen gestattet, wobei die Resultate kontinuierlich und augenblicklich an zwei Skalen angezeigt werden. Der in diesem mechanischen Rechengerät verwendete Integrator weicht von demjenigen der amerikanischen Maschine insofern wesentlich ab, als er in viel kompakterer Anordnung als sogenanntes Kugelgetriebe ausgebildet ist. Das Kugelgetriebe ist im Schnitt in Fig. 19 dargestellt, während Fig. 20 eine Ansicht zeigt. Die äussere Aufmachung des Mittelwertbildners geht aus Fig. 21 hervor.

Analog zu diesen mechanisch arbeitenden funktionalen Rechengeräten gibt es auch Rechenmaschinen, bei welchen der Funktionswert rein elektrisch verarbeitet wird. Es handelt sich hierbei um elektrische Netzwerke, deren Schaltelemente verändert werden können, derart, dass die Spannung zwischen verschiedenen Punkten des Netzwerkes den zu berechnenden Grössen entspricht. Anhand eines Beispieles seien die Grundoperationen Addition und Multiplikation mit Hilfe elektrischer Netzwerke kurz erläutert. In Fig. 22 ist die bekannte Wheatstonesche Messbrücke dargestellt, und zwar links oben in der Ihnen wahrscheinlich geläufigen Form. Die übrigen Schaltbilder stellen die gleiche Schaltung in etwas anderer Darstellungsweise dar. Bei einer solchen Schaltung ist die Spannung am Ausgangsklemmenpaar einesteils proportional der Spannung am Eingangsklemmenpaar, andererseits jedoch auch abhängig von den 4 das Netzwerk bestimmenden Widerständen. Wir können daher schreiben:

$$U_2 = p \cdot U_1,$$

wobei p eine Grösse ist, die nur von den Schaltelementen bestimmt wird; sofern wir zwei solcher Vierpole hintereinanderschalten, entsteht

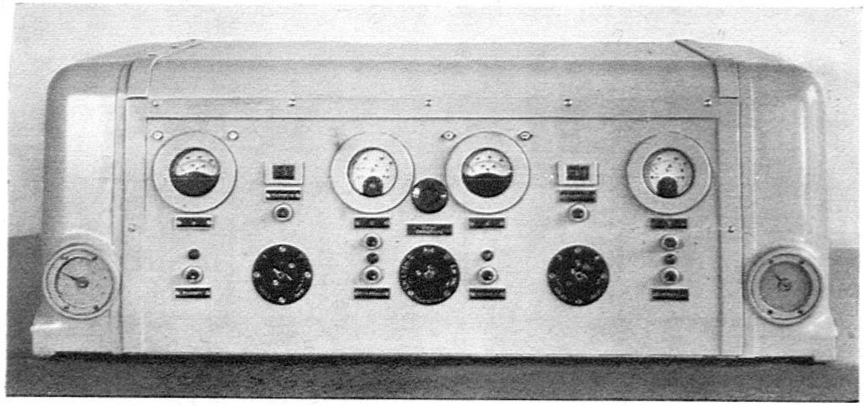


Fig. 21 – Ansicht des Mittelwertbildners

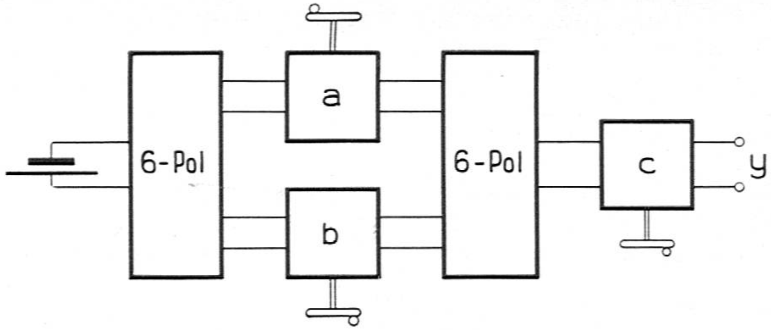


Fig. 23 – Prinzip eines Netzwerkes zur Addition

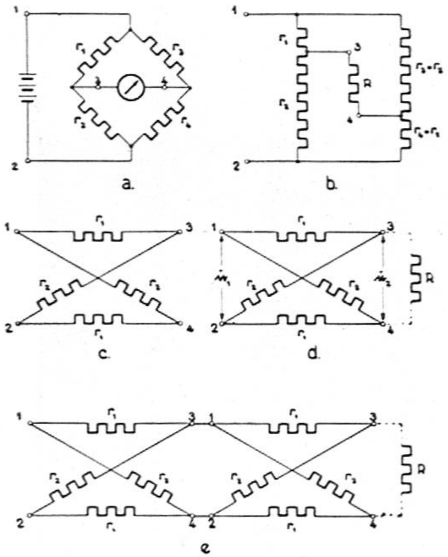


Fig. 22 – Vierpolschaltungen

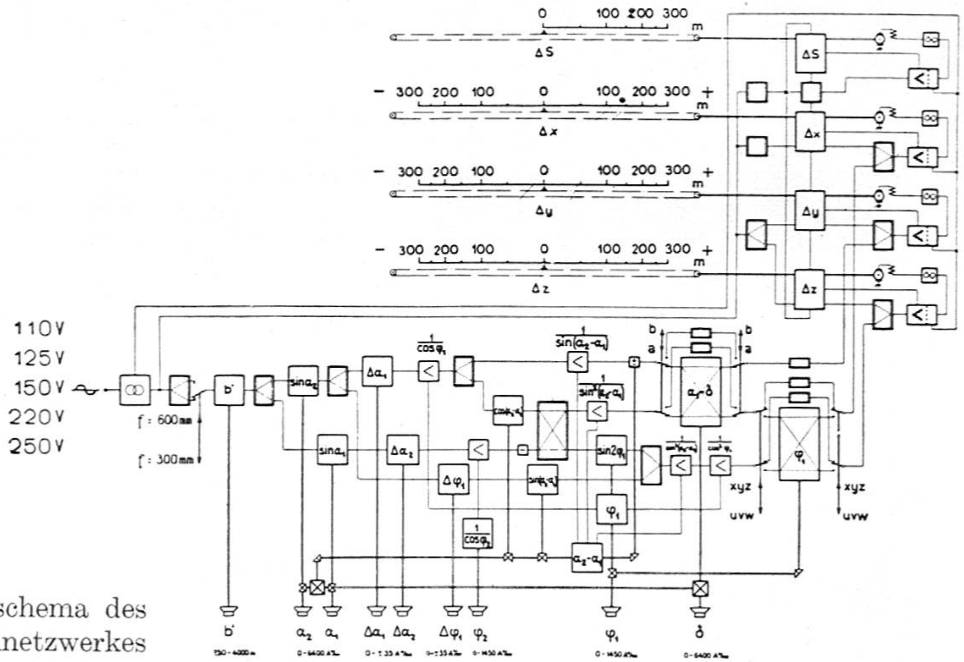


Fig. 24 – Prinzipschema des Stereomat-Rechennetzwerkes

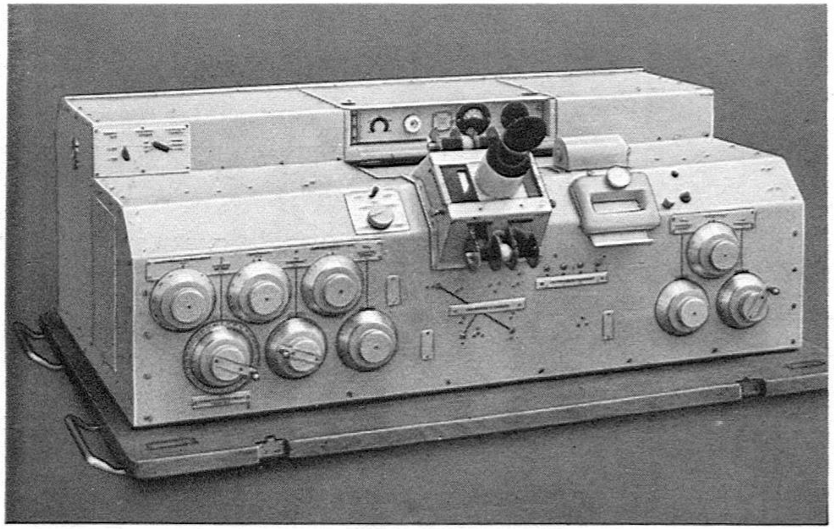


Fig. 25 – Frontansicht des «Stereomat»

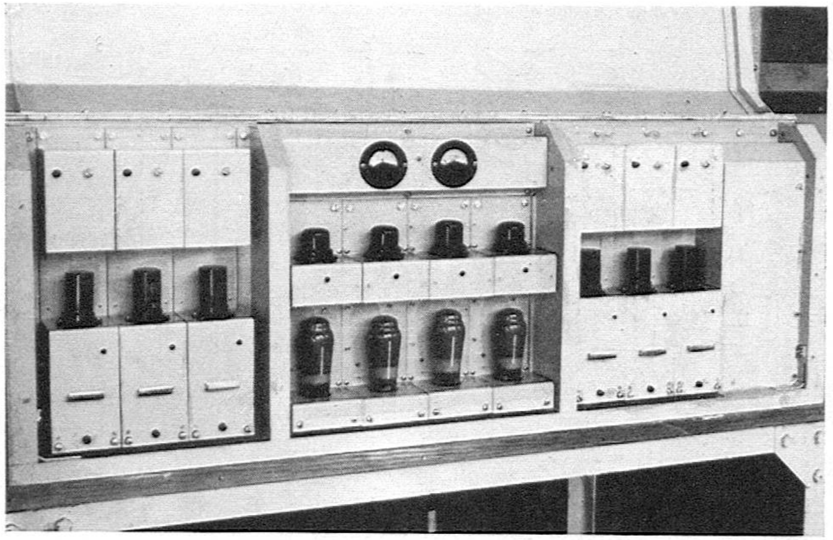
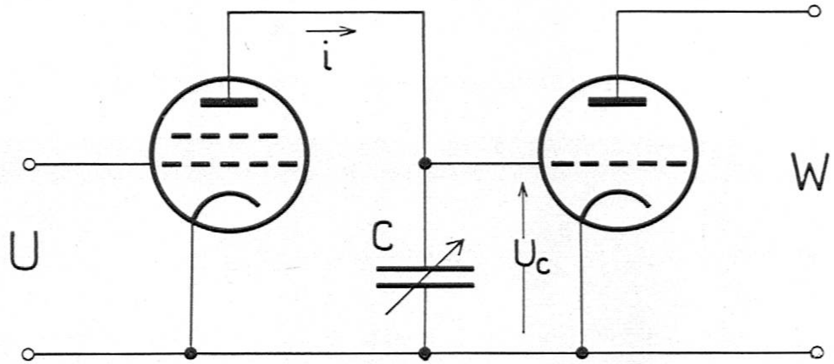
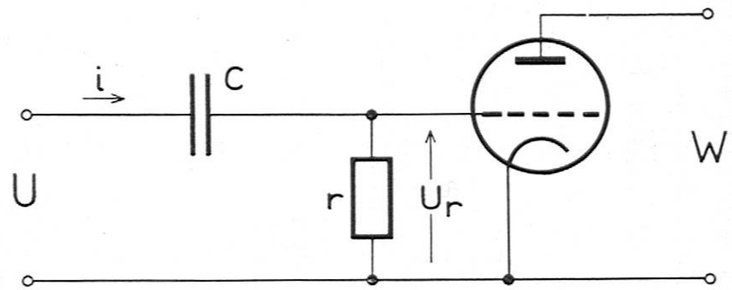


Fig. 26 – Rückseite des «Stereomat» mit Verstärkern



$$U_c = \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad W = k\int U\,dt$$

Fig. 27 – Schaltung zur Integration



$$i \approx C\,\frac{dU}{dt}$$

$$U_r = i \cdot r = r \cdot C\,\frac{dU}{dt} \qquad W = T\,\frac{dU}{dt}$$

Fig. 28 – Schaltung zur Differentiation

das Produkt zweier Übertragungsfaktoren, es wird die Ausgangsspannung

$$U_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot U_1 .$$

Aus diesem einfachen Beispiel erkennt man, dass die Multiplikation mit Hilfe elektrischer Netzwerke ein einfaches Problem darstellt. Mehr Schwierigkeiten bereitet es, eine saubere Addition zweier Spannungswerte durchzuführen. Es sind für diesen Zweck besondere Netzwerke erforderlich, die wir als Entkopplungs-Sechspole bezeichnen können. Es sei beispielsweise die einfache algebraische Gleichung

$$(A + B) \cdot C = Y$$

zu berechnen, zu deren Lösung in Fig. 23 ein Netzwerk schematisch dargestellt ist. Der Addition entspricht eine Parallelschaltung der beiden Vierpole A und B, der Multiplikation eine Serieschaltung des Vierpoles C. Die Vierpole selbst bestehen aus veränderlichen Widerständen. In einer Arbeit, welche im «Schweizer Archiv» (Heft 2 Jahrgang 1938) erschienen ist, hat Prof. F. Fischer erstmals die theoretischen Grundlagen für die Realisierung solcher elektrischer Rechennetzwerke abgeleitet. Es leuchtet ein, dass die Genauigkeit, mit der ein solches Rechennetzwerk zu arbeiten imstande ist, von der Genauigkeit der Schaltelemente abhängt. Im Gegensatz zu den numerisch rechnenden Maschinen, bei denen die Stellenzahl und damit die Genauigkeit der Maschine mit entsprechendem technischem Aufwand beliebig vergrössert werden kann, ist bei diesen elektrischen Netzwerken und auch bei den analogen mechanischen Geräten die Genauigkeit durch die relative Genauigkeit aller Einzelelemente begrenzt. Beispielsweise ist es möglich, einen ohmschen Widerstand mit einer Genauigkeit von ca. 0,2 ‰ herzustellen, eine höhere Genauigkeit lässt sich mit tragbarem Aufwand kaum erreichen. Damit wird die Genauigkeit eines solchen elektrischen Rechennetzwerkes auf ca. 3-, maximal 4stellige Zahlen begrenzt. Für die meisten Probleme der Buchhaltung, der Versicherungsmathematik, Statistik usw., bei denen im allgemeinen eine höhere Stellenzahl erforderlich ist, sind diese Rechengeräte nicht brauchbar. Dagegen sind sie für die meisten militärischen Probleme und für die mathematische Untersuchung technischer Probleme ausserordentlich wertvoll.

Um ein Beispiel eines solchen elektrisch arbeitenden Rechengerätes anzuführen, soll kurz das von der Contraves AG. ebenfalls für die Fliegerabwehrtruppe gebaute Rechengerät «Stereomat» erwähnt werden, ohne näher auf dessen praktische Verwendung einzugehen. Das Rechengerät hat die Aufgabe, die folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\Delta x = \frac{b' \left\{ \left[\sin\alpha_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\alpha_{1_B} - \sin\alpha_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cdot \Delta\alpha_{2_B} \right] \cdot \cos(\alpha_1 - \delta) - \left[\sin\alpha_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\alpha_{1_B} \right] \cdot \sin(\alpha_1 - \delta \right\}}{\cos\varphi_1 \cdot \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\Delta y = \frac{b' \left\{ \left[\sin\alpha_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\alpha_{1_B} - \sin\alpha_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cdot \Delta\alpha_{2_B} \right] \cdot \sin(\alpha_1 - \delta) + \left[\sin\alpha_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\alpha_{1_B} \right] \cdot \cos(\alpha_1 - \delta \right\}}{\cos\varphi_1 \cdot \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\Delta z = \frac{b' \left\{ \left[\sin\alpha_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\alpha_{1_B} - \sin\alpha_1 \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \cdot \Delta\alpha_{2_B} \right] \cdot \sin\varphi_1 + \sin\alpha_2 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta\varphi_1 \right\}}{\cos^2\varphi_1 \cdot \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\Delta u = \Delta x \cdot \cos\varphi_1 + \Delta z \cdot \sin\varphi_1; \quad \Delta v = \Delta y; \quad \Delta w = -\Delta x \cdot \sin\varphi_1 + \Delta z \cdot \cos\varphi_1.$$

Man erkennt, dass der Rechenvorgang aus Additionen und Multiplikationen von trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt ist. Die trigonometrischen Funktionen sind sämtliche von gegebenen Variabeln abhängig, sie können daher leicht in der Weise erhalten werden, dass die betreffenden Vierpole Widerstände enthalten, welche entsprechend diesen Funktionen verändert werden. Fig. 24 zeigt die Prinzipschaltung für das entsprechende Rechennetzwerk. Hierbei ist zu bemerken, dass zur Vereinfachung der Zeichnung die zweipoligen Leitungen als einzelne Striche dargestellt wurden. Der eigentliche Rechenvorgang ist in dem Moment beendet, in dem alle gegebenen Variabeln an den entsprechenden Drehknöpfen, die am untern Teil des Bildes angedeutet sind, eingestellt worden sind. Es erscheint dann im Ausgang des Netzwerkes eine Spannung, welche dem Resultat proportional ist. Um von allfälligen Spannungsschwankungen des

Netzes frei zu sein, wird die Ausgangsspannung allerdings bei diesem Rechengerät nicht direkt mit einem Voltmeter gemessen, sondern es wird eine Kompensationsschaltung angewendet, indem über einen Vierpol, der entsprechend der Resultatgrösse verstellt wird, die Ausgangsspannung des eigentlichen Rechennetzwerkes zu 0 kompensiert wird. Die Fig. 25 und 26 zeigen Ansichten des gesamten Rechengerätes.

Der Stereomat ist ein Beispiel für ein elektrisches Rechengerät zur Lösung eines Systems von 4 algebraischen Gleichungen. Das Instrument wurde speziell für diesen Zweck gebaut und erfüllt daher nur diese bestimmte Aufgabe. Prinzipiell ist es jedoch möglich, elektrische Vierpole in der mannigfaltigsten Kombination miteinander zu verbinden, und es bereitet bedeutend weniger Schwierigkeiten, mit Hilfe elektrischer Vierpole beliebige Gleichungen nachzubilden, als dies bei mechanischen Geräten der Fall ist. Um auch die Lösung von Differential- und Integralgleichungen mit elektrischen Netzwerken zu bewältigen, muss allerdings noch ein elektrischer Differentiator oder Integrator bekannt sein. Elektrische Vierpole mit differenzierendem oder integrierendem Charakter lassen sich realisieren, jedoch nur mit einer gewissen Approximation. Die einfachste Ausführung eines Integrators ist beispielsweise in Fig. 27 dargestellt. Da der innere Widerstand der speisenden Röhre nur angenähert unendlich ist und die Belastung des Integrationskondensators ebenfalls nicht beliebig hochohmig gemacht werden kann, so leuchtet es ein, dass dieser Integrator nicht für beliebig langsam verlaufende Vorgänge Verwendung finden kann. Oder, anders ausgedrückt, die Integration ist nur in einem gewissen Frequenzbereich annähernd korrekt.

Eine Schaltung zur Differentiation kann ebenfalls mit Hilfe eines Kondensators ausgeführt werden, wie Fig. 28 zeigt, auch diese Schaltung ist nur in einem beschränkten Frequenzbereich brauchbar. Die Beschränkung des Frequenzbereiches wirkt jedoch bei der Untersuchung der meisten Probleme nicht störend, da es durch Transformationen der freien Variabeln auf einen günstigen Zeitmaßstab immer möglich ist, die Vorgänge mit derjenigen Geschwindigkeit ablaufen zu lassen, die dem Netzwerk angepasst ist. Die bisher gezeigten elektrischen Schaltungen zur Differentiation und Integration haben jedoch den grossen einschränkenden Nachteil, dass als freie Variable die Zeit auftritt. Wir haben daher zunächst nicht die Möglichkeit, mit einem universellen Integrator, der die Gleichung

$$W = \int U dV$$

bildet, zu arbeiten, sondern mit dem speziellen Integrator

$$W = \int U dt$$

zu rechnen. Dadurch wird die Gruppe der zu lösenden Differential- oder Integralgleichungen beschränkt auf solche linearer Art.

Insbesondere beim Studium von Servo- und Reglerproblemen stösst man im allgemeinen auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, die zwar der mathematischen Auswertung zugänglich sind, jedoch einen grossen Zeitaufwand für die Ermittlung der verschiedenen Lösungen benötigen. Von der Contraves AG. wurde speziell zur Untersuchung von Problemen der Servotechnik ein einfaches elektrisches Rechengerät entwickelt, das gestattet, für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung die Einschwingvorgänge auf dem Schirm einer Braunschen Röhre darzustellen. Da die Entwicklung dieses Gerätes noch nicht beendet ist, können nähere Angaben darüber in diesem Zeitpunkt noch nicht gemacht werden.

Quellennachweis

Zum Studium der amerikanischen Rechenmaschinen standen folgende Veröffentlichungen zur Verfügung:

H. H. Aiken und *G. H. Hopper:* «The automatic sequence controlled calculator», Electrical Engineering Nrn. 9, 10 und 11, 1946.

Dr. *A. W. Burks:* «Super electronic», Electronic Industries, July 1946.

V. Bush und *S. H. Caldwell:* «A new type of Differential analyzer», Journal of the Franklin Institut, Vol. 240, Nr. 4, Oktober 1945.

Die Bilder Fig. 1 bis 5 sind Eigentum der Harvard-University Press und wurden von Herrn Prof *Aiken* für die Reproduktion zur Verfügung gestellt.

Die Bilder Fig. 6 und 7 entstammen dem Artikel von Dr. *A. W. Burks*, ihr Nachdruck wurde von Caldwell-Clements Inc. bewilligt.

Die Bilder Fig. 8 bis 17 wurden dem Artikel von *V. Bush* und *S. H. Caldwell* mit Bewilligung der Verfasser entnommen.

Die Bilder Fig. 18 bis 28 wurden von der Firma Contraves AG., Zürich, zur Verfügung gestellt.