

Zeitschrift:	Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries
Herausgeber:	Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker
Band:	47 (1947)
Artikel:	Die Erfahrungs nachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten
Autor:	Burnens, E.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-966851

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten

Von *Ed. Burnens*, Bern

§ 1

Einleitung

Wir betrachten eine mit der Zeit veränderliche Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses, das wir als «günstig» voraussetzen. Das Wort «günstig» bedeute in diesem Zusammenhang im allgemeinsten Sinne die Nützlichkeit des Ereignisses für eine Person oder Personen-gesamtheit. Während also das günstige Ereignis den betreffenden Personen einen Vorteil bringt oder zumindest die Verhinderung eines Nachteiles bedeutet, verursacht ihnen das ungünstige Gegenereignis einen Schaden, eine Nutzeneinbusse. Die Veränderlichkeit der betrachteten Wahrscheinlichkeit sei eine Folge der «*Erfahrungsnachwirkung*». Wir wollen darunter folgendes verstehen:

Wenn das ungünstige Ereignis tatsächlich eintritt, wird die damit verbundene Erfahrung die Betroffenen veranlassen, seine Ursachen zu bekämpfen und möglichst auszuschalten, um einer Wiederholung entgegenzuwirken. In dieser Reaktion besteht im wesentlichen die Nachwirkung der gemachten Erfahrung; sie kann außerdem noch in der Förderung der Ursachen des günstigen Ereignisses bestehen. Wenn sich nun im Laufe der Zeit nach Massgabe d̄er ihnen jeweils zukommen-den Wahrscheinlichkeiten die Gegenereignisse einstellen, werden die dadurch veranlassten Massnahmen eine Zunahme der eingangs betrachteten Wahrscheinlichkeit für das günstige Ereignis bewirken.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, das *mathematische Gesetz* dieser Zunahme zu ermitteln. Obwohl wir uns damit eine rein theore-tische Aufgabe gestellt haben, ist es gewiss von Nutzen, sich das Prinzip der Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten an einigen konkreten Beispielen zu veranschaulichen. Dieses Prinzip

wurde bereits von *H. Hadwiger* [1] *) aufgestellt und nach der diskontinuierlichen Methode behandelt. Wir zitieren zunächst ein Modell aus dieser Arbeit:

Ein Arbeiter sei an einer Maschine beschäftigt und verrichte pro Zeiteinheit eine Manipulation. Als günstiges Ereignis betrachten wir jede zulässige Manipulation, als ungünstig die Fehlmanipulationen, welche einen Betriebsunfall verursachen. Die Erfahrungsnachwirkung besteht darin, dass sich der Arbeiter diejenigen Manipulationen merkt, die zu einem Unfall führten, oder dass ihre Wiederholung durch bestimmte Massnahmen verunmöglicht wird.

Überhaupt eignen sich sehr viele Beispiele von *Unfallverhütung* zur Illustration der Erfahrungsnachwirkung. Je mehr sich die Unfälle in einem menschlichen Tätigkeitsgebiet häufen, desto zahlreicher und wirkungsvoller sind auch die Gegenmassnahmen, zu denen sie Anlass geben (Schutzworrichtungen an Maschinen, bessere Verkehrsregelung, Ersetzen gefährlicher Rohstoffe — wie z. B. des weissen Phosphors in der Zündholzfabrikation — durch harmlosere, usw.).

Auch gewisse *Erkrankungswahrscheinlichkeiten* scheinen der Erfahrungsnachwirkung unterworfen zu sein. Auftretende Krankheitsfälle bilden — und dies ganz besonders bei Epidemien — einen Ansporn zur medizinischen Forschung. Die daraus hervorgehenden neuen und besseren Medikamente, chirurgischen Methoden, hygienischen Massnahmen, zweckmässigeren Ernährungsmethoden usw. bewirken eine gewisse Reduktion der Erkrankungs- und Infektionswahrscheinlichkeiten.

Als letztes Beispiel erwähnen wir die *Überlebenswahrscheinlichkeiten* in unseren Volkssterbetafeln. Es ist eine bekannte Tatsache, dass diese Wahrscheinlichkeiten im Laufe der geschichtlichen Zeit fortwährend zunehmen (wenigstens trifft dies für Länder zu, die wie die Schweiz seit längerer Zeit vom Kriege verschont blieben). Todesursachen sind entweder Altersschwäche, Krankheiten oder solche gewaltsamer Natur, wie Unfälle, Krieg, Mord, Selbstmord. Wenn wir vom Kriegsgeschehen absehen, so ist in den meisten Fällen mit der Wirksamkeit unseres Prinzips der Erfahrungsnachwirkung zu rechnen. In diesem Zusammenhang möchten wir den Umstand hervorheben, dass die von uns hergeleiteten Wahrscheinlichkeitsformeln unter gewissen Voraussetzungen in erster Näherung eine *logistische Funktion*

*) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

ergeben. Die logistische Funktion wurde bereits wiederholt zur Darstellung der Überlebenswahrscheinlichkeiten (bzw. der Sterbewahrscheinlichkeiten) in ihrer funktionellen Abhängigkeit von der geschichtlichen Zeit herangezogen (Vergleiche z. B. *W. P. Schuler* [2], *E. Zwinggi* [3], *J. Talacko* [4], [5], *P. Glur* [6]!). Unseres Wissens geschah in diesen Fällen die Wahl des logistischen Ansatzes stets aus praktischen Gründen, wegen seiner empirischen Eignung für diesen Zweck und ohne apriorische Motivierung.

§ 2

Kontinuierliche Behandlung des Problems

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des günstigen Ereignisses, welche im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht, bezeichnen wir mit

$$p(t) = \frac{A(t)}{A(t) + B(t)}. \quad (1)$$

Dabei bezeichne $A(t)$ das Mass der günstigen Fälle, $B(t)$ das Mass der ungünstigen Fälle im Zeitpunkt t . Je häufiger sich das Gegenereignis realisiert, desto stärker werden auch die Reaktionen und Gegenmassnahmen der betroffenen Personen sein. Die Erfahrungsnachwirkung wird sich daher — dies ist ihrem Wesen inhärent — in jedem Zeitpunkt proportional zur Wahrscheinlichkeit $1 - p(t)$ für das Eintreffen des ungünstigen Ereignisses verhalten. Im Hinblick darauf und falls wir noch die Total-Ereignisdichte als konstant voraussetzen, erscheint uns folgende Ansatzbildung naheliegend:

$$\left. \begin{aligned} A(t) &= A(0) + a \int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi \\ B(t) &= B(0) - b \int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$(a \geq 0, b > 0).$$

Die Zunahme der Masszahl $A(t)$ und die Reduktion von $B(t)$ seien also proportional zum Erwartungswert der Anzahl Gegenereignisse

im Zeitintervall 0 bis t . a und b sind dem betreffenden Nachwirkungsprozess zugeordnete Konstanten. Unter Berücksichtigung von (2) erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit (1)

$$p(t) = \frac{A(0) + a \int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi}{A(0) + B(0) + (a - b) \int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$A(0) = A \quad \text{und} \quad B(0) = B, \quad (3)$$

so gewinnen wir daraus

$$\int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi = \frac{A - (A + B)p(t)}{(a - b)p(t) - a}$$

und durch Differentiation

$$\frac{p'(t)}{[(a - b)p(t) - a]^2 [1 - p(t)]} = \frac{1}{Ab + aB}.$$

Integrieren wir diese Differentialgleichung mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{[(a - b)p(t) - a]^2 [1 - p(t)]} = \frac{a - b}{b^2 [(a - b)p(t) - a]} + \frac{b - a}{b [(a - b)p(t) - a]^2} + \frac{1}{b^2 [1 - p(t)]},$$

so erhalten wir für $p(t)$ die Bestimmungsgleichung

$$\frac{(a - b)p(t) - a}{p(t) - 1} e^{\frac{b}{(a - b)p(t) - a}} = c e^{\frac{tb^2}{Ab + aB}},$$

$$c = \frac{Ab + aB}{B} e^{-b \frac{A+B}{Ab+aB}}.$$

Mit Hilfe der Substitutionen

$$z = \frac{b}{a - (a - b)p(t)} - 1$$

$$p(t) = \frac{az + (a - b)}{(a - b)(z + 1)} \quad (4)$$

$$w = -\frac{B(a - b)}{Ab + aB} e^{-\frac{tb^2 + B(a - b)}{Ab + aB}} \quad (5)$$

gewinnen wir folgende transzendente Beziehung zwischen den Grössen z und w :

$$w = ze^z. \quad (6)$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, einen expliziten Ausdruck für z herzuleiten. Diese Inversion lässt sich auf Grund der *Bürmann-Lagrangeschen* Reihe vollziehen (vgl. *Hurwitz-Courant* [7]). Wir beschreiten hier einen andern Weg, welcher schon von *G. Bol* [9] eingeschlagen wurde. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie (*Hurwitz-Courant* [8]) existiert in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes $w = 0$ eine regulär-analytische und für $w = 0$ verschwindende Umkehrfunktion $z = z(w)$. Sie gestattet die Potenzreihenentwicklung

$$z = \sum_{r=1}^{\infty} c_r w^r \quad (7)$$

mit den Koeffizienten

$$c_r = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z dw}{w^{r+1}} \quad (8)$$

gemäss der Integralformel von *Cauchy*. Die Integration erfolge über einen nicht zu grossen, den Punkt $w = 0$ umschliessenden Kreis. Durch die Substitution (6) führen wir in (8) z als neue Integrationsvariable ein. Der neue Integrationsweg, das Bild des soeben erwähnten Kreises in der z -Ebene, ist eine kleine, den Punkt $z = 0$ einfach umschliessende Kurve. Nach einer weiteren Umformung erhalten wir

$$c_r = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-rz} \left[\frac{1}{z^{r-1}} + \frac{1}{z^r} \right] dz.$$

Jedes der beiden sich daraus ergebenden Integrale lässt sich wiederum als *Cauchysche* Integralformel interpretieren.

Es ist nämlich

$$c_r = \frac{(-\nu)^{r-2}}{(\nu-2)!} + \frac{(-\nu)^{r-1}}{(\nu-1)!} = (-1)^{r-1} \frac{\nu^{r-1}}{\nu!}.$$

Durch Einsetzen in (7) gewinnt man die Potenzreihenentwicklung der gesuchten Umkehrfunktion

$$z = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\nu^{r-1}}{\nu!} w^r. \quad (9)$$

Der Konvergenzradius R ergibt sich unter Berücksichtigung der Stirlingschen Beziehung

$$\nu! = \sqrt{2\pi\nu} \nu^{\nu} e^{-\nu + \frac{\theta}{12\nu}} \quad (0 < \theta < 1)$$

aus der Cauchy-Hadamardschen Formel

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{\frac{\nu^{r-1}}{\nu!}} = e, \\ R &= \frac{1}{e}. \end{aligned} \quad (10)$$

Aus (4), (5) und (9) erhalten wir nun folgenden Ausdruck für die betrachtete Wahrscheinlichkeit:

$$p(t) = \frac{1 - a \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[(a-b)\nu]^{r-1}}{\nu!} \left(\frac{B}{Ab+aB} \right)^r e^{-\nu + \frac{tb^2+B(a-b)}{Ab+aB}}}{1 - (a-b) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{[(a-b)\nu]^{r-1}}{\nu!} \left(\frac{B}{Ab+aB} \right)^r e^{-\nu + \frac{tb^2+B(a-b)}{Ab+aB}}} \quad (11)$$

Es gilt offenbar $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 1$.

Die Potenzreihen in (11) konvergieren gemäss (10) für

$$\begin{aligned} \frac{B|a-b|}{Ab+aB} e^{-\frac{tb^2+B(a-b)}{Ab+aB}} &< \frac{1}{e}, \\ t > \frac{Ab+aB}{b^2} \log \frac{B|a-b|}{Ab+aB} e^{\frac{b(A+B)}{Ab+aB}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Unter den Formeln, welche sich durch Spezialisierung aus (11) gewinnen lassen, möchten wir besonders zwei hervorheben, welche nach unserer Auffassung trotz ihrer einfachen Struktur den Charakter der Erfahrungsnachwirkung in typischer Weise auszudrücken vermögen. Diese beiden Fälle lassen sich auch durch ein einfaches Urnenschema beschreiben, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden.

Fall I: Die Masszahl $A(t)$ der günstigen Fälle bleibe konstant:

$$A(t) = A(0) = A \quad a = 0. \quad (13)$$

Dieser Spezialfall scheint uns dem Wesen der Erfahrungsnachwirkung, wie sie im allgemeinen auftritt, ganz besonders zu entsprechen. Wir bezeichnen ihn deshalb als «*Erfahrungsnachwirkung im eigentlichen* (engeren) *Sinn*». Bei der diskontinuierlichen Behandlung der Erfahrungsnachwirkung wird er unsere Hauptaufmerksamkeit in Anspruch nehmen. Es ist dies auch der von *H. Hadwiger* in dem bereits zitierten Artikel [1] untersuchte Spezialfall. Das dort erreichte Resultat

$$p(t) = \frac{1}{1 + \sum_1^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{\omega^{v-1} \omega^v}{v!} e^{v\omega(1-\lambda t)}} \quad (14)$$

und die zugehörige Konvergenzbedingung

$$t > \frac{1}{\omega \lambda} \log [\omega e^{\omega+1}]$$

folgen aus den Formeln (11) und (12), falls man darin noch

$$b = \lambda B \quad \text{und} \quad \frac{B}{A} = \omega \quad \text{setzt.}$$

Fall II: Es sei $a = b$, d. h.: die Summe der Masszahlen

$$A(t) + B(t) = A + B = \text{konstant.}$$

Aus (11) erhalten wir rein formal

$$p(t) = 1 - \left(\frac{B}{A + B} \right) e^{-\frac{ta}{A+B}}, \quad (15)$$

ein Resultat, welches leicht direkt aus

$$p(t) = \frac{A + a \int_0^t [1 - p(\xi)] d\xi}{A + B}$$

berechnet werden kann. Die Konvergenzbedingung (12) fällt in diesem Spezialfall dahin.

§ 3

Diskontinuierliche Behandlung des Problems

Zur diskontinuierlich-mathematischen Erfassung des Prinzips der Erfahrungsnachwirkung bedienen wir uns der klassischen Methode des Urnenschemas. Die Schwierigkeiten sind hier erheblicher als bei der kontinuierlichen Methode, die Resultate komplizierter gestaltet. Wir werden uns deshalb auf den Fall der Erfahrungsnachwirkung im eigentlichen Sinn sowie auf den 2. Spezialfall des vorigen Paragraphen beschränken. Es darf nicht ausser acht gelassen werden, dass ein Urnenschema, soll es auch brauchbar sein, folgenden Bedingungen zu genügen hat: Erstens muss es den wirklichen Vorgängen, zu deren Schematisierung es dient, wenigstens in den Hauptzügen ihrer Struktur gut entsprechen, das innere Wesen dieser realen Begebenheiten in typischer Weise charakterisieren. Zweitens muss es aber auch einfach sein und nicht auf allzu umfangreiche und umständliche Formeln führen.

Bevor wir uns der oben formulierten Aufgabe zuwenden, möchten wir daran erinnern, dass das Prinzip der Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Problemkreis der verketteten stochastischen Ereignisse gehört. Man spricht hier gewöhnlich von *verketteten Wahrscheinlichkeiten* oder *Markoffschen Ketten*. Die letzten Jahrzehnte brachten ein ausserordentlich reiches Schrifttum über dieses Spezialgebiet (vgl. *J. Hadamard* und *M. Fréchet* [10], [11]), besonders auch mit Rücksicht auf die physikalischen Anwendungen. *B. Hostinsky* zeigte in einem kurzen Aufsatz in den Berichten der Pariser Akademie der Wissenschaften [12] (ausführlichere Darlegung in [13]), dass die allgemeine Theorie der verketteten Wahrscheinlichkeiten beim Studium verschiedener Urnen-

schemas verwendet werden kann. Wir jedoch wollen unsere Untersuchungen ohne Heranziehen dieser allgemeinen Theorie durchführen. Beim Studium der abhängigen Ereignisse sind ausserordentlich viele Strukturen von Abhängigkeit denkbar und zu berücksichtigen; die Theorien über verkettete Wahrscheinlichkeiten bewegen sich deshalb meistens in sehr weiten Grenzen, sind höchst allgemein gehalten, und von ihrer Herbeiziehung zur Behandlung des Spezialfalles der Erfahrungsnachwirkung wäre unseres Erachtens kein besonderer Vorteil zu erwarten.

* * *

Der Fall der Erfahrungsnachwirkung im eigentlichen Sinn lässt sich durch folgendes Schema charakterisieren:

Urnenschema I: Eine Urne enthalte w weisse und s schwarze Kugeln. Es wird eine nicht abbrechende Folge von Ziehungen vorgenommen, wobei jede gezogene weisse Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird, nicht aber die gezogenen schwarzen Kugeln.

Mit der Zeit wird sich die Zahl der schwarzen Kugeln (das Ziehen einer schwarzen Kugel entspricht dem Eintreffen des ungünstigen Ereignisses) gemäss dem Prinzip der Erfahrungsnachwirkung verringern und damit auch die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Die Tatsache, dass wir beim Ziehen einer schwarzen Kugel nicht Δ schwarze, sondern nur diese eine aus der Urne entfernen, bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Im ersten Fall mit $\Delta > 1$ ist der Verlauf der zu betrachtenden Wahrscheinlichkeit derselbe, wie wenn wir stets nur eine Kugel herausnehmen und dafür einen

Anfangsbestand von $\frac{w}{\Delta}$ weissen und $\frac{s}{\Delta}$ schwarzen Kugeln wählen.

Es bezeichne

- q_n die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel bei der n -ten Ziehung ($n \geq 1$),
- $q_{n,x}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach der n -ten Ziehung noch genau x schwarze Kugeln in der Urne vorhanden sind

$$(n \geq 0, x \geq 0, s - n \leq x \leq s).$$

Das Additions- und Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung liefern unmittelbar

$$q_{n+1, x} = \frac{x+1}{w+x+1} q_{n, x+1} + \frac{w}{w+x} q_{n, x}, \quad (16)$$

$$q_n = \frac{s}{w+s} q_{n-1, s} + \frac{s-1}{w+s-1} q_{n-1, s-1} + \dots,$$

$$q_n = \sum_{v=0}^{\omega} \frac{s-v}{w+s-v} q_{n-1, s-v}, \quad (17)$$

$$\omega = \begin{cases} n-1 & (n \leq s+1) \\ s & (n \geq s+1). \end{cases}$$

Im ersten Fall ist die Summation nur bis $v = n - 1$ zu erstrecken; denn

$q_{n-1, s-v} = 0$ für $v > n - 1$ (es können nicht mehr schwarze Kugeln herausgenommen worden sein als Ziehungen durchgeführt wurden). Durch wiederholte Anwendung von (16) erhält man nach m Schritten

$$q_{n, x} = \sum_{k=0}^m q_{n-m, x+m-k} \left[\prod_{i=1}^{m-k} \frac{x+i}{w+x+i} \right] \sum_{\lambda_1=0}^{m-k} \sum_{\lambda_2=0}^{m-k-\lambda_1} \dots \sum_{\lambda_k=0}^{m-k-(\lambda_1+\dots+\lambda_{k-1})} \frac{w}{w+x+\lambda_1} \frac{w}{w+x+\lambda_1+\lambda_2} \dots \frac{w}{w+x+\lambda_1+\dots+\lambda_k}$$

mit der Konvention $\prod_1^0 = 1$.

Wählen wir $m = n$, so lautet diese Beziehung in symbolischer Schreibweise

$$q_{n, x} = \sum_{k=0}^n q_{0, x+n-k} \left[\prod_{i=1}^{n-k} \frac{x+i}{w+x+i} \right] \prod_{\mu=1}^k \left[\sum_{\lambda_\mu=0}^{n-k-(\lambda_1+\dots+\lambda_{\mu-1})} \frac{w}{w+x+\lambda_1+\dots+\lambda_\mu} \right].$$

Unter Berücksichtigung von

$$q_{0, x+n-k} = \begin{cases} 1 & (k = x + n - s) \\ 0 & (k \neq x + n - s) \end{cases}$$

erhalten wir daraus, falls wir noch n durch $n - 1$ und $x = s - v$ ersetzen,

$$q_{n-1, s-v} = \left[\prod_{i=1}^r \frac{s-v+i}{w+s-v+i} \right] \prod_{\mu=1}^{n-1-r} \left[\sum_{\lambda_\mu=0}^{r-(\lambda_1+\dots+\lambda_{\mu-1})} \frac{w}{w+s-v+\lambda_1+\dots+\lambda_\mu} \right] \quad (0 \leq r \leq n-1).$$

Dabei ist

$$\prod_{i=1}^r \frac{s-\nu+i}{w+s-\nu+i} = \frac{(w+s-\nu)! s!}{(w+s)! (s-\nu)!}.$$

Die beiden letzten Ausdrücke liefern nun in Verbindung mit (17) die gesuchte Formel

$$q_n = \frac{s!}{(w+s)!} \sum_{r=0}^{\omega} \frac{(s-\nu)(w+s-\nu-1)!}{(s-\nu)!} \prod_{\mu=1}^{n-1-\nu} \left[\sum_{\lambda_\mu=0}^{r-(\lambda_1+\dots+\lambda_{\mu-1})} \frac{w}{w+s-\nu+\lambda_1+\dots+\lambda_\mu} \right] \quad (18)$$

$$\omega = \begin{cases} n-1 & (n \leq s+1) \\ s & (n \geq s+1) \end{cases} \prod_1^0 = 1.$$

Dieses Resultat entspricht unserer zu Beginn des Paragraphen gestellten Forderung nach einer nicht allzu komplizierten Struktur in keiner Weise. Es kann wohl kaum zur Berechnung der q_n -Werte herangezogen werden, falls es sich nicht gerade um die ersten Wahrscheinlichkeiten der Folge handelt. Insbesondere eignet sich die Formel (18) auch nicht zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von q_n für $n \rightarrow \infty$.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, eine *Näherungsformel* herzuleiten, welche unseren Forderungen besser entspricht. Es bezeichne E_n den Erwartungswert der nach dem n -ten Zug noch in der Urne vorhandenen (weissen und schwarzen) Kugeln. Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} E_0 &= w + s \\ E_n &= w + s - (q_1 + q_2 + \dots + q_n). \end{aligned} \quad (19)$$

Eine plausible Näherung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$q_{n+1} \sim 1 - \frac{w}{E_n}. \quad (20)$$

(19) und (20) führen auf die Rekursion

$$E_{n+1} = E_n + \frac{w}{E_n} - 1. \quad (21)$$

Diese Rekursion entspricht einem Iterationsprozess bezüglich der rationalen Funktion

$$f(z) = z + \frac{w}{z} - 1, \quad (22)$$

da ja geschrieben werden kann:

$$f_n(z) = f(f_{n-1}(z)), \quad f_1(z) = f(z)$$

und ferner

$$E_n = f_n(E_0).$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$z = z_0, \quad f(z_0) = z_1, \quad f(z_1) = z_2, \quad \dots$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{w}{z_n} - 1.$$

Die Funktion (22) hat als einzigen und anziehenden Fixpunkt den Punkt $z = w$. Es sei $w \geq 1$.

Wir beweisen nun folgende *Behauptungen*:

1. Die Folge der z_n ($n = 0, 1, \dots$) divergiert für $z \leq 0$.
2. Für $z > 0$ konvergiert die Folge gegen w .

Der *Beweis* der ersten Behauptung ist trivial (für $z < 0$ ist $f(z) < z - 1$); zum Beweis von 2. treffen wir folgende Fallunterscheidung:

- a) Ist ein $z_n > w \geq 1$, so erfolgt wegen

$$z_{n+1} - w = (z_n - w) \left(1 - \frac{1}{z_n} \right)$$

$$w < z_{n+1} < z_n.$$

Die Folge der z_n ist monoton abnehmend und beschränkt, hat also sicher einen Grenzwert. Der Grenzwert einer konvergenten Iterationskette ist stets ein Fixpunkt, vorausgesetzt, dass dieser regulär ist. In unserem Fall kommt als Grenzwert nur der (einige) Fixpunkt $z = w$ in Frage, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$.

b) Ist ein $z_n < w$, so gilt wegen

$$z_{n+1} - z_n = \frac{w}{z_n} - 1 > 0$$

$$z_{n+1} > z_n.$$

Bei wachsendem n nehmen auch die z_n zu. Springt dabei einmal ein Glied der Folge über w hinaus, so befinden wir uns nachher im Fall a). Ist aber

$$z_n < w \text{ für alle } n = 0, 1, 2, \dots,$$

so muss die Folge aus denselben Gründen wie bei a) gegen $z = w$ konvergieren.

Damit ist die Konvergenz der E_n gegen w sichergestellt.

Zur Lösung der (nicht linearen) Differenzengleichung (21) verwendet man zweckmässigerweise folgenden weiteren Näherungsansatz:

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{1} \sim \frac{dE_n}{dn}. \quad (23)$$

Diese Approximation führt uns auf die separierbare Differentialgleichung

$$\frac{dE_n^*}{dn} = \frac{w}{E_n^*} - 1 \quad (24)$$

$$E_n^* \sim E_n. \quad (25)$$

$$\int \frac{E_n^* dE_n^*}{E_n^* - w} = E_n^* + w \log(E_n^* - w) = K - n,$$

wo K die Integrationskonstante bezeichnet.

$$(E_n^* - w) e^{\frac{K}{w}} = e^{\frac{K}{w}} \cdot e^{-\frac{n}{w}}.$$

Zur Ermittlung von $e^{\frac{K}{w}}$ setzen wir $n = 0$. Unsere Bestimmungsgleichung für E_n^* lautet jetzt

$$(E_n^* - w) e^{\frac{K}{w}} = s e^{\frac{s+w-n}{w}}. \quad (26)$$

Wir ersehen daraus, dass

$$E_n^* > w. \quad (27)$$

Aus (24) folgt dann ferner

$$\begin{aligned} \frac{dE_n^*}{dn} &< 0, \\ E_{n+1}^* &< E_n^*, \end{aligned} \quad (28)$$

was der Urneninterpretation entspricht.

Um aus (26) eine explizite Darstellung von E_n^* zu gewinnen, setzen wir zunächst

$$E_n^* = w(1 + z), \quad (29)$$

$$x = \frac{s}{w} e^{\frac{s-n}{w}}. \quad (30)$$

Dadurch reduziert sich die Formel (26) auf

$$ze^z = x. \quad (31)$$

Wir stossen hier auf dieselbe Bestimmungsgleichung für z wie unter (6). Die Lösung der Inversionsaufgabe lautet gemäss (9) und (10)

$$z = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\frac{v^{r-1}}{v!}}{x^r} \quad (32)$$

mit dem Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{e}. \quad (33)$$

Falls wir den Ausdruck (30) in (32) und das Resultat in (29) einsetzen, erhalten wir mit Rücksicht auf (25)

$$E_n \sim w \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\frac{v^{r-1}}{v!}}{x^r} \left(\frac{s}{w} \right)^r e^{\frac{s-n}{w}} \right] \quad (34)$$

und wegen (20) auch

$$q_n \sim 1 - \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\frac{v^{r-1}}{v!}}{x^r} \left(\frac{s}{w} \right)^r e^{\frac{s-n}{w}}} \quad (35)$$

Aus (34) und (35) ersieht man unmittelbar, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \sim w, \quad (36)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \sim 0. \quad (37)$$

Gemäss (33) konvergiert die Reihe im Ausdruck (35) für

$$\frac{s}{w} e^{\frac{s-n+1}{w}} < \frac{1}{e},$$

$$n > 1 + w \log \left(\frac{s}{w} e^{\frac{s+w}{w}} \right) = s + w + 1 + w \log \frac{s}{w}. \quad (38)$$

Sie konvergiert für alle $n \geq 1$, falls

$$\frac{s}{w} e^{\frac{s}{w}} < \frac{1}{e}$$

oder (man vergleiche (6) und (9)!):

$$\frac{s}{w} < \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\nu^{r-1}}{r!} e^{-r} = 0,278464\dots. \quad (39)$$

Es ist bemerkenswert, dass Formel (35) dieselbe Struktur aufweist wie der Ausdruck (14) für $p(t)$ bei der kontinuierlichen Methode. Durch die naheliegenden Setzungen

$$A = w, \quad B = s, \quad t = n - 1, \quad b = 1,$$

$$p(n) = 1 - q(n)$$

geht (14) über in (35). Es ist also

$$q_n \sim q(n-1), \quad (40)$$

und es entsprechen sich natürlich auch die beiden Konvergenzbedingungen, wie man leicht verifizieren kann. Die Formel (35) ist somit nicht nur die approximative Lösung des Problems (19) und (20), sondern zugleich auch die exakte Lösung des Problems

$$q_n = \frac{B(n-1)}{w + B(n-1)},$$

$$B(n) = s - \int_0^n q_{r+1} d\nu$$

(vergleiche (1), (2) und (13)!). Diese enge Wechselbeziehung zwischen kontinuierlicher und diskontinuierlicher Methode legt die Vermutung nahe, dass die Formel (35) recht brauchbare Werte liefert. Umgekehrt würde, falls sich (35) als gute Näherung herausstellt, die kontinuierliche Behandlung des Problems dadurch sozusagen «legitimiert»; denn das Prinzip der Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten ist seiner Natur nach diskontinuierlich und die Darstellung mit Hilfe eines Urnenschemas deshalb wohl seinem Wesen adäquater als die kontinuierliche Methode.

Die folgende Tabelle gibt uns einen Vergleich zwischen einigen q_n -Werten der Formel (35) mit den entsprechenden exakten Werten gemäss (18). Es wurde darin $s = 100$ und $w = 1000$ angenommen.

n	q_n nach (18)	q_n nach (35)	Appr. I	Appr. II
1	0,09090909	0,09090909	0,0995	0,08950
2	0,09083389	0,09083398	0,0994	0,08943
3	0,09075874	0,09075892	0,0993	0,08936
4	0,09068364	0,09068392	0,0993	0,08929
5	0,09060859	0,09060896	0,0992	0,08922
6	0,09053359	0,09053405	0,0991	0,08915
7	0,09045864	0,09045920	0,0990	0,08908
100		0,08371224	0,0910	0,08264
1000		0,03766174	0,0391	0,03757

Man gewinnt die Approximation I, indem man in (35) die Reihenentwicklung nach dem 1. Gliede abbricht. Hierbei entsteht eine *logistische Funktion*, auf welche wir bereits in der Einleitung hingewiesen haben. In der Approximation II wurden zwei Reihenglieder berücksichtigt. Diese beiden Näherungen des Ausdrucks (35) werden mit zunehmendem n langsam besser.

In nebenstehender Tabelle liefert die Formel (35) q_n -Werte, welche bis auf 6 Dezimalen mit den exakten übereinstimmen (bei Auf- bzw. Abrundung). Allgemein lässt sich zeigen, dass die erste zur Gewinnung von (35) verwendete Approximation (20) die q_n -Werte vergrössert, während die zweite Approximation (23) umgekehrt eine Verkleinerung bewirkt.

* * *

Der zweite in der kontinuierlichen Betrachtung angeführte Spezialfall findet sein diskontinuierliches Analogon im

Urnenschema II: Eine Urne enthalte w weisse und s schwarze Kugeln. Es wird eine nicht abbrechende Folge von Ziehungen vorgenommen, wobei jede aus der Urne gezogene Kugel durch eine weisse ersetzt wird.

Wir möchten an dieser Stelle auf ein Urnenschema hinweisen, das bereits Gegenstand verschiedener Arbeiten war und eine gewisse Ähnlichkeit mit unserem Modell hat: Aus einer Urne mit w weissen und s schwarzen Kugeln wird eine Folge von Ziehungen vorgenommen (diese Folge ist nicht immer unbeschränkt fortsetzbar), wobei jede gezogene weisse Kugel durch $1 + \Delta$ weisse, jede gezogene schwarze durch $1 + \Delta'$ schwarze Kugeln ersetzt wird. In dieser allgemeinen Form wurde das Schema von *A. Rosenblatt* [14] behandelt, im Spezialfall $\Delta = \Delta'$ von *G. Pólya* und *F. Eggenberger* [15], [16] unter dem Namen «Urnenschema der Chancevermehrung durch Erfolg». Die Verallgemeinerung des Pólya-Modells auf m Farben wurde von *Ch. Jordan* [17] vorgenommen.

In unserem Problem bezeichne wieder

q_n die Wahrscheinlichkeit, bei der n -ten Ziehung schwarz zu ziehen ($n \geq 1$),

$q_{n,x}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach der n -ten Ziehung noch genau x schwarze Kugeln in der Urne vorhanden sind

$$(n \geq 0, x \geq 0, s - n \leq x \leq s),$$

S_n den Erwartungswert der Anzahl nach der n -ten Ziehung in der Urne vorhandener schwarzer Kugeln.

$$S_0 = s$$

$$S_n = s - (q_1 + q_2 + \dots + q_n). \quad (41)$$

Wir wenden uns hier zunächst der Aufgabe zu, eine geeignete Näherungsformel für q_n herzuleiten. Dazu dient uns die plausible Annahme

$$q_n \sim \frac{S_{n-1}}{w+s}. \quad (42)$$

(41) und (42) ergeben die Rekursion

$$\begin{aligned} S_n &\sim S_{n-1} - \frac{S_{n-1}}{w+s}, \\ S_n &\sim \frac{w+s-1}{w+s} S_{n-1}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$S_n \sim s \left(\frac{w+s-1}{w+s} \right)^n \quad (43)$$

und wegen (42) auch

$$q_n \sim \frac{s}{w+s} \left(\frac{w+s-1}{w+s} \right)^{n-1}. \quad (44)$$

Aus (43) und (44) erhält man noch die Beziehungen

$$S_n > S_{n+1}, \quad (45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \sim 0, \quad (46)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \sim 0, \quad (47)$$

wie es die Urneninterpretation verlangt.

Die exakte Formel kann auf dieselbe Weise hergeleitet werden wie für das Urnenschema I. Der Rekursion (16) entspricht hier

$$q_{n+1, x} = \frac{x+1}{w+s} q_{n, x+1} + \left(1 - \frac{x}{w+s} \right) q_{n, x}, \quad (48)$$

der Gleichung (17)

$$q_n = \sum_{r=0}^{\omega} \frac{s-r}{w+s} q_{n-1, s-r} \quad (49)$$

$$\omega = \begin{cases} n-1 & (n \leq s+1) \\ s & (n \geq s+1). \end{cases}$$

Das der Formel (18) entsprechende Resultat lautet

$$q_n = \frac{s}{(w+s)^n} \sum_{r=0}^{\omega} \frac{(s-v)(s-1)!}{(s-v)!} \prod_{\mu=1}^{n-1-r} \left[\sum_{\lambda_\mu=0}^{v-(\lambda_1+\dots+\lambda_{\mu-1})} (w+v-\lambda_1-\dots-\lambda_\mu) \right]. \quad (50)$$

Ermittelt man nun aus den Formeln (44) und (50) die ersten q_n -Werte, so findet man vollkommene Übereinstimmung, und man überzeugt sich bald von der Äquivalenz der beiden Ausdrücke. Es gilt die Beziehung

$$q_n = \frac{s}{w+s} \left(\frac{w+s-1}{w+s} \right)^{n-1}$$

(51)

Die direkte Überführung von (50) in (51) ist äusserst umständlich. Wir beschreiten deshalb einen anderen Weg zum Beweis unserer Behauptung.

Die betrachtete Wahrscheinlichkeit ist von der Form

$$q_n = \frac{s-d}{w+s}.$$

Mit Hilfe des Multiplikations- und Additionstheorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewinnt man die Rekursion

$$q_{n+1} = q_n \frac{s-d-1}{w+s} + (1-q_n) q_n. \quad (52)$$

Falls nämlich im n -ten Zug eine weisse Kugel gezogen wird (die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $1-q_n$), so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel im $(n+1)$ -ten Zug gleich wie im n -ten, also $= q_n$. Wird umgekehrt im n -ten Zug schwarz gezogen und die Zahl der schwarzen Kugeln um eine vermindert, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer solchen im nächsten Zug

$$\frac{s-d-1}{w+s}.$$

Aus (52) gewinnt man

$$q_{n+1} = q_n \frac{w+s-1}{w+s},$$

womit sich (51) leicht induktiv beweisen lässt.

Auch hier lässt sich eine Verwandtschaft zwischen den Resultaten nachweisen, die sich aus der kontinuierlichen und diskontinuierlichen Behandlung des Problems ergeben. Setzen wir nämlich in (15)

$$A = w, B = s, t = n - 1,$$

$$p(n) = 1 - q(n),$$

$$a = (w+s) \log \frac{w+s}{w+s-1},$$

so erhalten wir daraus die Formel (51). Es gilt demnach die Beziehung

$$q_n = q(n-1), \quad (53)$$

und q_n erweist sich auch als Lösung von

$$q_n = \frac{B(n-1)}{w+s},$$

$$B(n) = s - (w+s) \log \frac{w+s}{w+s-1} \int_0^n q_{\nu+1} d\nu.$$

Es folgen einige Werte von q_n für $w = 1000$ und $s = 100$:

n	q_n	n	q_n
1	0,09090909	8	0,09033215
2	0,09082645	9	0,09025003
3	0,09074388	10	0,09016799
4	0,09066138	11	0,09008602
5	0,09057896	12	0,09000412
6	0,09049662	13	0,08992230
7	0,09041435	14	0,08984055

§ 4

**Verallgemeinerung auf den Fall verschiedener
Grundwahrscheinlichkeiten**

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des günstigen Ereignisses sei hier mit $P(t)$ bezeichnet, die Gegenwahrscheinlichkeit mit $Q(t) = 1 - P(t)$.

In unseren bisherigen Ausführungen trafen wir die Annahme, dass die durch die Erfahrungsnachwirkung verursachte Reduktion von $Q(t)$ in einem bestimmten Proportionalitätsverhältnis zur Frequenz des ungünstigen Ereignisses steht, ganz gleichgültig, ob dieses mehrere Ursachen haben, ob es durch verschiedene Umstände herbeigeführt werden kann oder nicht.

Nun betrachten wir den allgemeineren Fall, in welchem verschiedene, sich ausschliessende Umstände das Eintreffen des ungünstigen Ereignisses bewirken können, jeder mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist und die Erfahrungsnachwirkung je nach vorhandener Ursache verschieden ausfällt. Wir setzen ferner voraus, dass stets einer der betrachteten Umstände realisiert ist.

Offenbar ist dieser Tatbestand in unserem Beispiel der Sterbewahrscheinlichkeit weitgehend verwirklicht. Die möglichen Umstände sind hier das Kranksein (es könnten auch verschiedene wichtige Krankheiten ausgeschieden und für sich betrachtet werden; Kranksein infolge Unfall ist auszuschliessen), das Verunfallen (im allgemeinsten Sinn, falls nicht wieder unterteilt wird) und der dritte Umstand, der durch die Negation der beiden ersten charakterisiert wird. Das Eintreffen jedes Umstandes ist mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu erwarten, einer davon ist stets realisiert, und in jedem der drei Fälle besteht eine spezielle Sterbewahrscheinlichkeit.

* * *

Wir wenden uns zuerst wieder der *kontinuierlichen Methode* zu. Es sei r_μ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Umstandes $U_\mu (\mu = 1, 2, \dots, m)$. Der Umstand U_μ soll mit der Wahrscheinlichkeit

$$q_\mu(t) = \frac{B_\mu(t)}{A_\mu(t) + B_\mu(t)}$$

zum Eintreffen des ungünstigen Ereignisses führen, wobei $A_\mu(t)$ das Mass der günstigen, $B_\mu(t)$ das Mass der ungünstigen Fälle im Zeitpunkt t bezeichnen soll. Es gilt nach Definition

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = 1, \quad (54)$$

$$Q(t) = r_1 q_1(t) + \dots + r_m q_m(t). \quad (55)$$

Setzen wir noch

$$A_\mu(t) = A_\mu(0) + a_\mu r_\mu \int_0^t q_\mu(\xi) d\xi,$$

$$B_\mu(t) = B_\mu(0) - b_\mu r_\mu \int_0^t q_\mu(\xi) d\xi,$$

so können wir unser Problem auf den Spezialfall des 2. Paragraphen zurückführen. Jede Wahrscheinlichkeit $q_\mu(t)$ ist durch die Formel (11) resp. (14) oder (15) gegeben, falls wir darin a durch $a_\mu r_\mu$ und b durch $b_\mu r_\mu$ ersetzen.

* * *

Die *diskontinuierliche Fassung* des Problems führt auf denselben Sachverhalt. Wir denken uns hier ein Urnenschema mit m Urnen U_1, U_2, \dots, U_m . Jede Urne U_μ enthalte w_μ weisse und s_μ schwarze Kugeln

$$(\mu = 1, 2, \dots, m).$$

Es wird eine nicht abbrechende Folge von Ziehungen vorgenommen, wobei z. B. im Fall der Erfahrungsnachwirkung im eigentlichen Sinn die gezogenen Kugeln nicht mehr in die betreffende Urne zurückgelegt werden, wenn sie von schwarzer Farbe sind, wohl aber die weissen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Ziehung gerade die Urne U_μ getroffen wird, sei r_μ .

Es bezeichne ferner

$E_\mu(n)$ den Erwartungswert der (weissen und schwarzen) Kugeln in U_μ nach der n -ten Ziehung,

$q_\mu(n)$ die Wahrscheinlichkeit, bei der n -ten Ziehung eine schwarze Kugel aus U_μ zu ziehen, falls man bereits auf diese Urne gestossen ist,

Q_n die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel beim n -ten Zug.

Es gilt nach Definition

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = 1, \quad (56)$$

$$Q_n = r_1 q_1(n) + \dots + r_m q_m(n) \quad (57)$$

und

$$E_\mu(n) = w_\mu + s_\mu - r_\mu [q_\mu(1) + \dots + q_\mu(n)]. \quad (58)$$

Die Approximationen

$$q_\mu(n+1) \sim 1 - \frac{w_\mu}{E_\mu(n)}$$

liefern in Verbindung mit (58) die dem Ausdruck (21) entsprechenden Rekursionen

$$E_\mu(n+1) = E_\mu(n) + \frac{w_\mu r_\mu}{E_\mu(n)} - r_\mu.$$

Hier können wir also nicht ohne weiteres auf die Formel (35) zurückgreifen, da sich die Anfangsdaten nicht nur in den Konstanten unterscheiden. Die ganze Rechnung lässt sich aber ohne Schwierigkeit wie im 3. Paragraphen durchführen und ergibt

$$q_\mu(n) \sim 1 - \frac{1}{1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\nu^{r-1}}{r!} \left(\frac{s_\mu}{w_\mu}\right)^r e^{\frac{r}{w_\mu}(s_\mu - nr_\mu + r_\mu)}}.$$

* * *

Abschliessend möchten wir noch bemerken, dass die in den Paragraphen 2 und 3 hergeleiteten Formeln unter Umständen auch dann verwendbar sind, wenn verschiedene Ursachen das Eintreffen des ungünstigen Ereignisses bewirken können. Die auftretenden Grössen sind dann einfach als Durchschnittswerte zu betrachten. Man wird die komplizierteren Formeln dieses letzten Paragraphen nur heranziehen, falls einer oder einigen Ursachen relativ zu den andern eine besonders grosse Bedeutung zukommt und die mit ihnen verbundene Erfahrungsnachwirkung von auffallender Charakteristik ist.

Literaturverzeichnis

- [1] *H. Hadwiger*: Die Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten. *Experientia*, Vol. I/3 (1945), S. 87.
- [2] *W. P. Schuler*: Ein Verfahren zum Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, Bd. 44 (1944), S. 107.
- [3] *E. Zwinggi*: Versicherungsmathematik. Birkhäuser, Basel (1945), S. 154.
- [4] *J. Talacko*: Dynamická pozorování ve statistice úmrtnosti (Dynamische Beobachtungen in der Statistik der Sterblichkeit). Nákladem ústředního statistického úřadu, Praha (1941).
- [5] *J. Talacko*: Odhadý budoucího vývoje české populace (Die voraussichtliche zukünftige Entwicklung der tschechischen Bevölkerung). *Statistický obzor* (Statistical Review of Czechoslovakia), Jahrg. XXVI (1946), Heft 4, S. 369 bis 409.
- [6] *P. Glur*: Über analytische Ausgleichung der Sterblichkeitsfläche. Lösung der akademischen Preisaufgabe 1944 der Philosophischen Fakultät II der Universität Bern. (Durch das Studium der Bevölkerungssterblichkeit, insbesondere in der Schweiz, ist zu untersuchen, welche Funktionen die Abnahme der Sterblichkeit wiederzugeben vermögen.)
- [7] *A. Hurwitz*: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, ergänzt durch einen Abschnitt über geometrische Funktionentheorie von *R. Courant*. Springer, Berlin (1929), S. 138.
- [8] loco cit., S. 136.
- [9] *G. Bol*: Über eine kombinatorische Frage. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hansischen Universität*, Bd. 12 (1938), S. 242.
- [10] *J. Hadamard et M. Fréchet*: Sur les probabilités discontinues des événements en chaîne. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 13 (1933), S. 92.
- [11] *M. Fréchet*: Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. Second livre du fascicule III, tome I du *Traité du Calcul des probabilités et de ses Applications d'E. Borel*. Gauthier-Villars, Paris (1938).
- [12] *B. Hostinský*: Sur les probabilités en chaîne. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 202 (1936), p. 1000.
- [13] *B. Hostinský*: Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. *Annales de l'institut H. Poincaré*, Bd. 7, S. 94 ff.
- [14] *A. Rosenblatt*: Sur le concept de contagion de M. G. Pólya dans le calcul des probabilités. *Actas Acad. Ci. Lima* 3 (1940), S. 186.
- [15] *G. Pólya und F. Eggenberger*: Über die Statistik verketteter Vorgänge. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 3 (1923), S. 279.
- [16] *F. Eggenberger*: Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Ein Beitrag zur theoretischen Statistik. Dissertation, E. T. H. Zürich, 1924.
- [17] *Ch. Jordan*: Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, tome 184 (1927), p. 315.