Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 47 (1947)

Artikel: De la fonction d'événement d'un ensemble ouvert variable

Autor: Maret, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966850

De la fonction d'événement d'un ensemble ouvert variable

Par *Alfred Maret*, Neuchâtel

I

1° Dans une remarquable publication due à *Tarján* [1] [1]), la fonction d'événement d'un ensemble ouvert variable a été réduite à la connaissance de la fonction de renouvellement de *Moser* [2]. Nous nous proposons de démontrer deux nouvelles relations. La première permet de calculer directement la fonction d'événement d'un ensemble variable à partir d'un ensemble constant. Avec la seconde relation nous poursuivons le même but, mais par l'intermédiaire d'une nouvelle fonction. Nous visons donc en quelque sorte à faire le contraire de ce qu'a fait *Tarján*. Finalement nous ordonnerons en un tout homogène les principales relations concernant le report d'événements d'un ensemble sur un autre.

Nous distinguerons tout d'abord trois types d'ensembles:

a) L'ensemble du *premier type* ou l'«*EF*».
Ainsi nous désignons un *ensemble fermé* (ne se renouvelant pas) et dont nous normons le nombre initial des éléments à «1». L'évolution de cet ensemble est caractérisée par la fonction bien connue $p(t)$.

b) L'ensemble du *deuxième type* ou l'«*EOC*».
C'est l'*ensemble ouvert* (c'est-à-dire se renouvelant) *et constant* dont nous normons également le nombre des éléments à «1».

c) L'ensemble du *troisième type* ou l'«*EOV*».
Ce type représente l'*ensemble ouvert et variable* (non constant). Convenons ici aussi que le nombre des éléments considérés au moment $t = 0$ soit «1».

---

1) Les numéros entre [ ] renvoient à la liste des ouvrages cités.

Les conventions adoptées nous permettent de faire sans autre des comparaisons d'un ensemble à l'un des deux autres et de déduire des relations simples, sans pour cela diminuer la généralité des déductions.

2° Afin de pouvoir effectuer ces comparaisons encore plus simplement et sans devoir employer trop de texte, nous voulons en outre introduire un système de symboles uniformes. A ce sujet nous nous permettons de faire remarquer que la relation que nous avons publiée dans les Actes du dernier Congrès international [3], est le résultat d'une intuition que nous n'aurions pas eue, si nous n'avions pas soumis les symboles employés jusqu'alors dans ce domaine à une critique serrée. Nous sommes persuadés qu'un système de symboles convenablement choisis et ordonnés, bien qu'irrelevants pris isolément, révèle par lui-même des résultats qui sans cela pourraient rester inconnus. Un tel système permet une vue d'ensemble exacte en même temps que rapide sur un domaine, ce qu'une déduction utilisant une notation prise au hasard ne permet pas. Il en résulte aussi une économie de temps pour celui qui veut simplement s'informer ou qui veut comparer rapidement divers travaux. On ne saurait vouer trop de soin à la notation comme telle.

3° Pour les différentes fonctions qui seront utilisées, nous introduisons les symboles suivants en désignant par des lettres minuscules les fonctions de l'EF et par des majuscules les fonctions de l'EO en distinguant par l'indice «*c*» les fonctions de l'EOC de celles de l'EOV:

Pour \ Dans un	EF	EOC	EOV
a) la fonction générale «Evénement»	y	Y_c	Y
b) les fonctions particulières			
1° «Evolution»	p	P_c	P
[avec les *normes*	$p(0)=1$	$P_c=1$	$P_0=1$ *)]
2° «Renouvellement»	f	F_c	F

*) Voir remarque aux pages 98/99 de [1].

Le symbole F_c représente la fonction de renouvellement que *Moser* désigne par $\varphi(t)$.

La fonction $f(t)$ se rattache facilement à des fonctions connues:

$$f(t) = -p'(t) = p(t)\,\mu(t)$$

Dans le travail déjà cité nous avons montré que la fonction $f(t)$ de l'EF correspond à la fonction de renouvellement F_c de l'EOC.

Afin de simplifier encore la notation, nous représenterons l'intégrale générale

$$\int_0^t A(s)\,B(t-s)\,ds = \int_0^t A(t-s)\,B(s)\,ds$$

simplement par

$$\int AB$$

et nous laisserons généralement tomber aussi la variable simple t (temps) des différentes fonctions.

II

4º Passons maintenant à l'énoncé et à la démonstration des nouvelles relations. Nous supposons que le travail de *Tarján* est connu et nous ne relevons ici que sa dernière relation qui est aussi la plus importante. Dans la notation adoptée, celle-ci s'écrit

$$Y = y + \int F_c y + \int P' y + \int \Phi y \tag{1}$$

où

$$\Phi = \int P' F_c$$

En appliquant à (1) la transformation de Laplace (transformation L) et les «théorèmes de plissement» (Faltungssätze) [4], nous pouvons aussi écrire

$$L(Y) = L(y) + L(y)\,L(F_c) + L(y)\,L(P') + L(y)\,L(P')\,L(F_c) \tag{1 a}$$

5º La *première relation* que nous voulons démontrer est

$$\boxed{Y = Y_c + \int P' Y_c} \tag{I}$$

Démonstration

En soumettant l'égalité (I) à la transformation L et en appliquant les «théorèmes de plissement», elle devient

$$L(Y) = L(Y_c) + L(P') \, L(Y_c) \tag{2}$$

Si, d'autre part, nous soumettons aux mêmes transformations une relation pour Y_c de *Moser*, nous avons encore

$$L(Y_c) = L(y) + L(y) \, L(F_c) \tag{3}$$

La valeur $L(Y_c)$ de (3) introduite dans celle pour $L(Y)$ de (2) donne (1 *a*). La relation (I) est ainsi démontrée. La démonstration directe est aussi possible. On l'obtient au moyen du théorème de Dirichlet et de façon analogue à celle que nous avons développée dans [3].

Nous formulerons ce premier résultat comme *principe de superposition* pour la fonction d'événement d'un *EOV*: *L'événement* Y *d'un EOV se compose additivement de l'événement* Y_c *de l'ensemble initial considéré comme un EOC et de tous les événements des variations successives de cet ensemble considérées comme des EOC.*

Sous réserve des normes adoptées, il est donc possible d'obtenir directement la fonction d'événement d'un *EOV* par la connaissance de la fonction d'événement de l'EOC ayant les mêmes fonctions de base y et p et de la fonction d'évolution de l'EOV. Ce résultat nous paraît être de quelque importance.

Si nous posons comme *cas particulier* un EOC, si donc nous postulons

$$P' = 0$$

alors nous avons

$$Y = Y_c$$

comme cela doit être.

6° La *deuxième relation* dont nous voulons faire la démonstration est

$$\boxed{Y = y^* + \int F_c \, y^*} \tag{II}$$

où

$$\boxed{y^* = y + \int P' y} \tag{II a}$$

Démonstration

De manière analogue à (I), la relation (II) peut s'écrire

$$L(Y) = L(y^*) + L(F_c)\,L(y^*) \tag{4}$$

et (II a)

$$L(y^*) = L(y) + L(P')\,L(y) \tag{5}$$

En introduisant (5) dans (4), nous obtenons de nouveau l'égalité (1 a).

Nous voulons également énoncer (II) comme *principe de superposition:*

L'événement Y d'un EOV se compose comme l'événement Y_c d'un EOC, mais l'événement $y(t)$ correspondant à l'EF est à remplacer par la valeur intermédiaire

$$y^* = y + \int P'\,y$$

Si nous posons à nouveau le *cas particulier*

$$P' = 0$$

nous avons

$$y^* = y$$

et, comme il se doit

$$Y = Y_c$$

7° En comparant les relations (I) et (II) on obtient encore la *relation de réciprocité*

$$\underline{Y_c + \int P'\,Y_c = y^* + \int F_c\,y^*}$$

où

$$y^* = y + \int P'\,y$$

Le *cas particulier*

$$P' = 0$$

donne

$$Y_c = y + F_c\,y$$

qui est la relation de *Moser* utilisée précédemment sous (3).

III

8° Récapitulons les formules principales permettant le calcul de Y_c et Y.

A. Relations entre fonctions des ensembles du *premier et deuxième type* (Moser, Maret):

a) $$Y_c = y + \int F_c y \quad \text{avec} \quad F_c = f + \int F_c f$$

b) $$Y_c = y + \int Y_c f$$

B. Relations entre fonctions des ensembles du *premier et troisième type* (Zwinggi [5], Tarján):

a) $$Y = y + \int F y \quad \text{avec} \quad F = P' + f + \int F f$$

b) $$Y = y + \int Y f + \int P' y$$

C. Relation entre fonctions des ensembles du *deuxième et troisième type* (Maret):

$$Y = Y_c + \int P' Y_c$$

D. Relations entre fonctions des ensembles des *trois types* (Tarján, Maret):

1° $$Y = y + \int F_c y + \int P' y + \int \Phi y \quad \text{où} \quad \Phi = \int P' F_c$$

2° $$Y = y^* + \int F_c y^* \quad \text{où} \quad y^* = y + \int P' y$$

9° Il est intéressant de constater que dans A et dans B, à l'exception du dernier terme de la relation B*b*, le rôle des formules de type *a* et *b* est interverti si, au lieu de procéder du particulier au général, on part du général pour arriver au particulier, c'est-à-dire d'une fonction d'événement d'un ordre supérieur à la fonction d'événement d'un ensemble d'ordre inférieur. D'après notre récapitulation il semble que le tour complet du vaste problème du renouvellement d'ensembles et du report d'événement d'un ensemble sur un autre est maintenant fait. Les noms de *Moser, Friedli, Hadwiger, Kreis, Richter, Saxer, Tarján, Wyss, Zwinggi* et d'autres encore y sont étroitement associés et l'équation intégrale du deuxième genre de Volterra est l'équation-clé d'une représentation simple des questions fondamentales qu'il avait suscitées.

Liste des ouvrages cités

Abréviation: BAAS = Bulletin de l'Association des Actuaires suisses.

[1] *R. Tarján:* Untersuchungen zum Erneuerungsproblem nichtkonstanter Gesamtheiten. (BAAS, vol. 44.)

[2] *Chr. Moser:* Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit. (BAAS, vol. 21.)

[3] *A. Maret:* Direkte Berechnung der Vorgangsfunktionen einer offenen Gesamtheit. (XII. internationaler Kongress der Versicherungsmathematiker, 1940.)

[4] *G. Doetsch:* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. (Springerverlag, Berlin, 1937.)

[5] *E. Zwinggi:* Zum Problem der Erneuerung. (Festgabe Moser, Versicherungsw. Untersuchungen, Bern, 1931.)